Řešení úloh regionálního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: P. Šedivý (1), B. Vybíral (2, 3), D. Kluvanec (4)

1.a) Při řešení úlohy budeme používat středoškolskou znaménkovou konvenci. Obraz vytvořený první čočkou objektivu je předmětem pro druhou čočku. Zobrazení bodu mimo optickou osu znázorňuje obr. R1. Platí:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f_1}\,, \qquad a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = -300\ \mathrm{mm}\,.$$

První čočka vytvoří zdánlivý obraz, který leží v předmětovém poloprostoru druhé čočky ve vzdálenosti $a_2 = d - a_1' = 350$ mm od druhé čočky. Dále platí:

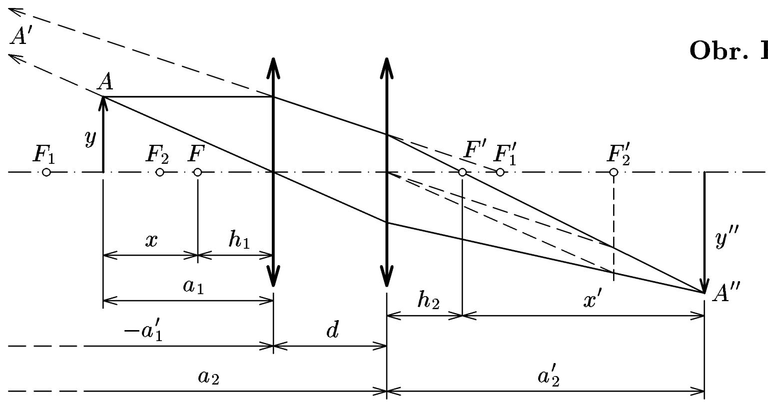
$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f_1}\,, \qquad a_2' = \frac{a_2 f_1}{a_2 - f_1} = 140\ \mathrm{mm}\,.$$

Celkové příčné zvětšení výsledného obrazu je součinem příčného zvětšení při prvním a druhém zobrazení:

$$Z = \frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y} = Z_1 \cdot Z_2 = -\frac{a_1'}{a_1} \cdot \left(-\frac{a_2'}{a_2}\right) = -1{,}6\,.$$

Výsledný obraz je skutečný, převrácený a 1,6krát zvětšený. Leží ve vzdálenosti 140 mm od druhé čočky objektivu.

5 bodů



Obr. R1

b) Vyjdeme opět z obr. R1. Paprsky přicházející rovnoběžně s optickou osou láme první čočka do svého obrazového ohniska F_1' a druhá čočka do obrazového ohniska F' celé soustavy. Bod F_1' se tedy druhou čočkou zobrazuje do bodu F'. Platí:

$$\frac{1}{-(f_1-d)}+\frac{1}{h_2}=\frac{1}{f_1}\,,\qquad h_2=\frac{f_1(f_1-d)}{2f_1-d}=33{,}\overline{3}\ \mathrm{mm}\,.$$

Vzhledem k souměrnosti objektivu je $h_1=h_2$. **2 body**

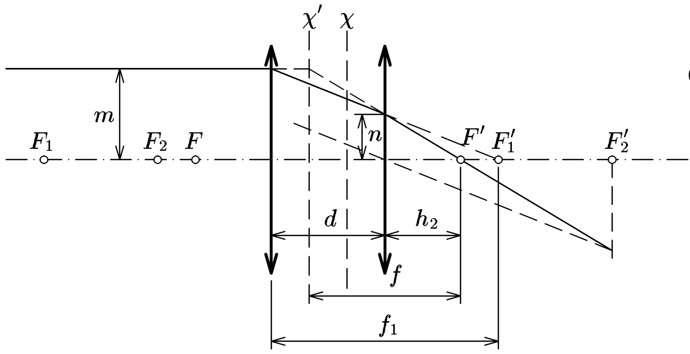
c) Použijeme zobrazovací rovnici čočky v Newtonově tvaru:

$$f^2=x\cdot x'\,,\quad \text{kde}\quad x=a_1-h_1=41{,}\overline{6}\ \mathrm{mm}\,,\ x'=a_2'-h_2=106{,}\overline{6}\ \mathrm{mm}\,.$$

Z toho $f=\sqrt{xx'}=66{,}\overline{6}$ mm.

Můžeme také vycházet z polohy hlavních rovin χ,χ' objektivu (obr. R2):

Platí: $\dfrac{n}{m}=\dfrac{h_2}{f}=\dfrac{f_1-d}{f_1}\,,\qquad f=\dfrac{h_2f_1}{f_1-d}=66{,}\overline{6}\ \mathrm{mm}\,.$ **3 body**



Obr. R2

2. a) Pro relativistické zvětšení hmotnosti platí:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{m_0 + \Delta m}{m_0} = 1 + \delta m = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \, .$$

Úpravou dostaneme:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \delta m)^2}} = c\frac{\sqrt{(2 + \delta m)\delta m}}{1 + \delta m} = 0{,}140c = 4{,}21 \cdot 10^7 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \, .$$

3 body

b) Kinetická energie částic je úměrná zvětšení jejich hmotnosti:

$$E_\mathrm{k} = (m - m_0)c^2 = m_0 \cdot \delta m \cdot c^2 \, .$$

$$E_\mathrm{p} = m_\mathrm{p} \cdot \delta m \cdot c^2 = 1{,}50 \cdot 10^{-12} \ \mathrm{J} \doteq 9{,}4 \ \mathrm{MeV} \, .$$

$$E_\mathrm{d} = m_\mathrm{d} \cdot \delta m \cdot c^2 = 3{,}01 \cdot 10^{-12} \ \mathrm{J} \doteq 19 \ \mathrm{MeV} \, .$$

$$E_\alpha = m_\alpha \cdot \delta m \cdot c^2 = 5{,}97 \cdot 10^{-12} \ \mathrm{J} \doteq 37 \ \mathrm{MeV} \, .$$

3 body

c) Dráha částice v cyklotronu je zakřivena působením magnetické síly:

$$ZeB\omega r = m\omega^2 r \, , \qquad \omega = 2\pi f = \frac{ZeB}{m_0} \, , \qquad f = \frac{ZeB}{2\pi m_0} \, .$$

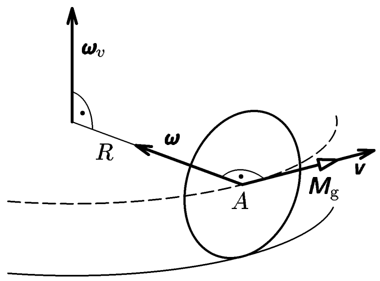
$$\text{protony } (Z = 1) \qquad f_\mathrm{p} = \frac{eB}{2\pi m_\mathrm{p}} = 21{,}5 \ \mathrm{MHz} \, ,$$

$$\text{deuterony } (Z = 1) \qquad f_\mathrm{d} = \frac{eB}{2\pi m_\mathrm{d}} = 10{,}8 \ \mathrm{MHz} \, ,$$

$$\text{částice } \alpha \ (Z = 2) \qquad f_\alpha = \frac{eB}{\pi m_\alpha} = 10{,}8 \ \mathrm{MHz} \, .$$

4 body

3. a)



Obr. R3

Gyroskopický moment automobilu je

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{g} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{\omega}_v = J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_v\,,$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je úhlová rychlost rotace kola a $\boldsymbol{\omega}_v$ je úhlová rychlost otáčení automobilu v zatáčce (obr. R3). Platí

$$\omega = \frac{v}{r}\,, \qquad \omega_v = \frac{v}{R}\,.$$

Velikost gyroskopického momentu je

$$M_\mathrm{g} = J\frac{v^2}{rR} =$$

$$= 3{,}80 \cdot \frac{20^2}{0{,}30 \cdot 25{,}0}\ \mathrm{N \cdot m} = 203\ \mathrm{N \cdot m}$$

2 body

b) Moment odstředivých sil $\boldsymbol{M}_\mathrm{o} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ má velikost (obr. R4)

$$M_\mathrm{o} = rF_\mathrm{o} = rm\frac{v^2}{R} = 0{,}30 \cdot 1200\frac{20^2}{25}\ \mathrm{N \cdot m} = 5760\ \mathrm{N \cdot m}\,.$$

2 body

c) Svislé složky sil, kterými na vozovku působí levá kola, mají velikost

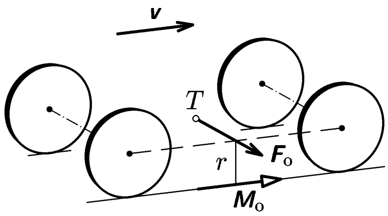
$$F_\mathrm{L} = \frac{mg}{4} - \frac{M_\mathrm{g} + M_\mathrm{o}}{2l} = \frac{mg}{4} - \frac{v^2}{2lrR}(mr^2 + J) =$$

$$= (2943 - 1987)\ \mathrm{N} = 955\ \mathrm{N}.$$

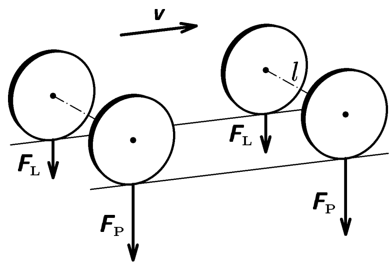
Svislé složky sil, kterými na vozovku působí pravá kola, mají velikost

$$F_\mathrm{P} = \frac{mg}{4} + \frac{v^2}{2lrR}(mr^2 + J) = (2943 + 1987)\ \mathrm{N} = 4930\ \mathrm{N}.$$

3 body



Obr. R4



Obr. R5

d) Při kritické rychlosti platí $F_\mathrm{L} = 0$, tedy

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{mglrR}{2(mr^2 + J)}} = \sqrt{\frac{1200 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}50 \cdot 0{,}30 \cdot 25}{2(1200 \cdot 0{,}3^2 + 3{,}8)}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,,$$

$$v_\mathrm{k} = 24{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 87{,}6\ \mathrm{km/h}.$$

3 body

4. a) K nežádoucí přeměně elektrické energie na vnitřní energii dochází při průchodu proudu vnitřním odporem zdroje během nabíjení kondenzátoru.

1 bod

b) Během nabíjení kondenzátoru dodá zdroj náboj $Q = U_\mathrm{e}C$ a vykoná práci $W_\mathrm{z} = U_\mathrm{e}Q = {U_\mathrm{e}}^2C$. Kondenzátor získá energii $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}C{U_\mathrm{e}}^2$. Zbývající energie $\frac{1}{2}C{U_\mathrm{e}}^2$ se spotřebuje ve vnitřním odporu zdroje a ve vyhřívacím tělese v poměru okamžitých výkonů:

$$\frac{P}{P_\mathrm{v}} = \frac{RI^2}{R_\mathrm{i}I^2} = \frac{R}{R_\mathrm{i}}\,.$$

Ve vyhřívacím tělese tedy během nabíjení kondenzátoru vznikne teplo

$$Q_1 = \frac{C{U_\mathrm{e}}^2R}{2(R + R_\mathrm{i})} = 0{,}081\ \mathrm{J}\,.$$

3 body

c) Během vybíjení kondenzátoru se celá jeho energie spotřebuje ve vyhřívacím tělese, kde vznikne teplo

$$Q_2 = E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}C{U_\mathrm{e}}^2 = 0{,}405\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

d) Průměrný výkon ohřívače je

$$P = f(Q_1 + Q_2) = \frac{fC{U_\mathrm{e}}^2(2R + R_\mathrm{i})}{2(r + R_\mathrm{i})} \doteq 9{,}7\ \mathrm{W}\,.$$

2 body

e) Celkový elektrický výkon v obvodu je $P_0 = fW_\mathrm{z} = fC{U_\mathrm{e}}^2$ a zařízení má účinnost

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{2R + R_\mathrm{i}}{2(R + R_\mathrm{i})} = 0{,}60\,.$$

Kdyby bylo vyhřívací těleso trvale připojeno ke zdroji, mělo by zařízení účinnost

$$\eta' = \frac{R}{R + R_\mathrm{i}} = 0{,}20\,.$$

Pokud $R_\mathrm{i} > 0$, platí $\eta > \eta'$.

2 body