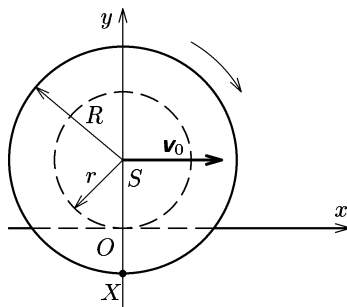


# Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

1. Na vodorovné podložce se rovnoměrně odvaluje válec o poloměru  $r = 30$  cm. Osa válce se pohybuje rychlostí  $v_0 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Na podstavu válce je připevněno kolo o poloměru  $R = 50$  cm, které přesahuje přes okraj podložky. Osy obou těles jsou totožné.

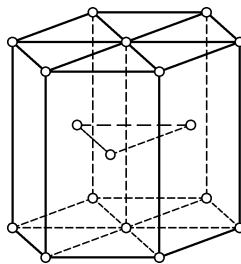


Obr. 1

- Napište parametrické rovnice trajektorie bodu  $X$  na obvodu kola. Počáteční polohu bodu a vztažnou soustavu zvolte podle obr. 1.
  - Popište, jak se v závislosti na čase mění souřadnice rychlosti a velikost rychlosti bodu  $X$ . Určete velikost rychlosti v nejnižších a nejvyšších bodech trajektorie.
  - Bod  $X$  se střídavě pohybuje vpřed a vzad. Určete, v jakém poměru jsou doby trvání těchto pohybů.
  - Popište, jak se v závislosti na čase mění souřadnice a velikost zrychlení bodu  $X$ .
  - V okolí nejnižších a nejvyšších bodů trajektorie můžeme pohyb bodu  $X$  popsat přibližně jako rovnoměrný pohyb po kružnici. Určete poloměry příslušných oskulacních kružnic.
  - Trajektorii bodu  $X$  narýsujte v měřítku 1:10 na list papíru formátu A4.
2. Z určitého místa budeme házet kamenem. Počáteční rychlost kamene bude mít každé stejnou velikost  $v_0$ , elevační úhel  $\alpha$  budeme měnit. Všechny hody budou probíhat v téže svislé rovině. Je-li kámen dostatečně velký, můžeme zanedbat odpor vzduchu a předpokládat, že trajektorie kamene je parabola.
- Určete množinu vrcholů všech těchto parabol.
  - Určete hranici oblasti, kterou můžeme kameny zasáhnout.
  - Výsledky úloh a), b) znázorněte graficky ve vhodném měřítku spolu s několika trajektoriemi pro různé elevační úhly. Volte  $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
3. a) Trubice o vnějším průměru  $D$  a vnitřním průměru  $d$  vyrobená ze skla o indexu lomu  $n$  je naplněna obarvenou tekutinou. Určete zdánlivé zvětšení vnitřního průměru trubice v důsledku lomu světla.
- b) Ze stejného skla je vyrobena tyč kruhového průřezu o průměru  $D$ , na kterou po jedné straně narýsujeme tenkou podélnou čáru. Určete zdánlivé zvětšení čáry při pohledu z protější strany.
- Úlohu řešte obecně a pro  $n = 1,52$  (relativní index lomu vzhledem ke vzduchu). Vnější průměry trubice a tyče jsou malé ve srovnání s konvenční zrakovou délkou.

4. Při výkladu fyzikálních vlastností kovů se často používají modely krystalových struktur, ve kterých atomy, jako vzájemně se dotýkající koule, vytvářejí prostorovou mřížku. O kovech je známo, že většina krystaluje v některém z třech typů mřížek:

- prostorově centrované kubické mřížce (např. Li, Na, Cr,  $\alpha$ Fe,  $\delta$ Fe),
- plošně centrované kubické mřížce (např. Cu, Ag, Ni, Pd,  $\gamma$ Fe),
- hexagonální mřížce, jejíž model je znázorněn na obr. 2 (např. Mg, Zn, Cd, Os).



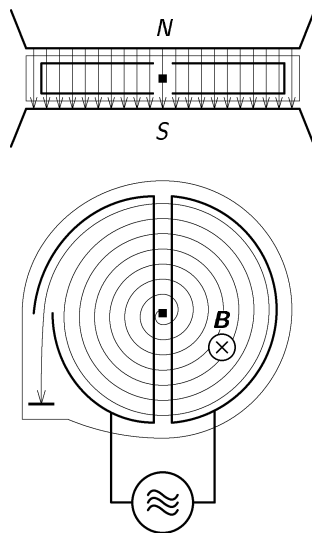
Obr. 2

Zaplnění prostoru krystalové mřížky atomy můžeme vyjádřit *koefficientem zaplnění*  $f = \frac{V}{V_0}$ , kde  $V_0$  je objem celé elementární buňky a  $V$  je objem její části, kterou zaplňují atomy.

- Popište a znázorněte rozmístění atomů a určete koeficient zaplnění v krystalech sodíku, stříbra a hořčíku.
- Určete poloměry atomů uvedených kovů, znáte-li jejich relativní atomové hmotnosti  $A_{rNa} = 22,990$ ,  $A_{rAg} = 107,87$ ,  $A_{rMg} = 24,305$  a hustoty  $\rho_{Na} = 971 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{Ag} = 10\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{Mg} = 1\,740 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

5. K urychlování nabitých částic, zejména protonů, deuteronů a helionů (částic  $\alpha$ ) byl r. 1931 sestaven první kruhový urychlovač – *cyklotron*. Jeho schéma je na obr. 3. Mezi póly silného elektromagnetu, který vytváří homogenní magnetické pole o indukci  $B$ , se ve vakuové komoře nacházejí dvě půlválcové urychlovací elektrody, tzv. duanty, připojené ke zdroji vysokofrekvenčního střídavého napětí o amplitudě  $U_m$  a frekvenci  $f$ . Částice vznikající úplnou ionizací molekul plynu (vodíku, deuteria nebo helia) přiváděného do zdroje iontů, který je umístěn uprostřed vakuové komory, mají klidovou hmotnost  $m_0$  a náboj  $Ze$ . Uvnitř duantů se pohybují po kruhové trajektorii a při každém průchodu mezerou mezi duanty jsou urychleny elektrickým polem. Výsledný pohyb probíhá po spirále až do průchodu výstupním otvorem v jednom z duantů, za kterým částice dopadají na vhodný terč. Cyklotrony se dodnes využívají pro náročné fyzikální experimenty a pro přípravu důležitých radionuklidů.

Vášim úkolem je dopočítat základní parametry cyklotronu, který má sloužit k urychlení deuteronů ( $m_0 = 3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $Z = 1$ ) na kinetickou energii



Obr. 3

$E_k = 15,0 \text{ MeV}$ . Magnetická indukce v komoře má velikost  $B = 1,40 \text{ T}$ . Vysokofrekvenční napětí duantů má amplitudu  $U_m = 160 \text{ kV}$ .

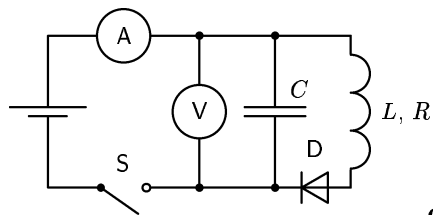
- Porovnejte klidovou a kinetickou energii deuteronů a ověřte, že v prvním přiblížení můžeme jejich hmotnost považovat za konstantní (rovnou  $m_0$ ). Za tohoto předpokladu řešte nerelativisticky úkoly b) až d).
- Princip cyklotronu vychází z poznatku, že frekvence, se kterou částice stálé hmotnosti obíhá po kruhové trajektorii kolmo k indukčním čarám v homogenním magnetickém poli, nezávisí na poloměru trajektorie. Stejnou frekvenci musí mít napětí přivedené na duanty. Určete její hodnotu pro náš cyklotron.
- Urychlení proběhne optimálním způsobem, když při každém průchodu částice mezerou mezi duanty je na nich právě napětí  $U_m$ . Kolik oběhů v takovém případě částice vykoná, než vyletí výstupním okénkem?
- Jakou rychlost deuterony získají a jaký bude poloměr poslední kruhové trajektorie?
- Relativistické zvětšení hmotnosti částice během urychlení omezuje použití cyklotronu do energií řádově desítek MeV. Určete relativisticky, s přihlédnutím ke zvětšení hmotnosti částice, rychlost vylétujících deuteronů, poloměr poslední kružnice a příslušnou frekvenci obíhání. Výsledky porovnejte s hodnotami získanými v b) a d).

## 6. Praktická úloha: Měření indukčnosti cívky

Úkoly:

- Sestavte obvod podle obr. 4. Použijte zdroje o napětí přibližně  $5 \text{ V}$  (např. plochou baterii), cívku 1200 závitů z rozkladného transformátoru, výkonovou diodu, stejnosměrný ampérmetr, stejnosměrný voltmetr, kvalitní kondenzátor o kapacitě alespoň  $8 \mu\text{F}$  (ne elektrolytický) a páčkový spínač. Měření proveďte:
  - na cívce s uzavřeným jádrem,
  - na cívce s rovným jádrem,
  - na cívce bez jádra.Kapacitu kondenzátoru změřte některou běžnou metodou (např. pomocí voltmetru a ampérmetru v obvodu střídavého proudu). Voltmetr by měl mít co největší odpor a rozsahy např.  $20 \text{ V}$  a  $200 \text{ V}$ .
- Při sepnutém spínači změřte proud  $I$  procházející cívkou a napětí  $U_1$  na kondenzátoru. Pak přepněte voltmetr na vyšší rozsah (používáte-li ručkový přístroj, změňte také jeho polaritu) a rozepněte spínač. Dojde k překmitnutí obvodu LC a na kondenzátoru se objeví velké napětí opačné polarity, které se bude zvolna zmenšovat v důsledku vybíjení kondenzátoru přes voltmetr. Změřte napětí  $U_2$  bezprostředně po rozepnutí spínače. Pro každý typ cívky měření několikrát zopakujte.
- Odvoďte vztah pro výpočet indukčnosti cívky z kapacity  $C$  kondenzátoru, napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a proudu  $I$ . Ztráty energie během překmitnutí na odporu cívky a na diodě zanedbejte.

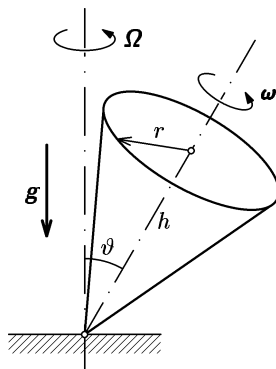
d) Vypočítejte indukčnosti cívky s uzavřeným jádrem, s rovným jádrem a bez jádra.



Obr. 4

7. Je dán homogenní rotační kužel hmotnosti  $m$  o poloměru základny  $r$  a výšce  $h$ .

- Vypočítejte vzdálenost těžiště kužele od jeho vrcholu. Příslušný vzorec odvoďte.
- Vypočítejte moment setrvačnosti kužele vzhledem k ose souměrnosti. Příslušný vzorec odvoďte.
- Kužel postavíme na špičku tak, že jeho osa souměrnosti bude odkloněna od svislice o ostrý úhel  $\vartheta$  a udělíme mu rotaci úhlovou rychlostí  $\omega$  okolo osy souměrnosti (obr. 5). Vypočítejte úhlovou rychlost  $\Omega$  precese užitím přibližné teorie (tj. zanedbáním příspěvků precesního pohybu k momentu hybnosti).



Obr. 5

Řešte obecně a pak numericky pro  $m = 3,00 \text{ kg}$ ,  $r = 0,100 \text{ m}$ ,  $h = 0,200 \text{ m}$ ,  $\omega = 300 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B

1. Ve vodorovné rovině je zvolena pravoúhlá souřadnicová soustava  $Oxy$ . Na ose  $x$  je bod  $A[a; 0]$ , ve kterém se nachází puška. Na ose  $y$  je bod  $B[0; b]$ . Z počátku soustavy souřadnic se směrem k bodu  $B$  pohybuje těleso stálou rychlostí  $v_1$ . V okamžiku, kdy těleso prochází bodem  $B$ , vystřelíme. O jaký úhel je třeba „předsadit“ pušku, aby těleso bylo zasaženo? Vzdálenost bodů  $A$ ,  $B$  je tak malá, že pohyb střely můžeme považovat za přímočarý s konstantní rychlostí  $v_2$ . Těleso považujte za hmotný bod. Řešte pro hodnoty  $a = 60$  m,  $b = 20$  m,  $v_1 = 30$  m·s<sup>-1</sup>,  $v_2 = 100$  m·s<sup>-1</sup>.

2. Cyklista, jehož hmotnost i s kolem je 95 kg, sjíždí bez šlapání po dlouhém svahu s klesáním 3,5 m na 100 m dráhy. Za bezvětří dosáhne rychlosti  $v_1 = 39$  km/h.

- Jaké rychlosti  $v_2$  by dosáhl, kdyby ve směru jízdy foukal vítr o rychlosti  $v_v = 5,0$  m·s<sup>-1</sup>?
- Jaké rychlosti  $v_3$  by dosáhl, kdyby stejně silný vítr foukal proti směru jízdy?
- S jakým výkonem by musel cyklista šlapat za bezvětří, aby při sjíždění po témž svahu dosáhl rychlosti  $v_4 = 54$  km/h?
- Jaké rychlosti  $v_5$  dosáhne, bude-li za bezvětří se stejným výkonem šlapat do téhož svahu, po kterém sjížděl v úlohách a) až c)?

Úlohy a, b, c) řešte nejprve obecně a potom pro dané hodnoty. V úloze d) postačí numerické řešení některou přibližnou metodou. Valivý odpor kol považujte za zanedbatelný v porovnání s odporem vzduchu,  $g = 9,8$  m·s<sup>-2</sup>.

3. Dusík o hmotnosti  $m$  má počáteční tlak  $p_1$  a teplotu  $t_1$ . Stlačíme jej na objem  $V_2$   
A) izotermicky, B) adiabaticky.

- Určete pro každý děj tlak a teplotu po stlačení.
- Nakreslete ve vhodném měřítku oba děje do téhož  $p$ - $V$  diagramu, přičemž každý graf určete alespoň 8 body.
- Vypočítejte pro oba děje práci spotřebovanou plynem během stlačení.

Řešte obecně a pro hodnoty:  $m = 5,00$  g,  $p_1 = 0,100$  MPa,  $t_1 = 20$  °C,  $V_2 = 1,00$  l,  $\kappa = 1,40$ ,  $A_r(N) = 14,0$ ,  $R_m = 8,314$  J·mol<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>.

4. a) Ocelová struna piana naladěná na základní tón  $a^1$  o frekvenci  $f = 440$  Hz má délku 40 cm. Určete normálové napětí struny. Víme, že fázová rychlost příčného vlnění na struně je určena vztahem

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}},$$

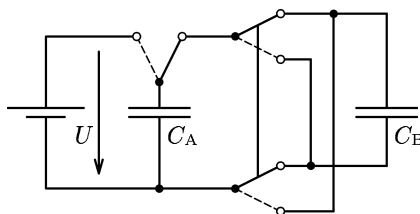
kde  $\sigma$  je normálové napětí struny a  $\varrho = 7900$  kg·m<sup>-3</sup> je hustota materiálu, ze kterého je struna vyrobena.

- b) Struny piana jsou napnuty na masivním litinovém rámu. Přeneseme-li piano ze studeného prostředí do vyhřáté místnosti, dojde k jeho rozladění, protože tenké struny se rychle zahřejí na teplotu místnosti, zatímco rám se bude ohřívat jen zvolna. Jak se změní frekvence základního tónu struny z úlohy a), zvýší-li se její

teplota o 10 K a teplota rámu se nezmění? Teplotní součinitel délkové roztažnosti oceli  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , Youngův modul pružnosti v tahu  $E = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .

5. Kondenzátor o kapacitě  $C_A$  nabijeme na napětí  $U$ , pak jej odpojíme od zdroje a připojíme ke spráženému přepínači, ke kterému je již připojen kondenzátor o kapacitě  $C_B$  (obr. 1).

- Určete napětí na kondenzátorech po připojení kondenzátoru o kapacitě  $C_A$  k přepínači.
- Jak velký náboj  $Q$  prošel vodiči po připojení kondenzátoru k přepínači?
- Jak velká energie se přitom přeměnila na vnitřní energii vodičů?
- Určete napětí  $U_1$  na kondenzátorech po jednom přepnutí přepínače.
- Na jakou hodnotu klesne napětí na kondenzátorech po  $n$  přepnutích?
- Po kolika přepnutích klesne napětí pod hodnotu  $U_k$ ?



Obr. 1

Řešte obecně a pro hodnoty:  $C_A = 200 \text{ nF}$ ,  $C_B = 300 \text{ nF}$ ,  $U = 30 \text{ V}$ ,  $U_k = 0,1 \text{ V}$ .

## 6. Praktická úloha: Elektronický teploměr s diodovým čidlem

*Teorie:*

Udržíme-li v křemíkové diodě zapojené v propustném směru malý stálý proud, při kterém se teplota přechodu PN neliší od teploty okolí, je napětí na diodě lineární klesající funkcí teploty, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$u_D = U_0 - \gamma t. \quad (1)$$

Lineární závislost napětí diody na teplotě se využívá v elektronických teploměrech zapojených podle obr. 2. První operační zesilovač pracuje jako zdroj stálého proudu pro diodu. Napětí voltmetru zapojeného na výstup druhého operačního zesilovače je přímo úměrné Celsiusově teplotě:

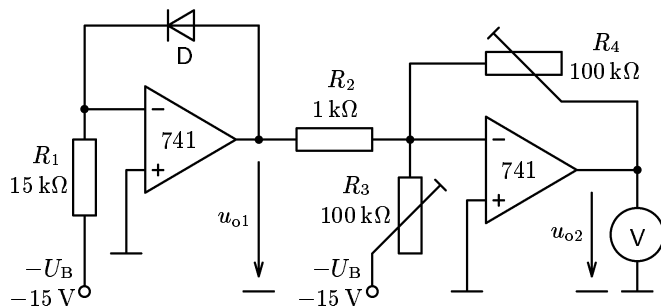
$$u_{o2} = Bt. \quad (2)$$

Toho se dosáhne vhodným seřízením odporů  $R_3$  (nastavení nuly) a  $R_4$  (nastavení citlivosti  $B$ ).

*Úkoly:*

- V obvodu sestaveném podle obr. 3 udržujte stálý proud 1 mA. Změřte napětí na diodě při teplotě  $0^\circ \text{C}$  (v termosce se směsí ledu a vody) a při teplotě okolo  $80^\circ \text{C}$  (v termosce s horkou vodou). Z naměřených hodnot určete veličiny  $U_0$  a  $\gamma$  ve vztahu (1).
- Vysvětlete činnost prvního operačního zesilovače v zapojení podle obr. 2.

- c) Vysvětlete činnost druhého operačního zesilovače v zapojení podle obr. 2. Jak musíme nastavit hodnoty odporů  $R_3$  a  $R_4$  aby platil vztah (2), přičemž  $B = 0,1 \text{ V/K}$ ? (Při teplotě  $0^\circ\text{C}$  je  $u_{o2} = 0 \text{ V}$  a při teplotě  $100^\circ\text{C}$  je  $u_{o2} = 10 \text{ V}$ .)
- d) Realizujte zapojení podle obr. 2 a proveďte nastavení odporu  $R_3$  při teplotě  $0^\circ\text{C}$  a odporu  $R_4$  při teplotě varu vody. Tu určete z barometrického tlaku pomocí MFCh tabulek. Teploměr potom vyzkoušejte porovnáním s jiným přesným teploměrem při teplotách okolo  $25^\circ\text{C}$ ,  $50^\circ\text{C}$  a  $75^\circ\text{C}$ . Z naměřených hodnot sestrojte kalibrační křivku znázorňující závislost  $u_{o2}$  na teplotě.

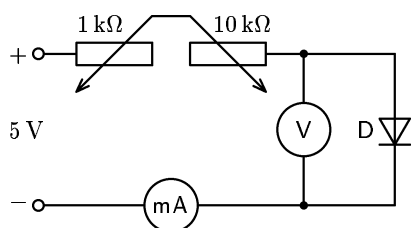


Obr. 2

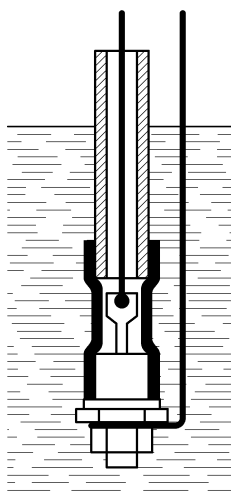
*Poznámky k provedení:*

Podle možností použijeme buď dvojitý operační zesilovač typu 1458 nebo dva samostatné OZ typu 741. Diodu zvolíme ve větším provedení s kovovým pouzdem (např. KY710 nebo KY701). Odizolování jednoho vývodu diody od lázně lze provést skleněnou trubičkou a kouskem průhledné hadičky pro přívod benzínu do karburátoru nebo kouskem silnější pryžové hadičky (obr. 4).

Pro snadnější nastavení odporů  $R_3$  a  $R_4$  by bylo vhodné použít kombinaci pevného rezistoru a trimru o menším odporu. (Při volbě součástek vycházejte z výsledků úlohy c.)



Obr. 3



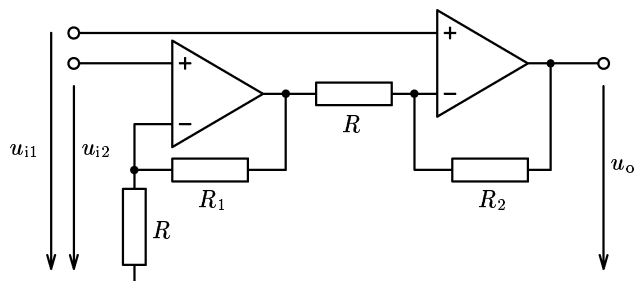
Obr. 4

7. Na obr. 5 je schéma rozdílového zesilovače s velkým vstupním odporem, ve kterém jsou použity dva operační zesilovače a dva stejné rezistory o odporu  $R$ . Určete odpory  $R_1$  a  $R_2$  zbývajících rezistorů tak, aby platilo

$$u_o = 10(u_{i2} - u_{i1}) .$$

Vstupní diferenciální napětí a vstupní proudy operačních zesilovačů jsou zanedbatelné (viz studijní text).

Řešte obecně a pro  $R = 10 \text{ k}\Omega$ .



Obr. 5

### Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

1. Nákladní automobil o hmotnosti  $m_1$  a osobní automobil o hmotnosti  $m_2$  jedou po přímé silnici proti sobě rychlostmi  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ , kde  $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ .

- Dojde k srážce, při níž zůstanou obě tělesa spojena. Určete rychlost soustavy  $\mathbf{u}$  po srážce vzhledem k vozovce. Určete změnu rychlosti nákladního automobilu  $\mathbf{u} - \mathbf{v}_1$  a osobního automobilu  $\mathbf{u} - \mathbf{v}_2$  a vypočtete úbytek celkové kinetické energie soustavy při srážce. Srážku modelujte nepružným středovým rázem.
- Dojde ke srážce, při níž nezůstanou vozidla spojena, ale pohybují se rychlostmi  $\mathbf{u}_1$  a  $\mathbf{u}_2$  vzhledem k vozovce. Byla zjištěna hodnota  $u_1$ . Určete směr a velikost rychlosti  $\mathbf{u}_2$  a vypočtete úbytek celkové kinetické energie soustavy. Děj modelujte přímým nedokonalé pružným středovým rázem.
- Porovnejte úbytky kinetické energie v případech a) a b) a výsledek diskutujte.

Řešte obecně, potom pro hodnoty:  $v_1 = v_2 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $m_1 = 15 \text{ t}$ ,  $m_2 = 1,5 \text{ t}$ ,  $u_1 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

2. Olověná kulička visí na tenkém vlákně.

- Určete úhel  $\alpha$ , o který je nutno napjaté vlákno s kuličkou vychýlit, aby při kývání celkové zrychlení kuličky v krajních polohách mělo stejnou velikost jako celkové zrychlení při průchodu rovnovážnou polohou.
- Určete úhel  $\beta$ , o který je nutno vlákno vychýlit, aby síla napínající vlákno při průchodu rovnovážnou polohou měla dvojnásobnou velikost síly napínající vlákno v krajních polohách.

3. Těleso o hmotnosti  $m$  uvolníme ve výšce  $h$  nad zemským povrchem. Země má poloměr  $R$  a hmotnost  $M$ . Zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie na zemském povrchu, je potenciální energie soustavy Země – těleso ve vzdálenosti  $h$  nad povrchem Země dána vztahem:

$$E_p = \kappa m M \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right).$$

- Určete rychlost dopadu tělesa na zemský povrch.
- Určete zrychlení  $a_1$  tělesa na začátku a zrychlení  $a_2$  na konci pohybu.
- Se stálým zrychlením  $a_1$  by těleso spadlo z výšky  $h$  za dobu  $t_1$ , se stálým zrychlením  $a_2$  za dobu  $t_2$ . Odhadněte skutečnou dobu pádu.

Řešte obecně, potom pro hodnoty:  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $h = 2,00 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Gravitační konstanta  $\kappa = 6,66 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . Odpor vzduchu a rotaci Země zanedbejte.

4. Čerpadlo čerpá vodu z řeky potrubím stálého průřezu o plošném obsahu  $S$  do koryta zavlažovací soustavy (obr. 1). Objemový průtok vody má stálou hodnotu  $Q_V$ . Sací otvor 1 potrubí je ve hloubce  $h_0$  pod hladinou řeky. Vstupní otvor 2 a výstupní otvor 3 čerpadla jsou ve stejné výšce  $h_1$  nad hladinou řeky. Výtokový otvor 4 potrubí je ve výšce  $h_2$  nad hladinou řeky. Okolní vzduch má atmosférický tlak  $p_a$ .

- a) Určete rychlost  $v$  proudící vody v potrubí.  
b) Jaký tlak by měla voda  
v sacím otvoru,  
ve vstupním otvoru čerpadla,  
ve výstupním otvoru čerpadla  
a ve výtokovém otvoru potrubí,  
kdyby se chovala jako ideální kapalina?  
*Návod:* Použijte „úplnou“ Bernoulliovu  
rovnici pro ideální kapaliny:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = konst.$$

- c) S jakým výkonem by v takovém případě čerpadlo pracovalo?
- d) Určete výkon  $P'$  a účinnost  $\eta$  čerpací jednotky, jestliže ve skutečnosti musí být mezi vstupním a výstupním otvorem čerpadla udržován tlakový rozdíl  $p_r$  (větší, než jaký vychází z výpočtu pro ideální kapalinu).
- e) Do jaké největší výšky  $h_{1\max}$  bychom mohli při daných hodnotách  $Q_V$  a  $S$  čerpadlo umístit, kdyby se voda chovala jako ideální kapalina?
- 

Řešte obecně, pak pro hodnoty:  $Q_V = 3,6 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $S = 5,0 \text{ cm}^2$ ,

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad \rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad h_0 = 0,6 \text{ m}, \quad h_1 = 1,5 \text{ m}, \quad h_2 = 6,2 \text{ m},$$

$$p_a = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad p_r = 120 \text{ kPa}.$$

5. Vzduch v atmosféře se při proudění vzhůru adiabaticky rozpíná a ochlazuje, při proudění dolů se adiabaticky stlačuje a otepluje. V důsledku těchto dějů i v uklidněné atmosféře zakryté mraky teplota vzduchu klesá s rostoucí výškou a vztah mezi atmosférickým tlakem a teplotou je stejný jako při adiabatickém ději.

Za těchto podmínek vypustíme balon stálého objemu  $V$  naplněný vodíkem. Tlak vodíku v balonu se během stoupání vyrovnává pojistným ventilem s tlakem okolní atmosféry. Na zemi byl naměřen atmosférický tlak  $p_1$  a teplota  $t_1$ . Ve výšce, do které chceme vystoupit, je atmosférický tlak  $p_2$ .

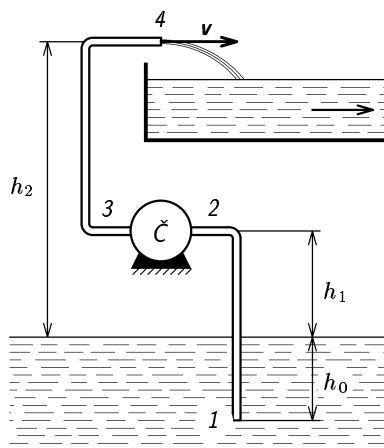
- Jaká je v této výšce teplota vzduchu?
- Kolik vodíku unikne během výstupu pojistným ventilem do atmosféry?
- Jak se změní nosnost balonu?

Řešte obecně a pro hodnoty:

$$p_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad t_1 = 20^\circ \text{C}, \quad p_2 = 0,83 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V = 500 \text{ m}^3.$$

Vzduch považujte za plyn s dvouatomovými molekulami, jehož molární hmotnost je  $M_m = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Poissonova konstanta vzduchu i vodíku má hodnotu  $\kappa = 1,40$ .

**Obr. 1**



## 6. Praktická úloha: Měření povrchového napětí

Úkol: Porovnejte povrchové napětí destilované vody a vodního roztoku saponátu.

- a) metodou kapilární elevace
- b) odtrhovací metodou
- c) kapkovou metodou

Měření proveďte při teplotě laboratoře. Povrchové napětí saponátového roztoku změřte při různých koncentracích (1:10 000, 1:1000, 1:100) a výsledky porovnejte. Naměřené povrchové napětí čisté vody porovnejte s hodnotou uvedenou v tabulkách.

Pomůcky:

2 skleněné kádinky, saponátový prostředek na nádobí (Jar, Lena apod.), destilovaná voda, kapilára, mikrometr, jehla, milimetrové měřítko, laboratorní váhy, závaží, stojan, skleněná trubička s nádobkou a kohoutem, závěsný kroužek (nebo kovový rámeček s nataženým drátkem), stoleček nad miskou vah.

Provedení úlohy:

- a) *Metoda kapilární elevace* je založena na porovnání tíhy  $G$  sloupce kapaliny vystouplé v kapiláře a síly  $F$  vyvolané povrchovým napětím, která tento sloupec udržuje v určité výšce nad okolní hladinou (obr. 2).

$$G = \pi r^2 h \rho g, \quad F = 2\pi r \sigma \cos \vartheta.$$

Jelikož úhel smáčení  $\vartheta < 10^\circ$ , můžeme psát

$$\cos \vartheta \doteq 1, \quad F \doteq 2\pi r \sigma.$$

Z rovnosti  $F = G$  plyne

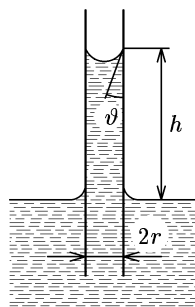
$$\sigma = \frac{h \rho g r}{2}.$$

Do kádinky naplněné zkoumanou kapalinou ponoříme svisle kapiláru, poněkud ji posuneme nahoru a změříme kapilární elevaci  $h$ . Průměr kapiláry  $2r$  zjistíme pomocí jehly, kterou zasuneme do kapiláry a v místě označeném při okraji kapiláry změříme mikrometrem.

- b) *Odtrhovací metoda* je založena na zjištění síly potřebné k odtržení povrchové blány ulpívající na kroužku (či rovném drátku) délky  $l$  vytahovaného z kapaliny, která jej smáčí (obr. 3). Kapalinová blána má dva povrchy a působí tedy silou

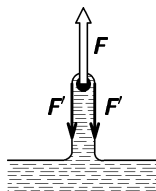
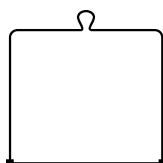
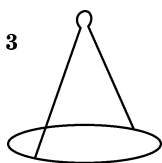
$$F = 2\sigma l,$$

ktou kterou můžeme určit pomocí laboratorních vah.



Obr. 2

Obr. 3



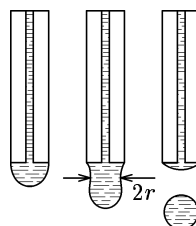
Nad misku vah umístíme můstek s kádinkou, ve které je zkoumaná kapalina, a na konec vahadla zavěsíme kroužek nebo rámeček s drátkem a vyvážíme jej. Hladinu kapaliny v kádince upravíme tak, aby se nacházela asi 2 mm pod vyváženým kroužkem. Vychýlíme-li vahadlo, hladina zachytí kroužek a rovnováha se poruší. Sílu povrchového napětí určíme tárováním. Na druhou misku vah přidáme lehký kalíšek a na něj sypeme zvolna drobná tělíska (táru), až dojde k odtržení kroužku od hladiny vody nebo k vytažení tenkého kapalinového prstence nad hladinu saponátového roztoku. (Jako tárovací tělíska se hodí např. jáhly nebo hořčičné semínko.) Zvážíme hmotnost  $m$  samotného kalíšku s tělísky a určíme povrchové napětí

$$\sigma = \frac{mg}{2l}.$$

- c) *Kapková metoda* měření povrchového napětí spočívá v určení poměru hmotností kapek dvou kapalin (měřené a srovnávací) při znalosti povrchového napětí srovnávací kapaliny. Ze silnostěnné skleněné trubičky necháme *velmi zvolna* odkapat stejný počet  $N$  kapek měřené i srovnávací kapaliny. Jejich celkové hmotnosti  $M_1$ ,  $M_2$  pak zvážíme. Tíhová síla působící na kapku v okamžiku odtržení od konce trubičky je rovna síle povrchového napětí:

$$\frac{M_1 g}{N} = 2\pi r \sigma_1 \quad \frac{M_2 g}{N} = 2\pi r \sigma_2,$$

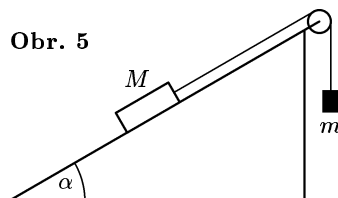
$$\sigma_1 = \frac{M_1}{M_2} \sigma_2.$$



Obr. 4

Jako srovnávací kapalinu zvolíme destilovanou vodu.

7. Na nakloněné rovině s úhlem sklonu  $\alpha$  je položen kvádř o hmotnosti  $M$ . Těleso s hmotností  $m$  je spojeno s kvádrem vláknem vedeným přes pevnou kladku (obr. 5). Součinitel smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je  $f$ , součinitel statického tření je  $f_0$ . Budeme vyšetřovat tyto případy:



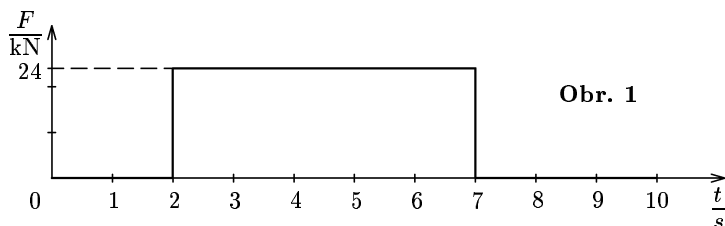
Obr. 5

- udělíme počáteční rychlost  $v_0$  tělesu o hmotnosti  $m$  ve směru svislém dolů,
- udělíme počáteční rychlost  $v_0$  kvádru ve směru dolů rovnoběžně s nakloněnou rovinou,
- ponecháme soustavu v klidu.

Pro všechny případy vypočítejte zrychlení soustavy a tahovou sílu vlákna a diskutujte, jak se bude soustava pohybovat.

### Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie D

1. Vlak metra může jet maximální rychlostí  $v = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  a zrychlovat nebo zpomalovat s maximálním zrychlením  $a = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vzdálenost mezi dvěma sousedními stanicemi je  $d = 960 \text{ m}$ .
- Určete nejkratší možnou dobu  $t_{\min}$  jízdy mezi stanicemi. Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty.
  - Určete nejkratší možnou dobu  $t'_{\min}$  jízdy mezi stanicemi, je-li za jinak stejných podmínek z provozních důvodů snížena maximální rychlost na  $v' = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .
  - Určete nejkratší možnou dobu  $t''_{\min}$  jízdy mezi stanicemi, jestliže za jinak stejných podmínek bude při rozjíždění a brzdění povoleno maximální zrychlení  $a' = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
  - Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti rychlosti na čase pro všechny 3 pohyby.
  - Pomocí sestavených grafů určete u každého pohybu dráhu uraženou v čase 10 s.
2. Automobil jedoucí rychlostí o velikosti  $v_0 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  začne po přímočaré trajektorii brzdít se stálým zrychlením o velikosti  $a = 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- Určete dráhu  $s_1$  uraženou v čase  $t_1 = 20 \text{ s}$  po začátku brzdění.
  - Sestrojte na milimetrový papír grafy závislosti rychlosti na čase a dráhy na čase v časovém intervalu od 0 s do 20 s.
  - Určete velikost okamžité rychlosti na konci dráhy  $s_2 = 50 \text{ m}$ .
  - Určete průměrnou rychlost v časovém intervalu  $t_3 = 5 \text{ s}$  až  $t_4 = 12 \text{ s}$ .
  - Určete časový interval velikosti  $\Delta t = 4 \text{ s}$ , během něhož urazí automobil během brzdění dráhový úsek  $\Delta s = 30 \text{ m}$ .
3. Tramvaj o hmotnosti  $m = 20\,000 \text{ kg}$  má na vodorovných kolejkách v nulovém čase nulovou počáteční dráhu a nulovou počáteční rychlost. Motor tramvaje působí tahovou silou, jejíž velikost v závislosti na čase udává graf:

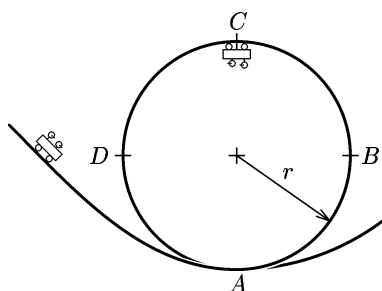


- Vypočítejte obsah plochy pod grafem a určete jeho fyzikální význam.
- Sestrojte graf závislosti okamžité rychlosti na čase.
- Sestrojte graf závislosti uražené dráhy na čase.
- Sestrojte graf závislosti okamžitého výkonu tramvaje na čase.
- Sestrojte graf závislosti okamžité síly na dráze. Odporovou sílu zanedbejte.

4. Honza hodil kámen vodorovným směrem z balkónu ve třetím patře budovy ve výšce  $h_0 = 10$  m nad vodorovným terénem. Počáteční rychlost kamene měla velikost  $v_0 = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Jakou rychlostí  $v'_0$  musí hodit kámen Jirka z téhož místa, aby kámen dopadl
    - do dvakrát větší vzdálenosti od domu,
    - za dvakrát delší dobu,
    - dvojnásobnou rychlostí?
  - Z jaké výšky  $h$  by Jirka musel hodit kámen vodorovným směrem rychlostí o velikosti  $v_0$ , aby kámen dopadl
    - do dvakrát větší vzdálenosti od domu,
    - za dvakrát delší dobu,
    - dvojnásobnou rychlostí?

Odpor vzduchu zanedbejte. Tíhové zrychlení je  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

5. Jeden úsek horské dráhy v zábavním parku má tvar vertikální kružnice o poloměru  $r$  (obr. 2). Vozík tento úsek projíždí setrvačností. Uvažujme ideální případ, kdy tření v ložiskách, valivý odpor kol a odpor vzduchu můžeme zanedbat.
- Jakou minimální rychlostí se musí pohybovat vozík v bodě  $C$ , aby pasažér nevypadl, i když nebude připoután k sedadlu?
  - Jakou rychlost musí mít vozík v bodě  $A$ , aby byla splněna podmínka a)?
  - V kterém bodě kružnicové trajektorie se vozík pohybuje s největším dostředivým zrychlením? Určete velikost a směr tohoto zrychlení.
  - V kterém bodě kružnicové trajektorie se vozík pohybuje s maximálním tečným zrychlením? Určete jeho velikost a směr tohoto zrychlení.
  - Určete velikost a směr celkového zrychlení v bodech  $B$  a  $D$ .



Obr. 2

Řešte obecně a pro hodnoty:  $r = 7$  m,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Rozměry vozíku zanedbejte.

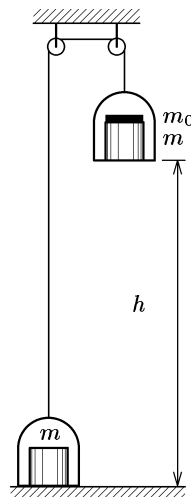
## 6. Praktická úloha: Studium dynamické soustavy

**Teorie:** Dynamickou soustavu tvoří dvojice malých kladek s vláknem, na jehož koncích jsou zavěšena dvě tělesa, každé o hmotnosti  $m$ . Po umístění přivažku o hmotnosti  $m_0$  na jedno z těles způsobí stálá tíhová síla tohoto přivažku rovnoměrně zrychlený pohyb soustavy (obr. 3). Pro velikost zrychlení platí při zanedbání hmotnosti kladek:

$$a_1 = \frac{m_0}{2m + m_0} g. \quad (3)$$

Toto zrychlení lze též určit experimentálně ze změřené dráhy  $h$  a ze změřené doby pohybu  $t$ :

$$a_2 = \frac{2h}{t^2}. \quad (4)$$



Obr. 3

**Úkoly:**

- Odvoďte vztahy (1) a (2).
- Sestavte soustavu podle předchozího popisu. Na konce vlákna připevněte misky, na které budete klást závaží. Dráhu  $h$  volte aspoň 1 m, lépe ještě delší.
- Změřte dráhu  $h$ . Měření zrychlení provádějte pro 2 různé hmotnosti  $m$  a u každé pro 2 různé hmotnosti  $m_0$  přivažku. U každé sestavy proveďte 6 měření času, polovinu s přivažkem na levé misce, polovinu s přivažkem na pravé misce, a vypočítejte jeho aritmetický průměr. Pomocí vztahů (1) a (2) vypočítejte zrychlení  $a_1$ ,  $a_2$  a výsledky měření запиšte do tabulky:

| $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , $h = \text{ m}$ |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                      |                                            |                                            |                   |  |
|------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------|--|
| $\frac{m}{\text{g}}$                                       | $\frac{m_0}{\text{g}}$ | $\frac{t_1}{\text{s}}$ | $\frac{t_2}{\text{s}}$ | $\frac{t_3}{\text{s}}$ | $\frac{t_4}{\text{s}}$ | $\frac{t_5}{\text{s}}$ | $\frac{t_6}{\text{s}}$ | $\frac{t}{\text{s}}$ | $\frac{a_1}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ | $\frac{a_2}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ | $\frac{a_2}{a_1}$ |  |
|                                                            |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                      |                                            |                                            |                   |  |
|                                                            |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                      |                                            |                                            |                   |  |
|                                                            |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                      |                                            |                                            |                   |  |
|                                                            |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                      |                                            |                                            |                   |  |

- Zhodnoťte výsledek v posledním sloupci tabulky. Které zrychlení více odpovídá skutečnému zrychlení soustavy?
- Jaký vliv na výsledek měření může mít tření? Jaký vliv na výsledek měření může mít hmotnost kladek? Vysvětlete a dejte do souvislosti s posledním sloupcem tabulky.
- Provedeme korekci výsledků změřením třecí síly. Na misku při dané hmotnosti  $m$  vložte takový přivažek  $m'_0$ , při kterém se soustava po uvedení do pohybu vnější silou bude pohybovat setrvačností rovnoměrným pohybem. Třecí síla má tedy

velikost  $F_t = m'_0 g$ , a vzorec (1) můžeme nahradit vzorcem

$$a'_1 = \frac{m_0 - m'_0}{2m + m_0} g, \quad (5)$$

který určuje zrychlení soustavy po korekci. Nové výsledky zapište do tabulky:

| $\frac{m}{g}$ | $\frac{m_0}{g}$ | $\frac{m'_0}{g}$ | $\frac{a'_1}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ | $\frac{a_2}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ | $\frac{a_2}{a'_1}$ |
|---------------|-----------------|------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------|
|               |                 |                  |                                             |                                            |                    |
|               |                 |                  |                                             |                                            |                    |
|               |                 |                  |                                             |                                            |                    |
|               |                 |                  |                                             |                                            |                    |

g) Porovnejte hodnoty  $a_2/a_1$  a  $a_2/a'_1$  a formulujte celkový závěr měření.

7. Na kulečnickovém stole leží dvě koule A, B o stejném poloměru  $r = 30$  mm. Dva mantinely, které při hře využijeme, představují dvě souřadnicové osy  $x$  a  $y$ . Počáteční souřadnice středů koulí v milimetrech jsou  $A \equiv [400; 600]$  a  $B \equiv [300; 150]$ . Koule A má po dvou odrazech od mantinelů zasáhnout kouli B.

- Kterým směrem musíme kouli A vyslat, aby došlo k centrálnímu rázu? Jak dlouhá bude v tomto případě trajektorie bodu A do místa srážky?
- O jaký úhel se může počáteční směr koule A odchýlit od směru určeného v úkolu a), má-li se koule B alespoň dotknout?

Obě úlohy řešte graficky i početně. Předpokládejte, že odrazy koule od mantinelů jsou dokonale pružné a tření mezi koulí a mantinelem je zanedbatelné.

V druhém kole lze očekávat úlohy z témat: Kinematika

Dynamika

Mechanická práce a energie

Pohyby v gravitačním poli

Téma studijního textu