

Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

1. Nákladní automobil o hmotnosti m_1 a osobní automobil o hmotnosti m_2 jedou po přímé silnici proti sobě rychlostmi $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, kde $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$.
- Dojde k srážce, při níž zůstanou obě tělesa spojená. Určete rychlost soustavy $\mathbf{u}$ po srážce vzhledem k vozovce. Určete změnu rychlosti nákladního automobilu $\mathbf{u} - \mathbf{v}_1$ a osobního automobilu $\mathbf{u} - \mathbf{v}_2$ a vypočtěte úbytek celkové kinetické energie soustavy při srážce. Srážku modelujte nepružným středovým rázem.
 - Dojde ke srážce, při níž nezůstanou vozidla spojená, ale pohybují se rychlostmi $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$ vzhledem k vozovce. Byla zjištěna hodnota u_1 . Určete směr a velikost rychlosti $\mathbf{u}_2$ a vypočtěte úbytek celkové kinetické energie soustavy. Děj modelujte přímým nedokonalé pružným středovým rázem.
 - Porovnejte úbytky kinetické energie v případech a) a b) a výsledek diskutujte.

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $v_1 = v_2 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $m_1 = 15 \text{ t}$, $m_2 = 1,5 \text{ t}$, $u_1 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

2. Olověná kulička visí na tenkém vlákně.

- Určete úhel α , o který je nutno napjaté vlákno s kuličkou vychýlit, aby při kývání celkové zrychlení kuličky v krajních polohách mělo stejnou velikost jako celkové zrychlení při průchodu rovnovážnou polohou.
- Určete úhel β , o který je nutno vlákno vychýlit, aby síla napínající vlákno při průchodu rovnovážnou polohou měla dvojnásobnou velikost síly napínající vlákno v krajních polohách.

3. Těleso o hmotnosti m uvolníme ve výšce h nad zemským povrchem. Země má poloměr R a hmotnost M . Zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie na zemském povrchu, je potenciální energie soustavy Země – těleso ve vzdálenosti h nad povrchem Země dána vztahem:

$$E_p = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right).$$

- Určete rychlost dopadu tělesa na zemský povrch.
- Určete zrychlení a_1 tělesa na začátku a zrychlení a_2 na konci pohybu.
- Se stálým zrychlením a_1 by těleso spadlo z výšky h za dobu t_1 , se stálým zrychlením a_2 za dobu t_2 . Odhadněte skutečnou dobu pádu.

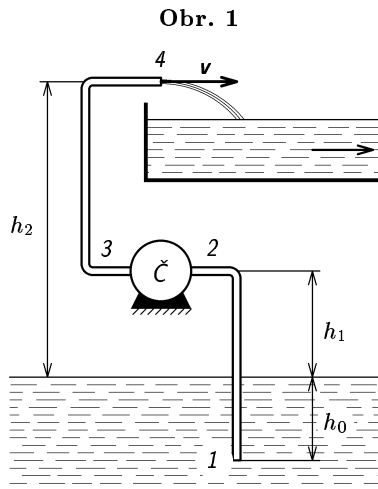
Řešte obecně, potom pro hodnoty: $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$, $h = 2,00 \cdot 10^6 \text{ m}$. Gravitační konstanta $\kappa = 6,66 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Odpor vzduchu a rotaci Země zanedbejte.

4. Čerpadlo čerpá vodu z řeky potrubím stálého průřezu o plošném obsahu S do koryta zavlažovací soustavy (obr. 1). Objemový průtok vody má stálou hodnotu Q_V . Sací otvor 1 potrubí je ve hloubce h_0 pod hladinou řeky. Vstupní otvor 2 a výstupní otvor 3 čerpadla jsou ve stejné výšce h_1 nad hladinou řeky. Výtokový otvor 4 potrubí je ve výšce h_2 nad hladinou řeky. Okolní vzduch má atmosférický tlak p_a .

- a) Určete rychlost v proudící vody v potrubí.
 b) Jaký tlak by měla voda
 v sacím otvoru,
 ve vstupním otvoru čerpadla,
 ve výstupním otvoru čerpadla
 a ve výtokovém otvoru potrubí,
 kdyby se chovala jako ideální kapalina?
Návod: Použijte „úplnou“ Bernoulliovu rovnici pro ideální kapaliny:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{konst.}$$

- c) S jakým výkonem by v takovém případě čerpadlo pracovalo?
 d) Určete výkon P' a účinnost η čerpací jednotky, jestliže ve skutečnosti musí být mezi vstupním a výstupním otvorem čerpadla udržován tlakový rozdíl p_r (větší, než jaký vychází z výpočtu pro ideální kapalinu).
 e) Do jaké největší výšky $h_{1\max}$ bychom mohli při daných hodnotách Q_V a S čerpadlo umístit, kdyby se voda chovala jako ideální kapalina?



Řešte obecně, pak pro hodnoty: $Q_V = 3,6 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$, $S = 5,0 \text{ cm}^2$,
 $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $h_0 = 0,6 \text{ m}$, $h_1 = 1,5 \text{ m}$, $h_2 = 6,2 \text{ m}$,
 $p_a = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $p_r = 120 \text{ kPa}$.

5. Vzduch v atmosféře se při proudění vzhůru adiabaticky rozpíná a ochlazuje, při proudění dolů se adiabaticky stlačuje a otepluje. V důsledku těchto dějů i v uklidněné atmosféře zakryté mraky teplota vzduchu klesá s rostoucí výškou a vztah mezi atmosférickým tlakem a teplotou je stejný jako při adiabatickém ději.

Za těchto podmínek vypustíme balon stálého objemu V naplněný vodíkem. Tlak vodíku v balonu se během stoupání vyrovnává pojistným ventilem s tlakem okolní atmosféry. Na zemi byl naměřen atmosférický tlak p_1 a teplota t_1 . Ve výšce, do které chceme vystoupit, je atmosférický tlak p_2 .

- a) Jaká je v této výšce teplota vzduchu?
 b) Kolik vodíku unikne během výstupu pojistným ventilem do atmosféry?
 c) Jak se změní nosnost balonu?

Řešte obecně a pro hodnoty:

$$p_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \quad p_2 = 0,83 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V = 500 \text{ m}^3.$$

Vzduch považujte za plyn s dvouatomovými molekulami, jehož molární hmotnost je $M_m = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Poissonova konstanta vzduchu i vodíku má hodnotu $\kappa = 1,40$.

6. Praktická úloha: Měření povrchového napětí

Úkol: Porovnejte povrchové napětí destilované vody a vodního roztoku saponátu.

- metodou kapilární elevace
- odtrhovací metodou
- kapkovou metodou

Měření proveďte při teplotě laboratoře. Povrchové napětí saponátového roztoku změřte při různých koncentracích (1:10 000, 1:1000, 1:100) a výsledky porovnejte. Naměřené povrchové napětí čisté vody porovnejte s hodnotou uvedenou v tabulkách.

Pomůcky:

2 skleněné kádinky, saponátový prostředek na nádobí (Jar, Lena apod.), destilovaná voda, kapilára, mikrometr, jehla, milimetrové měřítko, laboratorní váhy, závaží, stojan, skleněná trubička s nádobkou a kohoutem, závěsný kroužek (nebo kovový rámeček s nataženým drátkem), stoleček nad miskou vah.

Provedení úlohy:

- Metoda kapilární elevace* je založena na porovnání tíhy G sloupce kapaliny vystouplé v kapiláře a síly F vyvolané povrchovým napětím, která tento sloupec udržuje v určité výšce nad okolní hladinou (obr. 2).

$$G = \pi r^2 h \rho g, \quad F = 2\pi r \sigma \cos \vartheta.$$

Jelikož úhel smáčení $\vartheta < 10^\circ$, můžeme psát

$$\cos \vartheta \doteq 1, \quad F \doteq 2\pi r \sigma.$$

Z rovnosti $F = G$ plyne

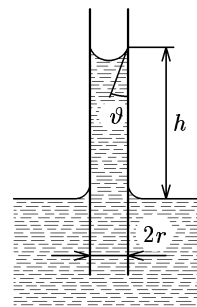
$$\sigma = \frac{h \rho g r}{2}.$$

Do kádinky naplněné zkoumanou kapalinou ponoříme svisle kapiláru, poněkud ji posuneme nahoru a změříme kapilární elevaci h . Průměr kapiláry $2r$ zjistíme pomocí jehly, kterou zasuneme do kapiláry a v místě označeném při okraji kapiláry změříme mikrometrem.

- Odtrhovací metoda* je založena na zjištění síly potřebné k odtržení povrchové blány ulpívající na kroužku (či rovném drátku) délky l vytahovaného z kapaliny, která jej smáčí (obr. 3). Kapalinová blána má dva povrchy a působí tedy silou

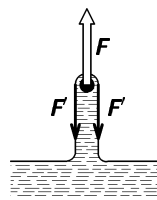
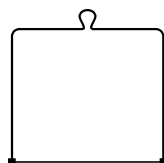
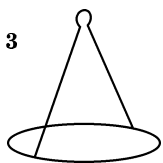
$$F = 2\sigma l,$$

kteřou můžeme určit pomocí laboratorních vah.



Obr. 2

Obr. 3



Nad miskou vah umístíme můstek s kádinkou, ve které je zkoumaná kapalina, a na konec vahadla zavěsíme kroužek nebo rámeček s drátkem a vyvážíme jej. Hladinu kapaliny v kádince upravíme tak, aby se nacházela asi 2 mm pod vyváženým kroužkem. Vychýlíme-li vahadlo, hladina zachytí kroužek a rovnováha se poruší. Sílu povrchového napětí určíme tárováním. Na druhou miskou vah přidáme lehký kalíšek a na něj sypeme zvolna drobná tělíska (táru), až dojde k odtržení kroužku od hladiny vody nebo k vytažení tenkého kapalinového prstence nad hladinu saponátového roztoku. (Jako tárovací tělíska se hodí např. jáhly nebo hořčičné semínko.) Zvážíme hmotnost m samotného kalíšku s tělísky a určíme povrchové napětí

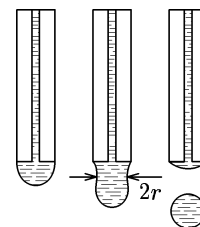
$$\sigma = \frac{mg}{2l}.$$

- c) *Kapková metoda* měření povrchového napětí spočívá v určení poměru hmotností kapek dvou kapalin (měřené a srovnávací) při znalosti povrchového napětí srovnávací kapaliny. Ze silnostěnné skleněné trubičky necháme *velmi zvolna* odkapat stejný počet N kapek měřené i srovnávací kapaliny. Jejich celkové hmotnosti M_1 , M_2 pak zvážíme. Tíhová síla působící na kapku v okamžiku odtržení od konce trubičky je rovna síle povrchového napětí:

$$\frac{M_1 g}{N} = 2\pi r \sigma_1 \quad \frac{M_2 g}{N} = 2\pi r \sigma_2,$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{M_2} \sigma_2.$$

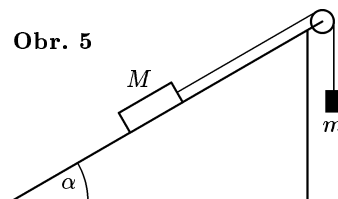
Jako srovnávací kapalinu zvolíme destilovanou vodu.



Obr. 4

7. Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α je položen kvádř o hmotnosti M . Těleso s hmotností m je spojeno s kvádrem vláknem vedeným přes pevnou kladku (obr. 5). Součinitel smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je f , součinitel statického tření je f_0 . Budeme vyšetřovat tyto případy:

Obr. 5



- udělíme počáteční rychlost v_0 tělesu o hmotnosti m ve směru svislém dolů,
- udělíme počáteční rychlost v_0 kvádru ve směru dolů rovnoběžně s nakloněnou rovinou,
- ponecháme soustavu v klidu.

Pro všechny případy vypočtete zrychlení soustavy a tahovou sílu vlákna a diskutujte, jak se bude soustava pohybovat.