Řešení úloh 1. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*
Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3, 4, 6, 7) a I. Volf (5)

1. a) Graf *A* představuje klid hmotného bodu s počáteční uraženou dráhou 10 m, graf *B* rovnoměrný pohyb s počáteční uraženou dráhou 4 m, graf *C* rovnoměrný pohyb s nulovou počáteční dráhou a graf *D* rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční dráhou a nulovou počáteční rychlostí.

2 body

b) Průměrná rychlost v_p je určena podílem uražené dráhy a odpovídajícího časového intervalu 4 s:

A: $v = 0$, *B*: $v = 1{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, *C*: $v = 2{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *D*: $v = 2{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

2 body

c) V případech *A*, *B*, *C* je okamžitá rychlost v stálá a v každém okamžiku má stejnou hodnotu jako průměrná rychlost v_p ve zvoleném časovém intervalu.

V případě *D* platí $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$, z čehož $v = \frac{2s}{t}$.

Po dosazení hodnot $s = 10$ m, $t = 4$ s dostaneme $v = 5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **2 body**

d) Grafy jsou na obr. R1. **2 body**

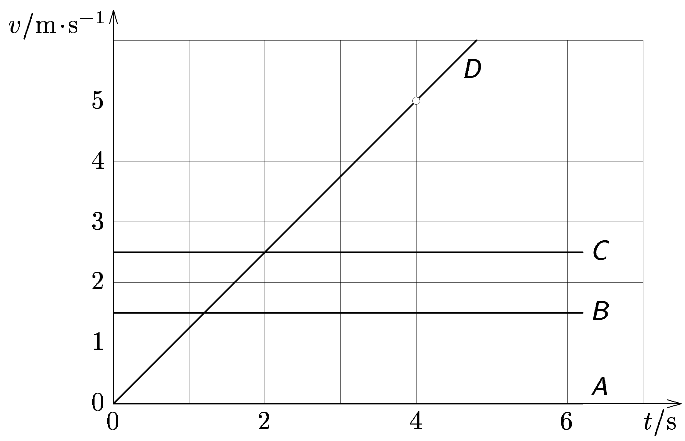
e) *A*: Těleso je stále v klidu, tedy $s = s_1 = 10$ m.

B: Podle rovnice $s_1 = s_0 + vt_1 = (4 + 1{,}5 \cdot 9{,}2)\ \mathrm{m} = 17{,}8\ \mathrm{m}$.

C: Podle rovnice $s_1 = vt_1 = 2{,}5 \cdot 9{,}2\ \mathrm{m} = 23{,}0\ \mathrm{m}$.

D: Z grafu lze určit $a = \frac{2s}{t^2} = 2 \cdot \frac{10}{4^2}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 1{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Uražená dráha pak je $s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 9{,}22\ \mathrm{m} = 52{,}9\ \mathrm{m}$. **2 body**



Obr. R1

2. a)

b)
$$t_0 = \frac{d_0}{v_0} + \frac{d_1}{v_1} = 125 \text{ s}\,.$$
2 body

$$t_1 = \frac{\sqrt{d_0^2 + d_1^2}}{v_1} = 146 \text{ s}\,.$$
2 body

c) Z rovnoti $t_0 = t_1$, kde rychlost v_1 nahradíme rychlostí v_1', plyne

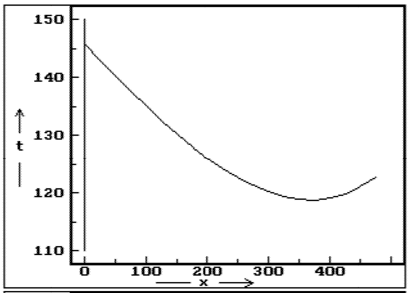
$$v_1' = \frac{\sqrt{d_0^2 + d_1^2} - d1}{d_0} v_0 = 20{,}4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}\,.$$
2 body

d) Označme $x = |AX|$. Pak z obr. 2 plyne

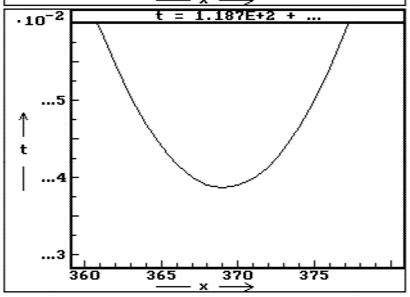
$$t_x = \frac{x}{v_0} + \frac{\sqrt{(d_0 - x)^2 + d_1^2}}{v_1}\,, \qquad \text{kde} \qquad 0 \leq x \leq d_0\,.$$

Rozdělením úsečky AB na 20 dílů po 25 m a numerickým výpočtem pro takto zvolené polohy bodu X dostáváme, že nejkratší čas po trase AXC je přibližně $t_x \doteq 118{,}75$ s pro $x \doteq 375$ m. Dalším zpřesněním výpočtu lze určit minimum výše uvedené funkce $t_x = 118,7386$ s pro $x = 369$ m (viz obr. R2 a R3). Vzhledem k omezené přesnosti zadání však výsledek zaokrouhlíme na $x \doteq 370$ m, $t_x \doteq 119$ s.
4 body

x	t
0	145.774
25	142.951
50	140.208
75	137.554
100	135.000
125	132.559
150	130.244
175	128.074
200	126.066
225	124.243
250	122.628
275	121.250
300	120.139
325	119.328
350	118.853
375	118.750
400	119.057
425	119.808
450	121.035
475	122.760



x	t
360	118.7647
361	118.7593
362	118.7545
363	118.7504
364	118.7468
365	118.7439
366	118.7416
367	118.7400
368	118.7390
369	118.7386
370	118.7389
371	118.7398
372	118.7414
373	118.7436
374	118.7465
375	118.7500
376	118.7542
377	118.7590
378	118.7645
379	118.7707



Obr. R2, R3

3. a) Z rovnic $s = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$ pro rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu plyne

$$s_1 = \frac{1}{2}v_1 t_1 = 45 \text{ m}\,.$$

2 body

b) Z 2. pohybového zákona plyne $F = ma = \dfrac{mv_1}{t_1} = 3000 \text{ N}$.

1 bod

c) Průměrný výkon automobilu je určen podílem vykonané práce automobilu při rozjíždění a dobou rozjíždění:

$$P_\text{p} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{t_1} = 22{,}5 \text{ kW}\,.$$

2 body

d) Okamžitý výkon automobilu v čase t_1 určíme jako součin síly a okamžité rychlosti:

$$P_1 = Fv_1 = \frac{mv_1}{t_1}v_1 = \frac{mv_1^2}{t_1} = 45 \text{ kW}\,(= 2P_\text{p})\,.$$

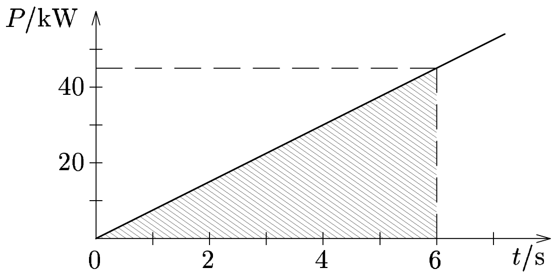
2 body

e) Okamžitý výkon automobilu jako funkci času určíme ze vztahu

$$P = Fv = \frac{mv_1}{t_1}\cdot at = \frac{mv_1}{t_1}\cdot\frac{v_1}{t_1}t = \frac{mv_1^2}{t_1^2}t\,.$$

Mezi číselnými hodnotami platí vztah: $\{P\} = 7500\{t\}$.

Graf:



Obsah plochy omezené grafem v intervalu od 0 do t_1 udává práci vykonanou motorem automobilu a tedy i kinetickou energii automobilu.

3 body

4. a) Ze zákona zachování hybnosti $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$ plyne

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = 2{,}2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

Hledaný poměr energií je

$$k = 1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)} = 1 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1 + m_2)} = 0{,}032\,.$$

3 body

b) Ze zákona zachování hybnosti $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$ plyne

$$v = \frac{|m_1 v_1 - m_2 v_2|}{m_1 + m_2} = 1{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Hledaný poměr energií je

$$k = 1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)} = 1 - \frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1 + m_2)} = 0{,}80\,.$$

3 body

c) Ze zákona zachování hybnosti $(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 = [(m_1 + m_2)v]^2$ plyne

$$v = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2} = 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Hledaný poměr energií je

$$k = 1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)} = 1 - \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1 + m_2)} = 0{,}42\,.$$

4 body

5.a) Během výstupu míčku se jeho okamžitá výška h nad terénem a velikost v okamžité rychlosti mění podle vztahů:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,, \qquad v = v_0 - gt\,.$$

V okamžiku, kdy míček dosáhne největší výšky h_m, je jeho rychlost nulová,

$$v_0 - gt = 0 \ \text{ a tedy } \ t = \frac{v_0}{g} = 1{,}63\ \mathrm{s}\,.$$

Po dosazení

$$h_\mathrm{m} = h_0 + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 25\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

b) Při následném pádu míčku z výšky h_m se velikost rychlosti a dráha míčku mění podle vztahů:

$$v = gt\,, \qquad s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g}\,.$$

V okamžiku dopadu $s = h_\mathrm{m}$. Míček dopadne za dobu $t = \sqrt{\frac{2h_\mathrm{m}}{g}} = 2{,}26$ s rychlostí $v = \sqrt{2gh_\mathrm{m}} = 22\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **2 body**

c) Při vodorovném vrhu je doba letu stejná jako doba volného pádu z výšky h_0. Po tuto dobu se míček pohybuje ve vodorovném směru rychlostí v_0. Tedy:

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,, \qquad d = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 25\ \mathrm{m}\,.$$

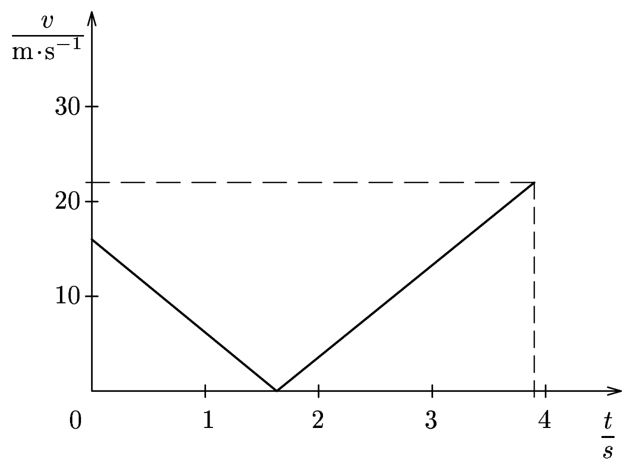
Rychlost míčku při dopadu má velikost $v = \sqrt{v_0^2 + v_\mathrm{p}^2}$, kde $v_\mathrm{p} = \sqrt{2gh_0}$ je rychlost dopadu při volném pádu z výšky h_0.
Po dosazení: $v_\mathrm{p} = 15{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v = 22\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Velikost rychlosti dopadu je stejná jako v případě b).
To vysvětlíme pomocí zákona zachování energie. Terén volíme jako nulovou hladinou potenciální energie. Součet potenciální a kinetické energie míčku na počátku pohybu je roven kinetické energii míčku při dopadu:

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad v = \sqrt{2gh_0 + v_0^2} = 22\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

3 body

d) Také při svislém vrhu dolů můžeme použít zákon zachování energie a dojdeme ke stejnému výsledku $v = \sqrt{2gh_0 + v_0^2} = 22\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **1 bod**

e)



2 body

7. a) Hydrostatický tlak působící na dno akvária je $p = h\varrho g$, kde

$$h = \frac{V}{ab} \tag{1}$$

je hloubka vody v akvariu. (Pro dané hodnoty musí ovšem platit $h < c$.) Dosazením dostaneme

$$p = \frac{V\varrho g}{ab} = 3140 \text{ Pa}. \tag{2}$$

Tlaková síla působící na dno je $F = pab = V\varrho g = 471$ N. **3 body**

b) Hydrostatický tlak působící na boční stěny závisí na hloubce pod hladinou vody. Bezprostředně u hladiny je nulový, bezprostředně u dna je roven hydrostatickému tlaku na dno, přičemž s hloubkou roste přímo úměrně a šířka stěny je všude stejná. Střední tlak p_s působící na stěny je proto roven polovině hydrostatického tlaku působícího na dno, tj.

$$p_s = \frac{V\varrho g}{2ab} = 1570 \text{ Pa}.$$

Tlaková síla působící na stěnu šířky a je $F_a = p_s ah$, na stěnu šířky b pak $F_b = p_s bh$. Dosazením za $p_s = p/2$, kde p je určeno rovnicí (2), a za h z rovnice (1), pak dostáváme

$$F_a = \frac{V^2\varrho g}{2ab^2} = 251 \text{ N},$$

$$F_b = \frac{V^2\varrho g}{2a^2b} = 151 \text{ N}.$$

5 bodů

c) Podle Archimédova zákona je vztlaková síla působící na loď $F_{vz} = mg = \varrho V_2 g$, z čehož $V_2 = \dfrac{m}{\varrho}$ je objem ponořené části plovoucí lodi. Hledaný objem dolité vody je

$$V_1 = abc - \left(V + \frac{m}{\varrho}\right) = 11{,}1 \text{ l}.$$

2 body