Řešení teoretických úloh celostátního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: P. Šedivý (1), Z. Polák (2), B. Vybíral (3, 4)

1. a) Před připojením kondenzátoru prochází celým obvodem proud $I_1 = I_ž$. Po připojení kondenzátoru prochází kondenzátorem proud o efektivní hodnotě

$$I_C = \frac{U_ž}{X_C} = U_ž \omega C = 0{,}0603\ \mathrm{A}\,,$$

který předbíhá proud žárovky o čtvrtinu periody. Efektivní hodnota proudu odebíraného z transformátoru se zvětší na

$$I_2 = \sqrt{{I_ž}^2 + {I_C}^2} = 0{,}117\ \mathrm{A}\,.$$

2 body

b) Žárovku můžeme považovat za rezistor o odporu $R = \dfrac{U_ž}{I_ž} = 120\ \Omega$.

Napětí v obvodu se rozdělí v poměru impedancí. Protože v obou případech je napětí na žárovce stejné, platí

$$\frac{U_ž}{U} = \frac{|R|}{|R + \mathrm{j}\omega L|} = \frac{\left|\dfrac{\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\right|}{\left|\dfrac{\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + \mathrm{j}\omega L\right|}\,.$$

3 body

Po úpravě

$$\frac{R}{|R + \mathrm{j}\omega L|} = \frac{R}{|R - \omega^2 RCL + \mathrm{j}\omega L|}\,, \quad \Longrightarrow \quad R = \pm(R - \omega^2 RCL)\,.$$

Úloze vyhovuje záporné znaménko. Z toho:

$$\omega^2 CLR = 2R\,, \qquad L = \frac{2}{\omega^2 C} \doteq 1{,}27\ \mathrm{H}\,.$$

3 body

(Je zajímavé, že nezáleží na odporu žárovky. Kdybychom do obvodu zařadili jinou žárovku, svítila by v obou případech stejně.)

c) Výpočet efektivní hodnoty U svorkového napětí transformátoru provedeme pro obvod bez kondenzátoru. Platí

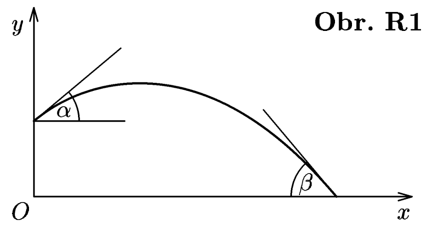
$$U = I_ž \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 0{,}100\ \mathrm{A} \cdot 416\ \Omega = 41{,}6\ \mathrm{V} \doteq 42\ \mathrm{V}\,.$$

2 body

2. a) Počátek vztažné soustavy zvolíme v rovině dopadu pod počátečním bodem trajektorie (obr. R1). Poloha koule závisí na čase podle vztahů:

$$x = v_0 t \cos\alpha \,,$$

$$y = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \,.$$



Obr. R1

Vyloučením parametru t dostaneme neparametrickou rovnici trajektorie:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}\,, \qquad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x + h\,,$$

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}\alpha \cdot x + h\,.$$

V bodě dopadu platí $y = 0$, tedy:

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}\alpha \cdot x + h = 0\,. \qquad (1)$$

2 body

Na ose x je každý bod dosažitelný ze dvou elevačních úhlů, z jediného elevačního úhlu, nebo je nedosažitelný. Nejvzdálenější je bod dosažitelný z jediného elevačního úhlu. V rovnici (1) můžeme za neznámou považovat úhel α a ptáme se, pro které x má tato rovnice jediné řešení. Po substituci $u = \operatorname{tg}\alpha$ dostáváme kvadratickou rovnici

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2}u^2 + xu + h - \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0\,.$$

Aby měla jediné řešení, musí platit

$$D = x^2 + \frac{4gx^2}{2v_0^2}\left(h - \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0\,, \quad \Longrightarrow \quad x^2 v_0^4 + 2ghv_0^2 x^2 - g^2 x^4 = 0\,,$$

$$v_0^4 + 2ghv_0^2 = g^2 x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{v_0^4 + 2ghv_0^2}{g^2}} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

$$u = \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{2\dfrac{gx^2}{2v_0^2}} = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\,.$$

4 body

Pro dané hodnoty dostáváme: $x = 21{,}9$ m, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}91279$, $\alpha = 42°23'$.

1 bod

b) Ze zákona zachování energie plyne, že rychlost tělesa v okamžiku dopadu má velikost $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Vodorovná složka rychlosti tělesa má stálou velikost $v_x = v_0 \cos\alpha$. Z toho pro úhel dopadu β plyne:

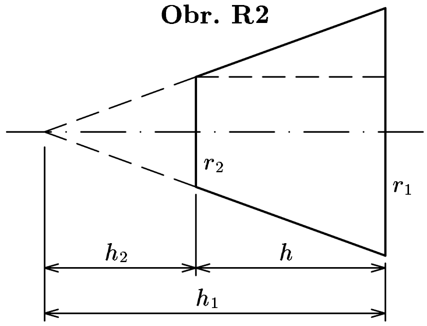
$$\cos\beta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha\,.$$

α a β jsou úhly doplňkové a platí $\alpha + \beta = 90°$. Numericky: $\beta = 47°37'$.

3 body

3. a) Z obr. R2 odvodíme pomocné vztahy:

Obr. R2



$$h_1 = h\frac{r_1}{r_1 - r_2}\,, \quad m_1 = \frac{\pi h \varrho_k}{3}\frac{r_1^3}{r_1 - r_2}\,,$$

$$h_2 = h\frac{r_2}{r_1 - r_2}\,, \quad m_2 = \frac{\pi h \varrho_k}{3}\frac{r_2^3}{r_1 - r_2}\,.$$

Hmotnost komolého kužele

$$m = m_1 - m_2 = \frac{\pi h \varrho_k}{3}\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2}\,,$$

kde ϱ_k je hustota kužele. Moment setrvačnosti kužele

$$J = \frac{3}{10}(m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2) = \frac{3}{10}\frac{\pi \varrho_k h}{3}\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1 - r_2}\,.$$

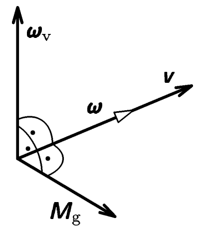
Porovnáním dostaneme

$$\frac{J}{m} = \frac{3}{10}\cdot\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}\,, \qquad J = \frac{3}{10}m\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} = 195\ \mathrm{kg\cdot m^2}\,.$$

4 body

b) Gyroskopický moment rotoru turbíny je

Obr. R3



$$\boldsymbol{M}_g = J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_v\,,$$

přičemž vektory $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_v$ a $\boldsymbol{M}_g$ jsou vzájemně na sebe kolmé (obr. R3).

Úhlová rychlost vlastní rotace má velikost $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$.

Velikost gyroskopického momentu je

$$M_g = J\omega\omega_v = \frac{\pi J n \omega_v}{30} = 18\,400\ \mathrm{N\cdot m}\,.$$

3 body

Účinkem gyroskopického momentu $\boldsymbol{M}_g$ se příď lodi nepatrně nadzvedne a záď nepatrně ponoří.

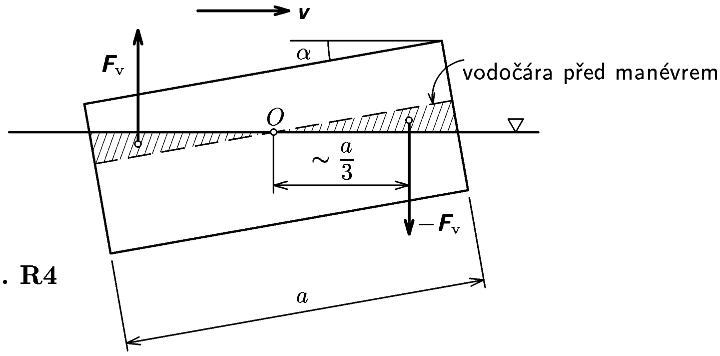
c) Celková vztlaková síla zůstane stejná, změní se jen její rozložení (obr. R4). Vztlaková síla na zádi se zvětší o $\boldsymbol{F}_v$ a na přídi se o tutéž hodnotu zmenší. Moment této dvojice bude v rovnováze s gyroskopickým momentem $\boldsymbol{M}_g$:

$$M_g = \frac{2F_v a}{3}\,, \quad \text{kde} \quad F_v = V\varrho g = \frac{ba^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{8}\varrho g \doteq \frac{a^2 b \varrho g}{8}\alpha\,.$$

Pak

$$\frac{2}{3}\frac{a^3 b\varrho g}{8}\alpha = \frac{\pi J n\omega_\mathrm{v}}{30}\,, \qquad \alpha = \frac{2\pi J n\omega_\mathrm{v}}{5a^3 b\varrho g} = 1{,}15\cdot 10^{-4}\ \mathrm{rad} \doteq 24''\,.$$

3 body



Obr. R4

4.a) Kinetická energie protonu je rovna elektrické práci. Podle klasické teorie:

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2 = Ue \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_\mathrm{p}}} = 7{,}830 \cdot 10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

1 bod

b) Ze stejného principu vychází i relativistický výpočet:

$$(m' - m_\mathrm{p})c^2 = Ue\,, \qquad m' = \frac{m_\mathrm{p}}{\sqrt{1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2}} = m_\mathrm{p} + \frac{Ue}{c^2}$$

$$v' = c\sqrt{1-\left(\frac{m_\mathrm{p}}{m'}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{m_\mathrm{p}c^2}{m_\mathrm{p}c^2+Ue}\right)^2} = 7{,}828 \cdot 10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Relativní chyba výsledku v úkolu a): $\delta = \dfrac{v-v'}{v'} \cdot 100\ \% = 0{,}026\ \%$. Chyba je zanedbatelná. K výpočtu kinetické energie a hybnosti částic je možno v tomto případě s dostatečnou přesností použít klasické vzorce.

3 body

c) Přibližující se proton uvede odpudivou silou do pohybu částici α. V okamžiku největšího přiblížení bude rychlost obou částic stejná; označíme ji $\boldsymbol{v}_1$. Při uvažovaném ději musí být splněn zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti. Ve výchozí poloze mají částice tyto energie a hybnosti:

$$E_\mathrm{p} = 0\,, \quad E_\mathrm{k} = Ue + 0 = Ue\,, \quad \boldsymbol{p} = m_\mathrm{p}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = m_\mathrm{p}\boldsymbol{v}\,.$$

Při největším přiblížení částic bude:

$$E_{\mathrm{p}1} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0\Delta_1} = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\Delta_1}\,, \quad E_{\mathrm{k}1} = (m_\mathrm{p}+m_\alpha)\frac{v_1^2}{2}\,, \quad \boldsymbol{p}_1 = (m_\mathrm{p}+m_\alpha)\boldsymbol{v}_1\,.$$

Ze zákonů zachování energie a hybnosti dostáváme soustavu rovnic:

$$Ue = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\Delta_1} + (m_\mathrm{p}+m_\alpha)\frac{v_1^2}{2}\,,$$

$$m_\mathrm{p}v = (m_\mathrm{p}+m_\alpha)v_1\,, \quad \text{kde} \quad v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_\mathrm{p}}}$$

Řešením je:

$$\Delta_1 = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{m_\mathrm{p}+m_\alpha}{m_\alpha} \doteq \frac{5e}{8\pi\varepsilon_0 U}$$

$$v_1 = \frac{m_\mathrm{p} v}{m_\mathrm{p} + m_\alpha} \doteq \frac{v}{5}\,.$$

Pro dané hodnoty: $\Delta_1 = 1{,}127 \cdot 10^{-14}$ m, $v_1 = 1{,}574 \cdot 10^6$ m$\cdot$s^{-1}.

4 body

d) Energie a hybnosti ve druhém stavu jsou:

$$E_{\mathrm{p}2} = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\Delta_2}\,, \quad E_{\mathrm{k}2} = \frac{1}{2} m_\alpha v_2^2,\,, \quad \boldsymbol{p}_2 = m_\alpha \boldsymbol{v}_2\,.$$

platí opět zákony zachování:

$$Ue = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\Delta_2} + \frac{m_\alpha v_2^2}{2}\,,$$

$$m_\mathrm{p} v = m_\alpha v_2\,, \quad \text{kde} \quad v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_\mathrm{p}}}$$

Řešením je:

$$\Delta_2 = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 U} \cdot \frac{m_\alpha}{m_\alpha - m_\mathrm{p}} \doteq \frac{2e}{3\pi\varepsilon_0 U}\,, \qquad \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{m_\alpha^2}{m_\alpha^2 - m_\mathrm{p}^2} \doteq \frac{16}{15}\,,$$

$$v_2 = \frac{m_\mathrm{p}}{m_\alpha} \doteq \frac{v}{5}\,, \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{m_\mathrm{p} + m_\alpha}{m_\alpha} \doteq \frac{5}{4}\,.$$

Pro dané hodnoty: $\Delta_2 = 1{,}203 \cdot 10^{-14}$ m, $v_2 = 1{,}970 \cdot 10^6$ m$\cdot$s^{-1}.

2 body