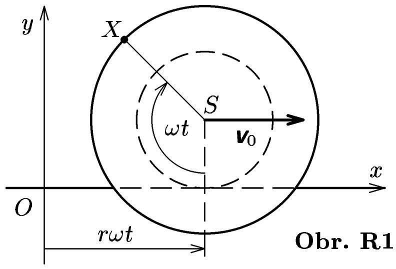
Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: M. Krebs(1), D. Kluvanec (4), Z. Polák(2), P.Šedivý(3,6), B. Vybíral (5,7)

1. a) Pohyb válce s kolem je složen z rovnoměrného posuvného pohybu a z rovnoměrného otáčivého pohybu s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v_0}{r}$. Za dobu t se osa válce posune do vzdálenosti $r\omega t = v_0 t$ a válec se pootočí o úhel ωt. Souřadnice bodu X budou podle obr. R1 určeny vztahy:

$$x = r\omega t - R\sin\omega t\,, \quad y = r - R\cos\omega t\,. \quad (1)$$



Obr. R1

2 body

b) Derivací vztahů (1) dostaneme:

$$v_x = r\omega - R\omega\cos\omega t\,, \qquad v_y = R\omega\sin\omega t\,. \tag{2}$$

Velikost rychlosti bodu X závisí na čase podle vztahu

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r\omega - R\omega\cos\omega t)^2 + (R\omega\sin\omega t)^2} =$$
$$= \omega\sqrt{(R^2 + r^2) - 2Rr\cos\omega t}\,. \tag{3}$$

V nejnižších bodech trajektorie, kde $\cos\omega t = 1$, je rychlost bodu X nejmenší:

$$v_{\min} = \omega(R - r) = v_0\frac{R - r}{r} = 3{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \tag{4}$$

V nejvyšších bodech trajektorie, kde $\cos\omega t = -1$, je rychlost bodu X největší:

$$v_{\max} = \omega(R + r) = v_0\frac{R + r}{r} = 13{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \tag{5}$$

2 body

c) Bod X se pohybuje dopředu, jestliže

$$v_x > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t < \frac{r}{R} = 0{,}6\,.$$

V základním intervalu to platí pro $53{,}13° < \omega t < 306{,}87°$. Doby pohybu vpřed a vzad jsou ve stejném poměru jako příslušné úhly otočení:

$$t_{\text{vpřed}} : t_{\text{vzad}} = 253{,}74 : 106{,}26 \doteq 5 : 2\,.$$

1 bod

d) Souřadnice vektoru zrychlení dostaneme derivováním vztahů (2):

$$a_x = R\omega^2 \sin \omega t\,, \qquad a_y = R\omega^2 \cos \omega t\,. \tag{6}$$

Zrychlení má konstantní velikost $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$ a v každém okamžiku má opačný směr než vektor $\overrightarrow{SX}$, to znamená, že vždy míří do středu kola.

1 bod

e) V nejnižších a nejvyšších bodech trajektorie je zrychlení kolmé k rychlosti. Mění proto jen směr vektoru rychlosti a platí vztah pro výpočet dostředivého zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{v^2}{a}\,, \tag{7}$$

kde ϱ je poloměr oskulační kružnice. Pro nejnižší body trajektorie dosazením z (4) dostaneme:

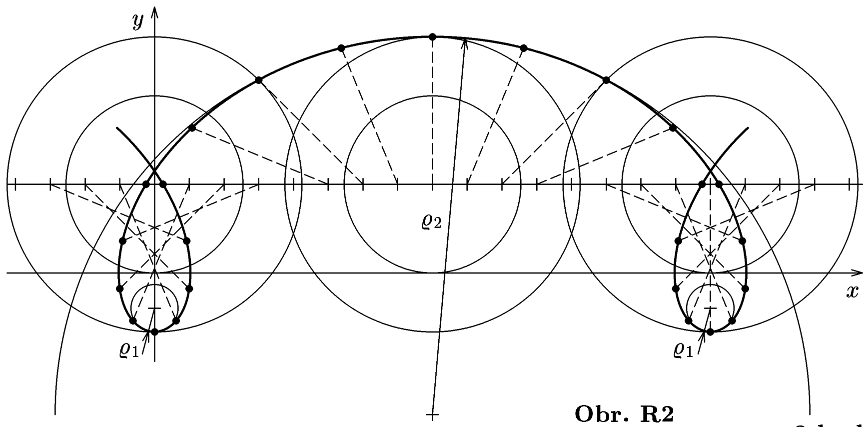
$$\varrho_1 = \frac{v_{\min}^2}{a} = \frac{\omega^2 (R-r)^2}{\omega^2 R} = \frac{(R-r)^2}{R} = 0{,}08\ \mathrm{m}\,.$$

Pro nejvyšší body trajektorie dosazením z (5) dostaneme:

$$\varrho_2 = \frac{v_{\max}^2}{a} = \frac{\omega^2 (R+r)^2}{\omega^2 R} = \frac{(R+r)^2}{R} = 1{,}28\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

f) Při sestrojování jednotlivých bodů trajektorie vycházíme ze stejného principu jako v úloze a). Oblouky oskulačních kružnic mohou trajektorii nahradit s dostatečnou přesností v okolí nejvyšších a nejnižších bodů (obr. R2).



Obr. R2

2 body

2. a) Počátek vztažné soustavy zvolíme v místě, odkud házíme. Pohyb kamene je popsán parametrickými rovnicemi:

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Vyloučením času dostaneme neparametrickou rovnici trajektorie:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} x^2\,. \tag{8}$$

Je to rovnice paraboly procházející počátkem vztažné soustavy. Bod dopadu má souřadnice

$$y = 0\,, \qquad x = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Souřadnice vrcholu jsou:

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = h\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\,,$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = h\cdot\sin^2\alpha\,,$$

kde h je výška vrhu pro $\alpha = 90°$ (svislý vrh vzhůru s počáteční rychlostí v_0). Tyto vztahy budeme chápat jako parametrické rovnice křivky, kde parametrem je úhel α. Umocněním první rovnice a dosazením z druhé rovnice parametr odstraníme:

$$x^2 = 4h^2\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = 4y(h-y)$$

a po úpravě dostaneme:

$$x^2 + 4y^2 - 4hy + h^2 = h^2\,, \qquad \frac{x^2}{h^2} + \frac{4\left(y-\frac{h}{2}\right)^2}{h^2} = 1\,.$$

To je rovnice elipsy se středem $S \equiv \left[0, \frac{h}{2}\right]$, s hlavní poloosou o velikosti h ve směru osy x a s vedlejší poloosou o velikosti $\frac{h}{2}$ ve směru osy y.

3 body

b) Každým bodem uvnitř oblasti zasažitelné kamenem, jehož počáteční rychlost má velikost v_0, procházejí dvě parabolické trajektorie. Vztah (8) můžeme upravit na tvar

$$y = \mathrm{tg}\,\alpha\cdot x - \frac{g}{2v_0^2}(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)\cdot x^2\,,$$

$$\frac{gx^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}^2\,\alpha - x\,\mathrm{tg}\,\alpha + y + \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0\,.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici s neznámou $\mathrm{tg}\,\alpha$ a parametry $x,\ y,\ v_0,\ g$. Jejím řešením nalezneme příslušné elevační úhly.

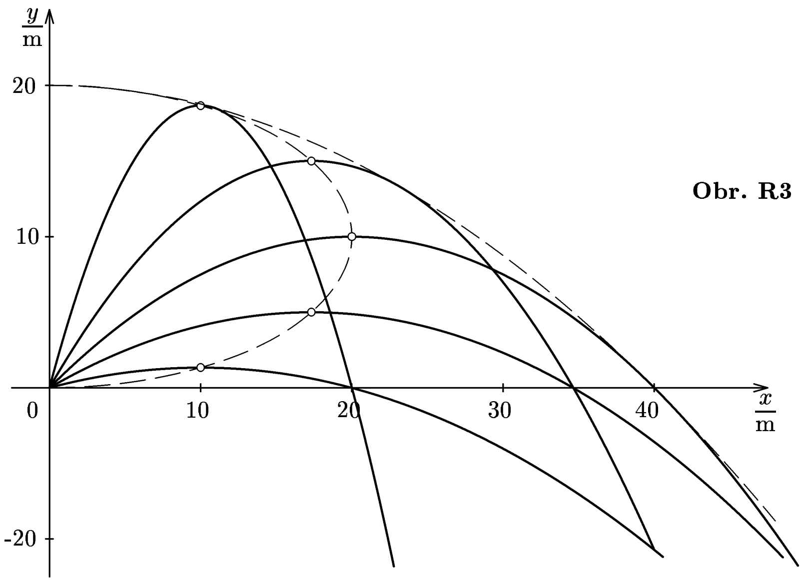
Bodem, který leží na hranici zasažitelné oblasti, prochází jen jediná trajektorie. Pro ně je diskriminant rovnice nulový:

$$D = x^2 - \frac{2gx^2}{v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0\,, \quad \text{po úpravě} \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2\,.$$

Hranici zasažitelné oblasti tvoří parabola s vrcholem $V \equiv \left[0, \frac{v_0^2}{2g}\right] = [0, h]$, která protíná osu x v bodě $D = \left[\frac{v_0^2}{g}, 0\right] = [2h, 0]$.

4 body

c)



Obr. R3

3 body

3. a) Paprsky přicházející do oka pozorovatele jsou prakticky rovnoběžné s rovinou určenou středem oka a osou trubice. Vzdálenost y paprsku, který zobrazuje obrys vnitřní části trubice, od této roviny určíme podle obr. R4:

$$y = R \sin \alpha = Rn \sin \beta = Rn \frac{r}{R} = nr\,.$$

Zdánlivý průměr vnitřní části trubice je $d' = 2y = nd$. Pro daný index lomu $d' = 1{,}52d$. Řešení má ovšem smysl, pokud $nr < R$. Není-li tato podmínka splněna, rozhraní mezi kapalinou a sklem nevidíme a trubice je zbarvena až po vnější obrys.

4 body

b) Okraj čáry je ve vzdálenosti h (polovina tloušťky čáry) od roviny určené středem oka a osou tyče. Paprsek zobrazující okraj čáry vystupuje z tyče ve vzdálenosti h' od této roviny (obr. R5). Platí:

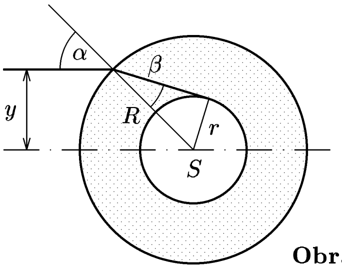
$$h' = R \sin \alpha\,, \qquad h = R \sin \varphi\,, \qquad \varphi = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\beta) = 2\beta - \alpha\,.$$

Je-li tloušťka čáry malá, jsou malé i úhly α, β a můžeme psát:

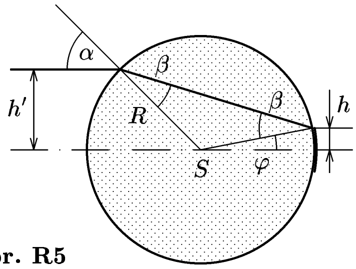
$$\beta \doteq \frac{\alpha}{n}\,, \qquad \sin\varphi \doteq \varphi \doteq \alpha\left(\frac{2}{n}-1\right), \qquad h \doteq R\alpha\frac{2-n}{n}\,, \qquad h' \doteq R\alpha \doteq h\frac{n}{2-n}\,.$$

Zdánlivá tloušťka čáry je $2h'$. Pro daný index lomu $2h' \doteq 3{,}2 \cdot 2h$.

6 bodů



Obr. R4



Obr. R5

4. a) Mřížka sodíku je prostorově centrovaná. Na jednu elementární buňku připadají $N = 2$ atomy. Z úhlopříčného řezu elementární buňky (obr. R6) odvodíme

$$a\sqrt{3} = 4r\,, \qquad a = r\frac{4}{\sqrt{3}}\,, \qquad V_0 = \frac{64}{\sqrt{27}}\cdot r^3\,.$$

Koeficient zaplnění je

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{2\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{64}{\sqrt{27}}\cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \doteq 0{,}680\,.$$

Mřížka stříbra je plošně centrovaná. Na jednu elementární buňku připadají $N = 4$ atomy. Z obr. R7 odvodíme

$$a\sqrt{2} = 4r\,, \qquad a = r\frac{4}{\sqrt{2}}\,, \qquad V_0 = \frac{64}{\sqrt{8}}\cdot r^3\,.$$

Koeficient zaplnění je

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{4\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{64}{\sqrt{8}}\cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \doteq 0{,}740\,.$$

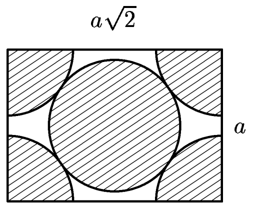
Na jednu hexagonální elementární buňku hořčíku připadá $N = 6$ atomů. Středy sousedních atomů leží ve vrcholech pravidelného čtyřstěnu (obr. R8). Z toho odvodíme:

$$a = 2r\,, \qquad c = 4r\sqrt{\frac{2}{3}}\,, \qquad V_0 = 24\sqrt{2}\cdot r^3\,.$$

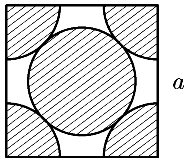
Koeficient zaplnění je

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{6\frac{4}{3}\pi r^3}{24\sqrt{2}\cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \doteq 0{,}740\,,$$

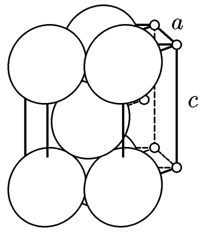
což je stejná hodnota jako u stříbra a větší než u sodíku. **5 bodů**



Obr. R6



Obr. R7



Obr. R8

b) Průměrná hustota látky v krystalu je $\varrho = \dfrac{NA_\mathrm{r}m_\mathrm{u}}{V_0}$. Z toho určíme objem elementární buňky:

$$V_0 = \frac{NA_\mathrm{r}m_\mathrm{u}}{\varrho}\,.$$

Pro sodík dostaneme:

$$R_\mathrm{Na}^3 = \frac{3\sqrt{3}}{64}\cdot\frac{2\cdot 22{,}99\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}}{971}\ \mathrm{m}^3\,,\qquad R_\mathrm{Na} = 1{,}85\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Pro stříbro dostaneme:

$$R_\mathrm{Ag}^3 = \frac{\sqrt{2}}{32}\cdot\frac{4\cdot 107{,}87\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}}{10\,500}\ \mathrm{m}^3\,,\qquad R_\mathrm{Ag} = 1{,}44\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Pro hořčík dostaneme:

$$R_\mathrm{Mg}^3 = \frac{1}{24\sqrt{2}}\cdot\frac{6\cdot 24{,}305\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}}{1\,740}\ \mathrm{m}^3\,,\qquad R_\mathrm{Mg} = 1{,}60\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

5 bodů

5. a) Urychlením získal deuteron kinetickou energii $E_\mathrm{k} = 15\ \mathrm{MeV} = 2{,}4\cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$. Klidová energie deuteronu je $E_0 = m_0c^2 = 3{,}0\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J} = 1880\ \mathrm{MeV} \doteq 125E_\mathrm{k}$. Hmotnost urychleného deuteronu je $m = m_0 + \dfrac{E_\mathrm{k}}{c^2} \doteq 1{,}008m_0$. Během urychlení se zvětší o 0,8 %, což můžeme při přibližném výpočtu zanedbat.

1 bod

b) Zakřivení trajektorie je způsobeno dostředivou magnetickou silou. Pro částici o náboji e a hmotnosti m_0 platí:

$$Bev = \frac{m_0v^2}{r}\,,\qquad \frac{v}{r} = 2\pi f_0 = \frac{Be}{m_0}\,,\qquad f_0 = \frac{Be}{2\pi m_0} = 1{,}07\cdot 10^7\ \mathrm{Hz}\,.$$

2 body

c) Během jednoho oběhu je deuteron urychlen dvakrát. V optimálním případě je počet oběhů

$$N = \frac{E_k}{2U_\mathrm{m}e} = \frac{15\ \mathrm{MeV}}{0{,}32\ \mathrm{MeV}} \doteq 47\,.$$

1 bod

d) Podle představ klasické fyziky:

$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m_0}} = 3{,}79 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,, \qquad r_0 = \frac{m_0 v}{Be} = \frac{\sqrt{2E_\mathrm{k} m_0}}{Be} = 0{,}565\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

e) Relativistickým výpočtem dostaneme pro konečnou rychlost deuteronu, poloměr poslední kružnice a konečnou frekvenci obíhání:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m_0 + \frac{E_\mathrm{k}}{c^2}}\right)^2} = 3{,}77 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,,$$

$$r = \frac{mv}{Be} = 0{,}566\ \mathrm{m} \qquad f = \frac{Be}{2\pi m} = \frac{Be}{2\pi m_0}\frac{m_0}{m} = f_0 \frac{m_0}{m} = 0{,}992 f_0 = 1{,}06 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}.$$

Hodnoty získané relativistickým výpočtem se téměř neliší od výsledků získaných v b) a d). Nejzávažnější je postupný pokles frekvence obíhání až o 0,8 %. Optimální průběh urychlení předpokládaný v úloze c) se proto nedá realizovat a skutečný počet oběhů bude vždy větší než 47.

4 body

6. Energie kondenzátoru po překmitnutí obvodu je téměř rovna součtu energie kondenzátoru a cívky před rozepnutím spínače:

$$\frac{1}{2}CU_2^2 \doteq \frac{1}{2}CU_1^2 + \frac{1}{2}LI^2\,, \qquad L = \frac{C\left(U_2^2 - U_1^2\right)}{I^2}\,.$$

Indukčnost cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s uzavřeným jádrem je přibližně 1,6 H, s rovným jádrem 0,2 H.

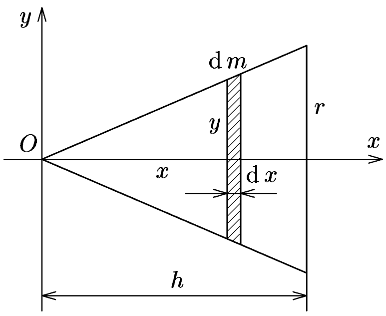
7. a) Pro výpočet polohy těžiště umístíme kužel podle obr. R9 a řezy rovnoběžnými s podstavou jej rozdělíme na tenké kruhové vrstvy o poloměru y a tloušťce dx. Meridián kužele je popsán funkcí

$$y = \frac{r}{h}x\,, \qquad x \in [0, h]\,.$$

Souřadnici těžiště určíme integrací:

$$\mathrm{d}m = \varrho\pi y^2\,\mathrm{d}x\,, \qquad m = \varrho\frac{1}{3}\pi r^2 h\,,$$

$$x_T = \frac{1}{m}\int_0^m x\,\mathrm{d}m\,.$$



Obr. R9

Po dosazení:

$$x_T = \frac{\int\limits_0^h \varrho\pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 \mathrm{d}x\cdot x}{\varrho\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{h^3}\int\limits_0^h x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}h = 0{,}150\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

b) Ze stejného obrázku vyjdeme i při určení momentu setrvačnosti. Platí:

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\cdot y^2 = \frac{1}{2}\varrho\pi y^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho\pi\left(\frac{r}{h}\right)^4 x^4\,\mathrm{d}x\,,$$

$$J = \frac{\varrho\pi r^4}{2h^4}\int\limits_0^h x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\varrho\pi r^4 h = \frac{3}{10}mr^2 = 9{,}00\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,.$$

3 body

c) Koncový bod vektoru momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ obíhá po kružnici o poloměru $L\sin\vartheta$. Platí:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t\,,\qquad L\sin\vartheta\,\Omega\,\mathrm{d}t = mg\cdot\frac{3}{4}h\sin\vartheta\,\mathrm{d}t\,,\qquad L = \frac{3}{10}mr^2\omega\,,$$

$$\Omega = \frac{5hg}{2\omega r^2} = 1{,}23\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.$$

4 body

Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh:V. Vícha(1,3,4,5), P. Šedivý (2,6,7)

1. Situaci znázorňuje obr. R1; čas měříme od okamžiku výstřelu. Pro pohyb tělesa platí:

$$x = 0\,, \qquad y = b + v_1 t\,.$$

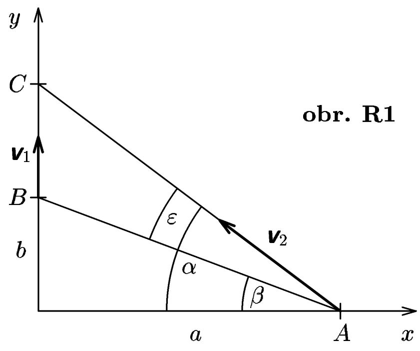
Pro pohyb střely platí:

$$x = a - v_2 t \cos\alpha\,, \qquad y = v_2 t \sin\alpha\,.$$

V okamžiku zásahu jsou souřadnice tělesa i střely stejné:

$$\begin{aligned} a - v_2 t \cos\alpha &= 0 \\ v_2 t \sin\alpha &= b + v_1 t \end{aligned}$$

5 bodů



obr. R1

Vyloučením času a další úpravou dostaneme kvadratickou rovnici, ve které jako neznámá bude vystupovat $\sin\alpha$:

$$b v_2 \cos\alpha = a(v_2 \sin\alpha - v_1)\,,$$

$$(b^2 v_2^2 + a^2 v_2^2)\sin^2\alpha - 2a^2 v_1 v_2 \sin\alpha + a^2 v_1^2 - b^2 v_2^2 = 0\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{a^2 v_1 \pm b\sqrt{b^2 v_2^2 + a^2 v_2^2 - a^2 v_1^2}}{v_2(a^2 + b^2)}\,.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen $\sin\alpha = 0{,}57315\,, \quad \alpha = 34°58'$. Současně

$$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0{,}31623\,, \quad \beta = 18°26'\,.$$

Pušku tedy musíme „předsadit“ o úhel

$$\varepsilon = \alpha - \beta \doteq 16°30'\,.$$

5 bodů

2. a, b) Na cyklistu, který jede bez šlapání, má dynamický účinek pohybová složka tíhové síly a odpor vzduchu, pro který platí Newtonův vztah $F_\mathrm{o} = 0{,}5 \cdot CS\varrho v^2$, kde v je relativní rychlost tělesa vůči vzduchu. Po dosažení mezní rychlosti se účinky obou sil ruší. Za bezvětří

$$mg\sin\alpha = 0{,}5 \cdot CS\varrho v_1^2 = K v_1^2\,.$$

$K = \dfrac{mg\sin\alpha}{v_1^2}$ je konstanta úměrnosti v Newtonově vztahu daná hustotou vzduchu, rozměry a tvarem cyklisty. Pro dané hodnoty $K = 0{,}278\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$. Při jízdě po větru

$$mg\sin\alpha = K(v_2 - v_\mathrm{v})^2\,,$$

při jízdě proti větru

$$mg\sin\alpha = K(v_3 + v_\mathrm{v})^2\,.$$

Porovnáním dostáváme

$$v_2 = v_1 + v_\mathrm{v}\,, \qquad v_3 = v_1 - v_\mathrm{v}\,.$$

Pro dané hodnoty $v_2 = 15{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 57\ \mathrm{km/h}$, $v_3 = 5{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 21\ \mathrm{km/h}$.

3 body

c) Při šlapání s kopce platí při rovnoměrném pohybu rychlostí v_4

$$mg\sin\alpha + F_1 = Kv_4^2 = \frac{mg\sin\alpha}{v_1^2}v_4^2\,, \qquad F_1 = mg\sin\alpha\left(\frac{v_4^2}{v_1^2} - 1\right)\,,$$

kde F_1 je velikost síly, kterou cyklista vyvinul šlapáním; pro dané hodnoty $F_1 = 29{,}9\ \mathrm{N}$. Cyklista šlape s výkonem

$$P = F_1 v_4 = Kv_4^3 - v_4 mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_4^3}{v_1^2} - v_4\right)\,.$$

Pro dané hodnoty $P = 449\ \mathrm{W} \doteq 450\ \mathrm{W}$. **3 body**

d) Při rovnoměrné jízdě do kopce rychlostí v_5 musí cyklista vyvinout sílu o velikosti

$$F_2 = Kv_5^2 + mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_5^2}{v_1^2} + 1\right)$$

a pro jeho výkon platí

$$P = F_2 v_5 = Kv_5^3 + v_5 mg\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{v_5^3}{v_1^2} + v_5\right)\,.$$

Dostáváme rovnici třetího stupně s neznámou v_5. Po dosazení číselných hodnot a numerickém řešení dostaneme $v_5 = 8{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 31\ \mathrm{km/h}$.

4 body

3. a) Dusík je plyn s dvouatomovými molekulami. Proto $M_\mathrm{m} = 28\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$. Plyn měl počáteční objem

$$V_1 = \frac{mR_\mathrm{m}T_1}{p_1 M_\mathrm{m}} = 4{,}35\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3} = 4{,}35\ \mathrm{l}\,.$$

Izotermický děj:

$$T_2 = T_1 = 293\ \mathrm{K}\,, \quad p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = 0{,}435\ \mathrm{MPa}\,,$$

Adiabatický děj:

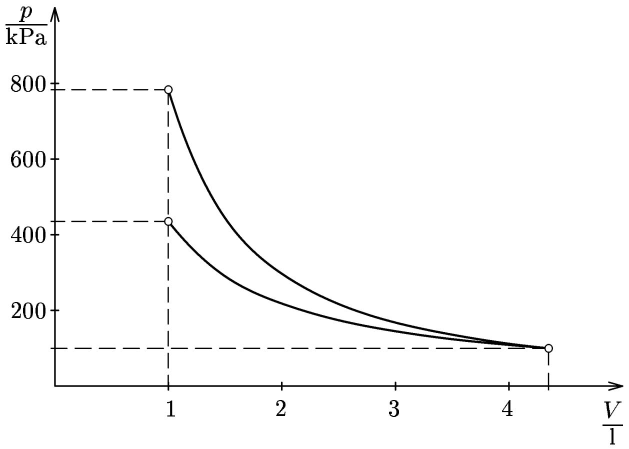
$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = 0{,}784\ \mathrm{MPa}\,, \quad T_2 = \frac{T_1 p_2 V_2}{p_1 V_1} = 528\ \mathrm{K}\,, \quad t_2 = 255\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

3 body

b)

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Izotermický děj:} & \{p\} = & \dfrac{435}{\{V\}} \\[2ex] \text{Adiabatický děj:} & \{p\} = & \dfrac{784}{\{V\}^{1,4}} \end{array}\right\} \quad V \ldots \text{v litrech}, \quad p \text{ v kPa}$$

	$\frac{V}{\mathrm{l}}$	4,35	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00	1,50	1,00
izot.	$\frac{p}{\mathrm{kPa}}$	100	109	124	145	174	218	290	435
adiab.	$\frac{p}{\mathrm{kPa}}$	100	113	136	168	217	297	444	784



4 body

c) Při izotermickém stlačení plyn spotřeboval práci

$$W_1 = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = 640\ \mathrm{J}$$

Při adiabatickém ději plyn spotřeboval práci

$$W_2 = \Delta U = 2{,}5 n R_\mathrm{m}(T_2 - T_1) = 2{,}5 \frac{m R_\mathrm{m}}{M_\mathrm{m}}(T_2 - T_1) = 871\ \mathrm{J}$$

Obě práce můžeme také číselně určit z obsahů ploch omezených grafy z úkolu b).

3 body

4. a) Frekvence základního tónu struny je vyjádřena vztahem

$$f_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}\,.$$

Úpravou dostaneme $\sigma = 4 l^2 f_1^2 \varrho = 979\ \mathrm{MPa}$. **3 body**

b) Při napínání struny dojde k jejímu prodloužení podle Hookova zákona

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l} E\,.$$

Zahřátím se struna délky l prodlouží o $\Delta_t l = l\alpha\Delta t$ a o tuto hodnotu se tedy zmenší deformace tahem. Napětí struny se zmenší na

$$\sigma' = \frac{\Delta l - \Delta_t l}{l} E = \sigma - E\alpha\Delta t = 979\ \mathrm{MPa} - 26\ \mathrm{MPa} = 953\ \mathrm{MPa}$$

a frekvence struny poklesne na $f_1' = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\sigma'}{\varrho}} = 434\ \mathrm{Hz}$. **7 bodů**

5. a) Počáteční náboj na kondenzátoru A bude $Q = C_\mathrm{A}U$. Po připojení k přepínači přejde část náboje na kondenzátor B:

$$Q = C_\mathrm{A}U = Q_\mathrm{A0} + Q_\mathrm{B0} = (C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B})U_0\,, \qquad U_0 = \frac{C_\mathrm{A}U}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} = 12\,\mathrm{V}\,.$$

1 bod

b) Vodiči projde náboj

$$Q_\mathrm{B0} = C_\mathrm{B}U_0 = \frac{C_\mathrm{A}C_\mathrm{B}}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}U = 3{,}6\,\mu\mathrm{C}\,.$$

1 bod

c) Vnitřní energie vodičů se zvětší o hodnotu, o kterou se zmenší elektrická energie kondenzátorů:

$$-\Delta E = \frac{1}{2}C_\mathrm{A}U^2 - \left(\frac{1}{2}C_\mathrm{A}U_0^2 + \frac{1}{2}C_\mathrm{B}U_0^2\right) = \frac{C_\mathrm{A}C_\mathrm{B}U^2}{2(C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B})} = 54\,\mu\mathrm{J}\,.$$

2 body

d) Po přepnutí se spojí kladná deska jednoho kondenzátoru se zápornou deskou druhého. Tím se náboje částečně zneutralizují a celkový náboj se zmenší:

$$|Q_1| = |Q_\mathrm{A0} - Q_\mathrm{B0}|\,, \qquad U_1 = \frac{|Q_1|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} = \frac{Q}{(C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B})^2}|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}| = 2{,}4\,\mathrm{V}\,.$$

2 body

e) Po n-tém přepnutí bude platit:

$$U_n = \frac{|Q_n|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} = \frac{|C_\mathrm{A}U_{n-1} - C_\mathrm{B}U_{n-1}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} = \frac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}U_{n-1}\,.$$

Dostáváme rekurentní vyjádření geometrické posloupnosti $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$, která má:

nultý člen $U_0 = \dfrac{C_\mathrm{A}U}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}$ a kvocient $q = \dfrac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}$.

n-tý člen posloupnosti je

$$U_n = U_0 q^n = \frac{C_\mathrm{A}U}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}\left(\frac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}\right)^n\,.$$

Při každém přepnutí se změní polarita napětí na kondenzátoru s menší kapacitou, zatímco na kondenzátoru s větší kapacitou je stále stejná.

2 body

f) Nerovnici

$$U_k > \frac{C_\mathrm{A} U}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} \left(\frac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} \right)^n$$

řešíme logaritmováním:

$$n > \frac{\log \dfrac{(C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}) U_k}{C_\mathrm{A} U}}{\log \dfrac{|C_\mathrm{A} - C_\mathrm{B}|}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}} \doteq 2{,}97\,.$$

Při třetím přepnutí už napětí klesne pod hodnotu $U_k = 0{,}1\,\mathrm{V}$.

2 body

6. a) V zapojení podle obr. Y byly na diodě KY710 naměřeny hodnoty:

$t/°\mathrm{C}$	0	71,5
u_D/V	0,543	0,366

Úpravou vztahu (1) a dosazením dostáváme:

$$\gamma = \frac{U_0 - u_\mathrm{D}}{t} = 2{,}48\,\mathrm{mV}/K\,.$$

b) První operační zesilovač pracuje v lineárním režimu a na invertujícím vstupu se udržuje nulové napětí. Z prvního Kirchhoffova zákona plyne pro uzel u invertujícího vstupu, že proud přicházející přes diodu je stejný jako proud odcházející přes rezistor R_1. Proto:

$$i_\mathrm{D} = \frac{U_\mathrm{B}}{R_1} = 1\,\mathrm{mA} = \mathrm{konst.} \qquad u_{\mathrm{o}1} = u_\mathrm{D} = U_0 - \gamma t.$$

c) Také druhý operační zesilovač pracuje v lineárním režimu. Proto je napětí na invertujícím vstupu nulové a výstupní napětí $u_{\mathrm{o}2}$ je stejné jako napětí na rezistoru R_4. Z prvního Kirchhoffova zákona plyne pro uzel u invertujícího vstupu:

$$\frac{u_{\mathrm{o}2}}{R_4} + \frac{u_{\mathrm{o}1}}{R_1} = \frac{u_{\mathrm{o}2}}{R_4} + \frac{U_0 - \gamma t}{R_1} = \frac{U_\mathrm{B}}{R_3}\,, \qquad u_{\mathrm{o}2} = \frac{\gamma t R_4}{R_2} + \frac{U_\mathrm{B} R_4}{R_3} - \frac{U_0 R_4}{R2}\,.$$

Má-li současně platit $u_{\mathrm{o}2} = Bt$, musí být:

$$R_3 = R_2 \frac{U_b}{U_0}\,, \quad R_4 = R_2 \frac{B}{\gamma}\,. \qquad \text{Po dosazení:} \quad R_3 \doteq 28\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_4 \doteq 40\,\mathrm{k\Omega}.$$

Tyto výsledky ovšem bereme jen jako orientační a při praktické realizaci teploměru v úloze d) nastavíme R_3 a R_4 podle chování výstupního voltmetru.

7. Označme $u^\star$ výstupní napětí prvního operačního zesilovače, který funguje jako neinvertující zesilovač (obr. RB2). Platí tedy

$$u^\star = u_{i1}\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) .$$

2 body

U druhého operačního zesilovače se vlivem zpětné vazby udržuje vstupní difrenciální napětí na zanedbatelné hodnotě. Napětí na invertujícím vstupu je proto prakticky stejné jako u_{i2}. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí

$$\frac{u^\star - u_{i2}}{R} = \frac{u_{i2} - u_o}{R_2} .$$

3 body

Vyloučením $u^\star$ a úpravou dostáváme

$$u_o = \left(1 + \frac{R_2}{R}\right) u_{i2} - \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \frac{R_2}{R} u_{i1} .$$

Současně má platit

$$u_o = 10\,(u_{i2} - u_{i1}) .$$

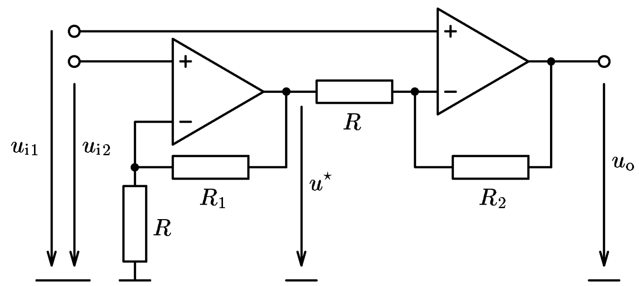
3 body

Porovnáním obou vztahů dostaneme

$$1 + \frac{R_2}{R} = 10 , \qquad R_2 = 9R = 90\ \mathrm{k\Omega} ,$$

$$\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \frac{R_2}{R} = 9\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) = 10 , \qquad R_1 = \frac{R}{9} = 1,11\ \mathrm{k\Omega} .$$

2 body



Obr. R2

Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*
Autoři úloh: R. Horáková (1, 2, 7), J. Jírů (3, 4), J. Kalčík (5, 6)

1. a) Zvolme vztažnou sustavu s osou x na silnici; kladná polosa je orientována ve směru pohybu nákladního automobilu. Souřadnice rychlostí před srážkou jsou: $v_1 = v$, $v_2 = -v$. Při dokonale nepružném rázu platí zákon zachování hybnosti:

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2)u\,, \qquad u = v\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 16\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

$m_1 > m_2$, rychlost $\boldsymbol{u}$ má stejný směr, jako byl směr rychlosti nákladního automobilu.

Změny souřadnic rychlostí:

$$u - v_1 = -4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, \qquad u - v_2 = 36\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Změna kinetické energie soustavy:

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 - \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}m_2 v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}v^2\left(\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} - m_1 - m_2\right) = \frac{-\,2m_1 m_2 v^2}{m_1 + m_2} \doteq 1{,}1\ \mathrm{MJ}\,.$$

5 bodů

b) Také při nedokonale pružném rázu platí zákon zachování hybnosti:

$$m_1 v - m_2 v = m_1 u_1 + m_2 u_2\,, \qquad u_2 = \frac{m_1(v - u_1) - m_2 v}{m_2} = 30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Osobní automobil se bude pohybovat ve směru původní i nové rychlosti nákladního automobilu.

Změna kinetické energie soustavy:

$$\Delta E'_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}m_2 v^2 = 0{,}94\ \mathrm{MJ}\,.$$

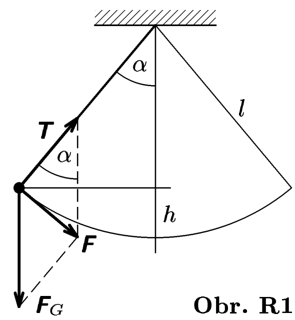
4 body

c) V prvním případě je změna kinetické energie soustavy větší — při dokonale nepružném rázu je vykonána větší deformační práce než v případě nedokonale pružného rázu.

1 bod

2. a) Označme l délku vlákna a m hmotnost kuličky. V krajní poloze působí výslednice tahové síly vlákna a tíhové síly ve směru tečny (obr. R1) a má velikost $F = mg\sin\alpha$. Kuličce uděluje tečné zrychlení

$$a_\mathrm{t} = g\sin\alpha\,.$$



Obr. R1

V rovnovážné poloze má kulička normálové zrychlení $a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{l}$. Rychlost určíme ze zákona zachování energie:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad v^2 = 2gh = 2gl(1 - \cos\alpha)\,,$$

$$a_n = 2g(1 - \cos\alpha)$$

Podle zadání má platit:

$$a_\mathrm{t} = a_\mathrm{n} \quad \Rightarrow \quad g\sin\alpha = 2g(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0\,; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\,, \qquad \alpha = 53°8'\,.$$

5 bodů

b) V krajní poloze je vlákno napínáno silou o velikosti $T_1 = mg\cos\beta$. Při průchodu rovnovážnou polohou platí $F_\mathrm{d} = T_2 - F_G$, (obr. R2):

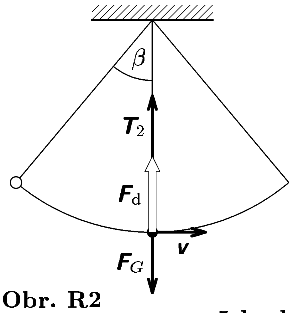
$$T_2 = F_\mathrm{d} + F_G = m\left(\frac{v^2}{l} + g\right) =$$

$$m\,(2g - 2g\cos\beta + g) = mg(3 - 2\cos\beta)\,.$$

Podle zadání má platit:

$$T_2 = 2T_1\,; \qquad mg(3 - 2\cos\beta) = 2mg\cos\beta\,,$$

$$\cos\beta = \frac{3}{4}\,; \qquad \beta = 41°25'\,.$$



Obr. R2

5 bodů

3. a) Úlohu budeme řešit na základě zákona zachování energie:

$$\varkappa mM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2\varkappa M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)} = 5{,}46\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$$

4 body

b) Pohyb tělesa je nerovnoměrně zrychlený. Ve výšce h je zrychlení dáno vztahem:

$$a_1 = \varkappa\frac{M}{(R+h)^2}\,.$$

Pokud by těleso padalo se zrychlením a_1, dopadlo by na zemský povrch za dobu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = (R+h)\sqrt{\frac{2h}{\varkappa M}} = 839\ \mathrm{s}\,.$$

3 body

Na zemském povrchu je zrychlení

$$a_1 = \varkappa\frac{M}{R^2}\,.$$

S tímto zrychlením by těleso dopadlo za dobu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = R\sqrt{\frac{2h}{\varkappa M}} = 639\ \mathrm{s}\,.$$

3 body

Hledaný interval pro dobu pádu tělesa je $t \in (639; 839)$ s.

4. a) $Q_V = Sv\,, \qquad v = \dfrac{Q_V}{S} = 7{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$ **1 bod**

b) V okolí sacího otvoru je tlak $p_\mathrm{a} + \varrho g h_0$.

$$p_\mathrm{a} + \varrho g h_0 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v^2\,, \qquad p_1 = p_\mathrm{a} + \varrho g h_0 - \frac{1}{2}\varrho v^2 = 8{,}0\cdot 10^4\ \mathrm{Pa}\,.$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h_1 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho g h_0\,, \qquad p_2 = p_a - \frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho g h_1 = 5{,}9 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}\,.$$

$$p_4 = p_a\,.$$

$$p_3 + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h_1 = p_4 + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h_2\,, \qquad p_3 = p_a + \varrho g(h_2 - h_1) = 1{,}46 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

3 body

c) Čerpadlo při zanedbání třecích sil zvyšuje potenciální energii vody a uvádí ji do pohybu . Jeho výkon je:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{mgh_2}{t} + \frac{mv^2}{2t} = \frac{V\varrho g h_2}{t} + \frac{V\varrho v^2}{2t} =$$

$$= Q_V \varrho g h_2 + \frac{Q_V \varrho v^2}{2} = Q_V \varrho g h_2 + \frac{Q_V^3 \varrho}{2S^2} = 310\ \mathrm{W}\,.$$

2 body

d) Čerpadlo působí na vodu silou $F = p_r S$, kterou koná mechanickou práci. Výkon čerpadla při rychlosti toku v je

$$P' = Fv = p_r S v = p_r Q_V = 430\ \mathrm{W}\,.$$

Účinnost čerpadla je

$$\eta = \frac{P}{P'} = \frac{Q_V \varrho g h_2 + \frac{Q_V^3 \varrho}{2S^2}}{p_r Q_V} = \frac{\varrho g h_2 + \frac{Q_V^2 \varrho}{2S^2}}{p_r} = 0{,}72\,.$$

2 body

e) Tlak ve vstupním otvoru čerpadla musí mít kladnou hodnotu, jinak by došlo k roztržení vodního sloupce.

$$p_2 = p_a - \frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho g h_{1max} > 0\,, \qquad h_{1max} < \frac{p_a}{\varrho g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{p_a}{\varrho g} - \frac{Q_V^2}{2gS^2} = 7{,}6\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

5. a) Ze stavové rovnice a Poissonova vztahu pro adiabatický děj plyne:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\,, \quad T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 293 \cdot 0{,}9482\ \mathrm{K} = 278\ \mathrm{K}\,, \qquad t_2 = 5\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

Ve výšce, do které chceme vystoupit, je teplota 5 °C. **3 body**

b) Při výstupu balonu se vodík v balonu adiabaticky rozpíná a zčásti pojistným ventilem uniká do atmosféry. Vodík i vzduch mají stejnou Poissonovu konstantu. Proto se teplota uvnitř balonu adiabatickým ochlazením stále vyrovnává s teplotou okolí. Hmotnost m_0 vodíku na zemi a m ve výšce výstupu určíme pomocí stavové rovnice:

$$m_0 = \frac{p_1 V M_{mH}}{R_m T_1}\,, \qquad m = \frac{p_1 V M_{mH}}{R_m T_2}\,,$$

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{V M_{mH}}{R_m}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right) = \frac{V M_{mH}}{R_m}\frac{p_1}{T_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - 1\right] = -5{,}1\ \mathrm{kg}$$

3 body

c) Výslenice vztlakové a tíhové síly působící na vodík v balonu na zemi má velikost

$$F = V(\varrho_{\mathrm{vzd}} - \varrho_{\mathrm{H}})g\,.$$

Na zemi a ve výšce výstupu dostaneme:

$$F_1 = \frac{Vp_1}{R_{\mathrm{m}}T_1}(M_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{mH}})g\,, \qquad F_2 = \frac{Vp_2}{R_{\mathrm{m}}T_2}(M_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{mH}})g\,.$$

Nosnost N balonu se změní o

$$\Delta N = \frac{F_2 - F_1}{g} = \frac{V}{R_{\mathrm{m}}}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right)(M_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{mH}}) =$$

$$= \frac{V}{R_{\mathrm{m}}}(M_{\mathrm{m}} - M_{\mathrm{mH}})\frac{p_1}{T_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} - 1\right] = -69\ \mathrm{kg}$$

4 body

7. a) Zavěšenému tělesu o hmotnosti m udělíme počáteční rychlost v_0 směrem dolů. Pohybové rovnice

$$ma = mg - T\,, \qquad Ma = T - Mg\sin\alpha - Mgf\cos\alpha$$

mají řešení

$$a = g\frac{m - M(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M + m}\,, \qquad T = mg\frac{M(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha)}{M + m}\,.$$

Diskuse: Je-li $m > M(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, je pohyb soustavy rovnoměrně zrychlený; v opačném případě $(m < M(\sin\alpha + f\cos\alpha))$ je pohyb rovnoměrně zpomalený. Jestliže $m = M(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, pohybuje se soustava rovnoměrně rychlostí v_0.

4 body

b) Kvádru o hmotnosti M udělíme počáteční rychlost v_0 směrem dolů rovnoběžně s nakloněnou rovinou. Pohybové rovnice

$$Ma_1 = Mg\sin\alpha - Mgf\cos\alpha - T\,, \qquad ma_1 = T - mg$$

mají řešení

$$a_1 = g\frac{M(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m}{M + m}\,, \qquad T = mg\frac{M(1 + \sin\alpha - f\cos\alpha)}{M + m}\,.$$

Diskuse: Je-li $M(\sin\alpha - f\cos\alpha) > m$, je pohyb soustavy rovnoměrně zrychlený; v opačném případě $(M(\sin\alpha - f\cos\alpha) < m)$ je pohyb rovnoměrně zpomalený. Jestliže $m = M(\sin\alpha - f\cos\alpha)$, pohybuje se soustava rovnoměrně rychlostí v_0.

4 body

c) Soustava je na počátku v klidu.
Z řešení úlohy a) je zřejmé, že zavěšené těleso se začne pohybovat dolů, jestliže $m > M(\sin\alpha + f_0\cos\alpha)$.
Z řešení úlohy b) je zřejmé, že kvádr se začne pohybovat dolů po nakloněné rovině, jestliže $m < M(\sin\alpha - f_0\cos\alpha)$.
Soustava zůstane v klidu, jestliže $M(\sin\alpha - f_0\cos\alpha) \le m \le M(\sin\alpha + f_0\cos\alpha)$.

2 body

Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*
Autoři úloh: J. Jírů (1,2,3,5,6,7), I. Volf (4)

1. a) Označme t_1 dobu jízdy na prvním, resp. na třetím, úseku, t_2 dobu jízdy na druhém úseku, s_1 dráhu na prvním, resp. třetím, úseku. Potom platí

$$t_1 = \frac{v}{a}, \quad t_2 = \frac{d - 2s_1}{v}, \quad \text{kde} \quad s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{v_2}{2a}.$$

Hledaná doba pak je

$$t_{\min} = 2t_1 + t_2 = 2\frac{v}{a} + \frac{d - 2\frac{v^2}{2a}}{v} = \frac{v}{a} + \frac{d}{v} = 58 \text{ s}.$$

3 body

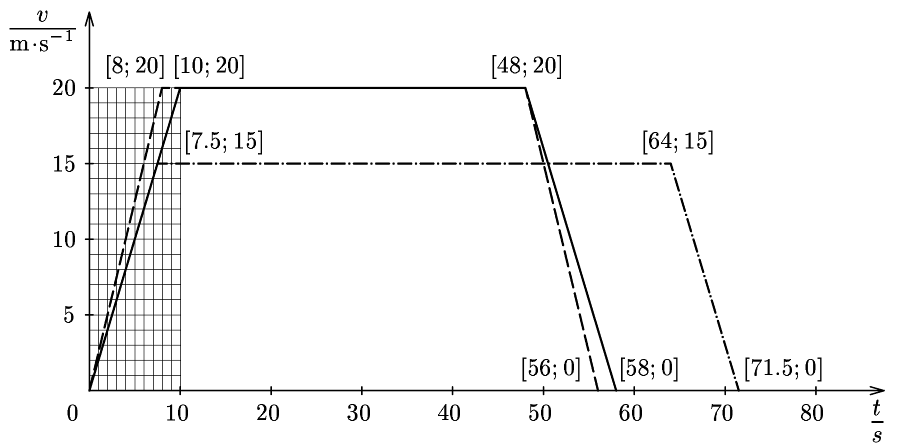
b)
$$t'_{\min} = \frac{v'}{a} + \frac{d}{v'} = 71{,}5 \text{ s}.$$

1 bod

c)
$$t''_{\min} = \frac{v}{a'} + \frac{d}{v} = 56 \text{ s}.$$

1 bod

d) Graf:



3 body

e) Dráhu uraženou za prvních 10 sekund určíme z grafu jako obsah plochy pod grafem v časovém intervalu $\langle 0 \text{ s}; 10 \text{ s}\rangle$:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 \text{ m} = 100 \text{ m}, \\ s' &= \left(\frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 15 + 2,5 \cdot 15\right) \text{ m} = 94 \text{ m}, \\ s'' &= \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20 + 2 \cdot 20\right) \text{ m} = 120 \text{ m}. \end{aligned}$$

2 body

2. a) Pro dobu pohybu do zastavení platí $t_0 = \dfrac{v_0}{a} = 16{,}67\,\mathrm{s} < t_1$.

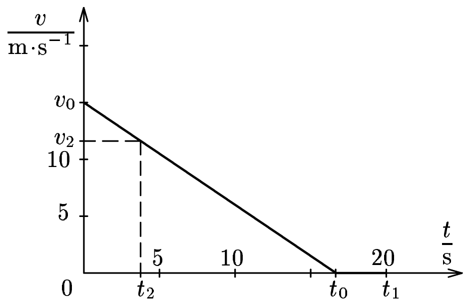
Dráha uražená do zastavení je $s_0 = \dfrac{1}{2}at_0^2$. Po dosazení vychází $s_0 = \dfrac{v_0^2}{2a} = 125\,\mathrm{m}$.
V dalším průběhu času auto stojí a dráha se nemění. Proto $s_1 = s_0 = 125\,\mathrm{m}$.

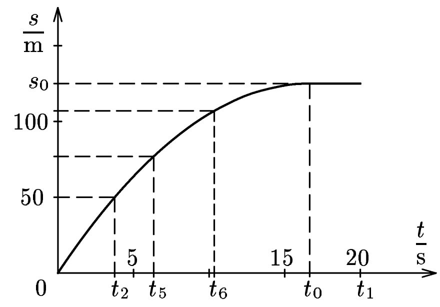
2 body

b) Tabulka pro sestrojení grafů

t/s	0	5	10	15	16,67	20
v/m·s^{-1}	15	10,5	6	1,5	0	0
s/m	0	63,25	105	123,75	125	125

Grafy:





2 body

c) Čas t_2, ve kterém dráha dosáhne hodnoty s_2, určíme užitím zákona dráhy rovnoměrně zpomaleného pohybu:

$$s_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}at_2^2\,,$$

$$t_2 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as_2}}{a} = \begin{cases} 29{,}6\,\mathrm{s} \\ 3{,}76\,\mathrm{s} \end{cases}$$

Úloze vyhovuje menší kořen $t_2 = 3{,}76\,\mathrm{s}$. V tomto čase se bude automobil pohybovat rychlostí $v_2 = v_0 - at_2 = 11{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2 body

d) Platí

$$v_\mathrm{p} = \frac{s_4 - s_3}{t_4 - t_3} = \frac{v_0(t_4 - t_3) - \frac{1}{2}a(t_4^2 - t_3^2)}{t_4 - t_3} = v_0 - \frac{1}{2}a(t_4 + t_3) = 7{,}35\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

e) Označme t_5, t_6 počátek a konec hledaného časového intervalu. Platí:

$$\Delta s = v_0(t_6 - t_5) - \frac{1}{2}a(t_6^2 - t_5^2) = v_0\Delta t - \frac{1}{2}a\Delta t(2t_5 + \Delta t)\,,$$

$$t_5 = \frac{v_0\Delta t - \Delta s}{a\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} = 6{,}33\,\mathrm{s}\,, \qquad t_6 = 10{,}33\,\mathrm{s}\,.$$

Příslušné dráhy jsou $s_5 = 76{,}9\,\mathrm{m}$, $s_6 = 106{,}9\,\mathrm{m}$.

2 body

3. Označme $t_1 = 2$ s, $t_2 = 7$ s, $t_3 = 10$ s, $F_0 = 24$ kN.

a) Obsah plochy pod grafem

$S \mathrel{\widehat{=}} F_0(t_2 - t_1) = 24\,000\ \mathrm{N} \cdot (7 - 2)\ \mathrm{s} = 120\,000\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{s} = 120\,000\ \mathrm{kg} \cdot m \cdot s^{-1}$

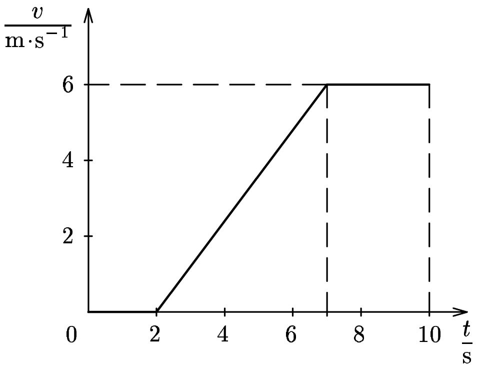
udává v daném časovém intervalu impuls síly, a tedy přírůstek hybnosti.

1 bod

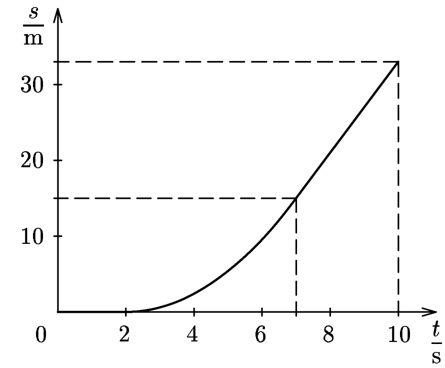
b) Působením síly konstantní velikosti získá tramvaj rovnoměrně zrychleným pohybem konečnou rychlost

$$v = \frac{F_0(t_2 - t_1)}{m} = 6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

s níž se dále pohybuje setrvačností (obr. R1). **2 body**



Obr. R1



Obr. R2

c) Dráha v intervalu $t_1 \le t < t_2$ je určena vztahem

$$s = \frac{1}{2}a(t - t_1)^2\,, \quad \text{kde} \quad a = \frac{F_0}{m}\,.$$

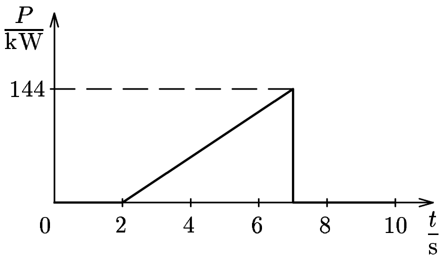
V čase t_2 je dráha

$$s_2 = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}(t_2 - t_1)^2 = 15\ \mathrm{m}\,.$$

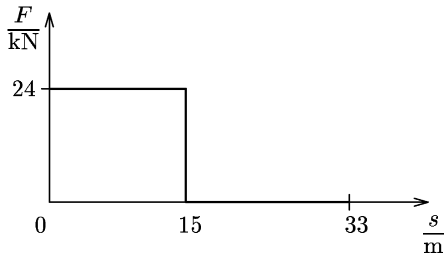
Dráha v intervalu $t_2 \le t \le t_3$ je určena vztahem

$$s = v_2(t - t_2) + s_2\,,$$

v čase t_3 je dráha $s_3 = 33$ m. Graf (obr. R2) vyjadřuje obsah plochy pod grafem v úloze b). **3 body**



Obr. R3



Obr. R4

d) Okamžitý výkon je v intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$ přímo úměrný okamžité rychlosti, tj. $P = F_0 v$. V čase t_2 je výkon maximální, $P_2 = F_0 v_2 = 144$ kW (obr. R3).

2 body

e) Síla velikosti F_0 začne působit při nulové dráze a přestane působit v čase $t_2 = 7$ s po projetí dráhy $s_2 = 15$ m (obr. R4).

2 body

4. a) Kámen hozený z výšky h_0 rychlostí o velikosti v_0 vodorovným směrem letěl po dobu

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 1{,}43 \text{ s} \tag{9}$$

a dopadl do vzdálenosti

$$d_0 = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 17{,}1 \text{ m}. \tag{10}$$

2 body

a1) Podle vztahu (2) musí Jirka hodit kámen dvojnásobnou rychlostí, tj.

$$v_0' = 2v_0 = 24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$ **1 bod**

a2) Doba letu v témže tíhovém poli závisí podle vztahu (1) pouze na počáteční výšce, nikoliv na rychlosti, tj.

$$v_0' = v_0 = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$ **1 bod**

a3) Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_\text{d}^2$$

plyne pro velikost rychlosti dopadu

$$v_\text{d} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = 18{,}4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \tag{11}$$

Ze zákona zachování mechanické energie pro Jirkův hod

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0'^2 = \frac{1}{2}m(2v_\text{d})2$$

plyne pro velikost počáteční rychlosti

$$v_0' = \sqrt{4v_\text{d}^2 - 2gh_0}$$

a po dosazení z rovnice (3) za v_d

$$v_0' = \sqrt{4v_0^2 + 6gh_0} = 34{,}1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$ **2 body**

b) b1) Aby Jirka dohodil stejnou rychlostí v_0 dvakrát dále, musí být doba letu dvojnásobná. Podle vztahu (1) dostaneme rovnici

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

z níž plyne $h = 4h_0 = 40$ m. **1 bod**

b2) Dvojnásobná doba letu bude podle b1) z téže výšky $h = 4h_0 = 40$ m.

1 bod

b3) Ze zákona zachování mechanické energie pro Jirkův hod z výšky h

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(2v_\mathrm{d})^2$$

plyne pro výšku $h = \dfrac{2v_\mathrm{d}}{g} - \dfrac{v_0^2}{2g}$ a po dosazení rovnice (3) za v_d

$$h = \frac{3v_0^2}{2g} + 4h_0 = 62{,}0\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

5. a) Na pasažéra ve vozíku působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce sedadla $\boldsymbol{F}_1$. V bodě C jsou obě orientovány svisle dolů a jejich složením vzniká výsledná dostředivá síla o velikosti

$$F_\mathrm{d} = mg + F_1 = m\frac{v_B^2}{r}\,.$$

Aby reakce sedadla mohla vzniknout, musí být dostředivá síla větší než síla tíhová. V mezním případě

$$F_1 = 0\,, \qquad F_\mathrm{d} = F_G\,, \qquad m\frac{v_B^2}{r} = mg\,,$$

$$v_B = \sqrt{gr} = 8{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg\cdot 2r + \frac{1}{2}mv_B^2\,, \qquad v_A^2 = 4gr + v_B^2\,.$$

V mezním případě

$$v_A = \sqrt{5gr} = 18{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2 body

c) Maximální dostředivé zrychlení má vozík v místě s maximální okamžitou rychlostí, tedy v nejnižším bodě kružnicové trajektorie. Proto platí

$$a_\mathrm{dmax} = \frac{v_A^2}{r} = 49\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Zrychlení směřuje do středu kružnice, tedy svisle vzhůru. **2 body**

d) Pohybuje-li se vozík bez tření a valivého odporu, může mu tečné zrychlení udělit jen složka tíhové síly rovnoběžná s tečnou k trajektorii. Maximální tečné zrychlení na kružnicové trajektorii je v bodech, v nichž tíhová síla má směr tečny ke kružnici, tj. v bodech B a D. Jeho velikost je

$$a_\mathrm{t} = g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Směr tečného zrychlení je v obou bodech totožný se směrem tíhového zrychlení, v bodě B proti směru okamžité rychlosti (vozík zpomaluje) a v bodě D ve směru okamžité rychlosti (vozík zrychluje). **1 bod**

e) Celkové zrychlení je určeno vektorovým součtem tečného a dostředivého zrychlení. Podle úlohy d) v bodech B a D platí $a_\mathrm{t} = g$. Dostředivé zrychlení v bodech B a D je určeno okamžitou rychlostí v těchto bodech, kterou získáme ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg\cdot r + \frac{1}{2}mv_C^2\,, \qquad v_C^2 = v_A^2 - 2gr = 3gr\,,$$

$$a_\mathrm{d} = \frac{v_C^2}{r} = 3g\,.$$

Celkové zrychlení má velikost

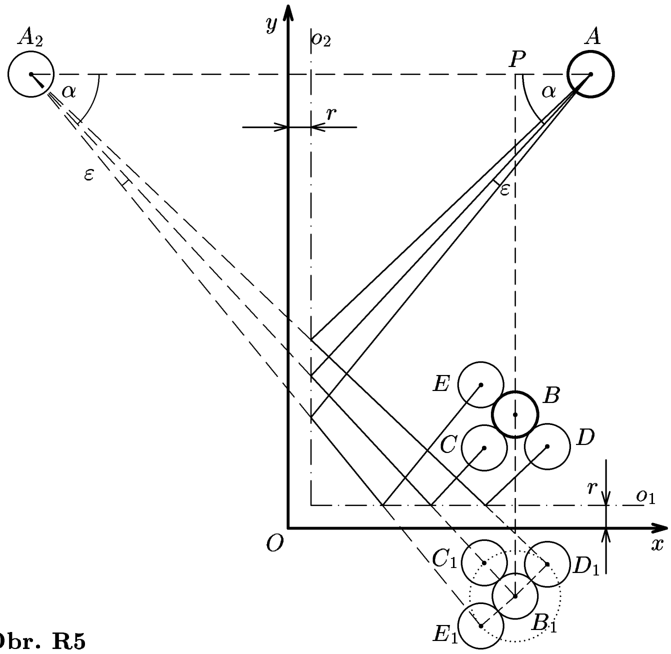
$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{d}^2} = \sqrt{g^2 + (3g)^2} = \sqrt{10}\cdot g = 31\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

a je v obou bodech od normály odchýleno dolů o úhel

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_\mathrm{t}}{a_\mathrm{d}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 18{,}4° \,.$$

3 body

7. a)



Obr. R5

5 bodů

Střed koule se odráží ve vzdálenosti r od mantinelu, pričemž úhel odrazu je roven úhlu dopadu. Na vnitřní straně mantinelů x, y vedeme ve vzdálenosti r pomocné osy o_1, o_2 (obr. R5). Osové souměrnosti podle těchto os zobrazí první a třetí část trajektorie bodu A do stejné přímky, po které se pohybuje mezi odrazy. Dráhu s uraženou bodem A do centrální srážky v bodě C určíme z pravoúhlého trojúhelníka A_2B_1P:

$$s = |A_2C_1| = \sqrt{(x_A + x_B - 2r)^2 + (y_A + y_B - 2r)^2} - 2r = 881 \text{ mm}$$

Ze stejného trojúhelníka určíme i směrový úhel α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_A + y_B - 2r}{x_A + x_B - 2r} = 1{,}0781 \,, \qquad \alpha = 47° 9'$$

3 body

b) Maximální odchylku ε od směru určeného v úkolu a), při které se koule A ještě dotkne koule B, určíme z rovnoramenného trojúhelníka $A_2B_1D_1$:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r}{|A_2C_1|} = \frac{r}{\sqrt{(x_A + x_B - 2r)^2 + (y_A + y_B - 2r)^2}} = 0{,}03188 \,, \qquad \varepsilon = 3° 40' \,.$$

2 body