**Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie C*

Autoři úloh: R. Horáková (1, 2, 7), J. Jírů (3, 4), J. Kalčík (5, 6)

**1.** a) Zvolme vztažnou sustavu s osou $x$ na silnici; kladná polosa je orientována ve směru pohybu nákladního automobilu. Souřadnice rychlostí před srážkou jsou: $v_1 = v$, $v_2 = -v$. Při dokonale nepružném rázu platí zákon zachování hybnosti:

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2)u, \qquad u = v\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 16\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

$m_1 > m_2$, rychlost $\boldsymbol{u}$ má stejný směr, jako byl směr rychlosti nákladního automobilu.

Změny souřadnic rychlostí:

$$u - v_1 = -4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}, \qquad u - v_2 = 36\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Změna kinetické energie soustavy:

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 - \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}m_2 v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}v^2\left(\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} - m_1 - m_2\right) = \frac{-2m_1 m_2 v^2}{m_1 + m_2} \doteq 1{,}1\ \mathrm{MJ}.$$

**5 bodů**

b) Také při nedokonale pružném rázu platí zákon zachování hybnosti:

$$m_1 v - m_2 v = m_1 u_1 + m_2 u_2, \qquad u_2 = \frac{m_1(v - u_1) - m_2 v}{m_2} = 30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Osobní automobil se bude pohybovat ve směru původní i nové rychlosti nákladního automobilu.

Změna kinetické energie soustavy:

$$\Delta E'_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}m_2 v^2 = 0{,}94\ \mathrm{MJ}.$$

**4 body**

c) V prvním případě je změna kinetické energie soustavy větší — při dokonale nepružném rázu je vykonána větší deformační práce než v případě nedokonale pružného rázu.

**1 bod**

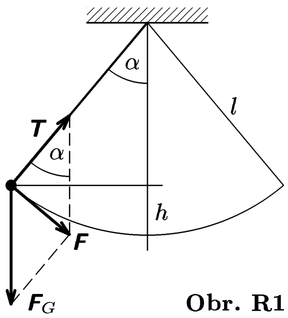
**2.** a) Označme $l$ délku vlákna a $m$ hmotnost kuličky. V krajní poloze působí výslednice tahové síly vlákna a tíhové síly ve směru tečny (obr. R1) a má velikost $F = mg\sin\alpha$. Kuličce uděluje tečné zrychlení

$$a_\mathrm{t} = g\sin\alpha.$$

V rovnovážné poloze má kulička normálové zrychlení $a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{l}$. Rychlost určíme ze zákona zachování energie:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh = 2gl(1 - \cos\alpha),$$

$$a_n = 2g(1 - \cos\alpha)$$



**Obr. R1**

Podle zadání má platit:

$$a_\mathrm{t} = a_\mathrm{n} \quad \Rightarrow \quad g\sin\alpha = 2g(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0\,; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 53^\circ 8'\,.$$

**5 bodů**

b) V krajní poloze je vlákno napínáno silou o velikosti $T_1 = mg\cos\beta$. Při průchodu rovnovážnou polohou platí $F_\mathrm{d} = T_2 - F_G$, (obr. R2):

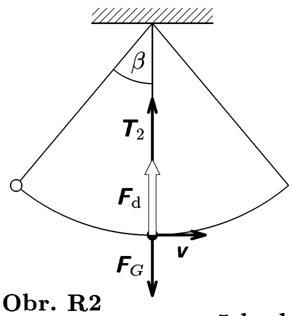
$$T_2 = F_\mathrm{d} + F_G = m\left(\frac{v^2}{l} + g\right) =$$

$$m\,(2g - 2g\cos\beta + g) = mg(3 - 2\cos\beta)\,.$$

Podle zadání má platit:

$$T_2 = 2T_1\,; \qquad mg(3-2\cos\beta) = 2mg\cos\beta\,,$$

$$\cos\beta = \frac{3}{4}\,; \qquad \beta = 41^\circ 25'\,.$$



**Obr. R2**

**5 bodů**

**3.** a) Úlohu budeme řešit na základě zákona zachování energie:

$$\varkappa mM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2\varkappa M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)} = 5{,}46\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

**4 body**

b) Pohyb tělesa je nerovnoměrně zrychlený. Ve výšce $h$ je zrychlení dáno vztahem:

$$a_1 = \varkappa\frac{M}{(R+h)^2}\,.$$

Pokud by těleso padalo se zrychlením $a_1$, dopadlo by na zemský povrch za dobu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = (R+h)\sqrt{\frac{2h}{\varkappa M}} = 839\ \mathrm{s}\,.$$

**3 body**

Na zemském povrchu je zrychlení

$$a_1 = \varkappa\frac{M}{R^2}\,.$$

S tímto zrychlením by těleso dopadlo za dobu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = R\sqrt{\frac{2h}{\varkappa M}} = 639\ \mathrm{s}\,.$$

**3 body**

Hledaný interval pro dobu pádu tělesa je $t \in (639; 839)$ s.

**4.** a) $Q_V = Sv\,, \qquad v = \dfrac{Q_V}{S} = 7{,}2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$ **1 bod**

b) V okolí sacího otvoru je tlak $p_\mathrm{a} + \varrho g h_0$.

$$p_\mathrm{a} + \varrho g h_0 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v^2\,, \qquad p_1 = p_\mathrm{a} + \varrho g h_0 - \frac{1}{2}\varrho v^2 = 8{,}0\cdot 10^4\ \mathrm{Pa}\,.$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h_1 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho g h_0\,, \qquad p_2 = p_\mathrm{a} - \frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho g h_1 = 5{,}9\cdot 10^4\ \mathrm{Pa}\,.$$

$$p_4 = p_\mathrm{a}\,.$$

$$p_3 + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h_1 = p_4 + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h_2\,, \qquad p_3 = p_\mathrm{a} + \varrho g(h_2 - h_1) = 1{,}46\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

**3 body**

c) Čerpadlo při zanedbání třecích sil zvyšuje potenciální energii vody a uvádí ji do pohybu . Jeho výkon je:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{mgh_2}{t} + \frac{mv^2}{2t} = \frac{V\varrho g h_2}{t} + \frac{V\varrho v^2}{2t} =$$

$$= Q_V \varrho g h_2 + \frac{Q_V \varrho v^2}{2} = Q_V \varrho g h_2 + \frac{Q_V^3 \varrho}{2S^2} = 310\ \mathrm{W}\,.$$

**2 body**

d) Čerpadlo působí na vodu silou $F = p_\mathrm{r} S$, kterou koná mechanickou práci. Výkon čerpadla při rychlosti toku $v$ je

$$P' = Fv = p_\mathrm{r} S v = p_\mathrm{r} Q_V = 430\ \mathrm{W}\,.$$

Účinnost čerpadla je

$$\eta = \frac{P}{P'} = \frac{Q_V \varrho g h_2 + \frac{Q_V^3 \varrho}{2S^2}}{p_\mathrm{r} Q_V} = \frac{\varrho g h_2 + \frac{Q_V^2 \varrho}{2S^2}}{p_\mathrm{r}} = 0{,}72\,.$$

**2 body**

e) Tlak ve vstupním otvoru čerpadla musí mít kladnou hodnotu, jinak by došlo k roztržení vodního sloupce.

$$p_2 = p_\mathrm{a} - \frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho g h_{1max} > 0\,, \qquad h_{1max} < \frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} - \frac{Q_V^2}{2gS^2} = 7{,}6\ \mathrm{m}\,.$$

**2 body**

**5.** a) Ze stavové rovnice a Poissonova vztahu pro adiabatický děj plyne:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\,, \quad T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 293\cdot 0{,}9482\ \mathrm{K} = 278\ \mathrm{K}\,, \qquad t_2 = 5\ {}^\circ\mathrm{C}\,.$$

Ve výšce, do které chceme vystoupit, je teplota 5 °C. **3 body**

b) Při výstupu balonu se vodík v balonu adiabaticky rozpíná a zčásti pojistným ventilem uniká do atmosféry. Vodík i vzduch mají stejnou Poissonovu konstantu. Proto se teplota uvnitř balonu adiabatickým ochlazením stále vyrovnává s teplotou okolí. Hmotnost $m_0$ vodíku na zemi a $m$ ve výšce výstupu určíme pomocí stavové rovnice:

$$m_0 = \frac{p_1 V M_\mathrm{mH}}{R_\mathrm{m} T_1}\,, \qquad m = \frac{p_1 V M_\mathrm{mH}}{R_\mathrm{m} T_2}\,,$$

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{V M_\mathrm{mH}}{R_\mathrm{m}}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right) = \frac{V M_\mathrm{mH}}{R_\mathrm{m}}\frac{p_1}{T_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - 1\right] = -5{,}1\ \mathrm{kg}$$

**3 body**

c) Výslenice vztlakové a tíhové síly působící na vodík v balonu na zemi má velikost

$$F = V(\varrho_{\mathrm{vzd}} - \varrho_{\mathrm{H}})g\,.$$

Na zemi a ve výšce výstupu dostaneme:

$$F_1 = \frac{Vp_1}{R_\mathrm{m}T_1}(M_\mathrm{m} - M_\mathrm{mH})g\,, \qquad F_2 = \frac{Vp_2}{R_\mathrm{m}T_2}(M_\mathrm{m} - M_\mathrm{mH})g\,.$$

Nosnost $N$ balonu se změní o

$$\Delta N = \frac{F_2 - F_1}{g} = \frac{V}{R_\mathrm{m}}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right)(M_\mathrm{m} - M_\mathrm{mH}) =$$

$$= \frac{V}{R_\mathrm{m}}(M_\mathrm{m} - M_\mathrm{mH})\frac{p_1}{T_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - 1\right] = -69\ \mathrm{kg}$$

**4 body**

**7.** a) Zavěšenému tělesu o hmotnosti $m$ udělíme počáteční rychlost $v_0$ směrem dolů. Pohybové rovnice

$$ma = mg - T\,, \qquad Ma = T - Mg\sin\alpha - Mgf\cos\alpha$$

mají řešení

$$a = g\frac{m - M(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M + m}\,, \qquad T = mg\frac{M(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha)}{M + m}\,.$$

*Diskuse:* Je-li $m > M(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, je pohyb soustavy rovnoměrně zrychlený; v opačném případě $(m < M(\sin\alpha + f\cos\alpha))$ je pohyb rovnoměrně zpomalený. Jestliže $m = M(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, pohybuje se soustava rovnoměrně rychlostí $v_0$.

**4 body**

b) Kvádru o hmotnosti $M$ udělíme počáteční rychlost $v_0$ směrem dolů rovnoběžně s nakloněnou rovinou. Pohybové rovnice

$$Ma_1 = Mg\sin\alpha - Mgf\cos\alpha - T\,, \qquad ma_1 = T - mg$$

mají řešení

$$a_1 = g\frac{M(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m}{M + m}\,, \qquad T = mg\frac{M(1 + \sin\alpha - f\cos\alpha)}{M + m}\,.$$

*Diskuse:* Je-li $M(\sin\alpha - f\cos\alpha) > m$, je pohyb soustavy rovnoměrně zrychlený; v opačném případě $(M(\sin\alpha - f\cos\alpha) < m)$ je pohyb rovnoměrně zpomalený. Jestliže $m = M(\sin\alpha - f\cos\alpha)$, pohybuje se soustava rovnoměrně rychlostí $v_0$.

**4 body**

c) Soustava je na počátku v klidu.
Z řešení úlohy a) je zřejmé, že zavěšené těleso se začne pohybovat dolů, jestliže $m > M(\sin\alpha + f_0\cos\alpha)$.
Z řešení úlohy b) je zřejmé, že kvádr se začne pohybovat dolů po nakloněné rovině, jestliže $m < M(\sin\alpha - f_0\cos\alpha)$.
Soustava zůstane v klidu, jestliže $M(\sin\alpha - f_0\cos\alpha) \le m \le M(\sin\alpha + f_0\cos\alpha)$.

**2 body**