

Řešení úloh 1. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Autoři úloh: R. Baník (5), I. Čáp (1), R. Horáková (4), P. Šedivý (2, 6, 7) a I. Volf (3)

- 1.a) Při dosažení určité zátěže a tím i síly $F = F_1$ se začne druhý konec tyče vynořovat nad hladinu. Podmínky rovnováhy tyče v šikmé poloze určíme z obr. R1:

$$F_1 = F_v - F_G,$$

$$F_v \frac{x}{2} \cos \alpha - F_G \frac{L}{2} \cos \alpha = 0,$$

kde $F_G = \rho SLg$, $F_v = \rho_v Sxg$, ρ je hustota dřeva, ρ_v je hustota vody, S je obsah průřezu tyče a x je délka ponořené části tyče. Z toho určíme délku ponořené části tyče a velikost F_1 tahové síly lanka pro šikmou polohu tyče:

$$F_v x = F_G L, \quad S \rho_v g x^2 = S \rho g L^2, \quad x = L \sqrt{\frac{\rho}{\rho_v}}, \quad F_1 = mg \left(\sqrt{\frac{\rho_v}{\rho}} - 1 \right).$$

Číselně: $x = 0,67 \text{ m}$, $F_1 = 0,96 \text{ N}$.

Velikost síly v šikmé poloze lanka nezávisí na úhlu α , proto se tyč postaví do kolmé polohy naráz, bez zvyšování zátěže. Její volný konec vystoupí do výšky $h_1 = L - x = 0,13 \text{ m}$.

4 body

- b) Pro $\alpha = 90^\circ$ (poloha kolmo na hladinu) dostaneme:

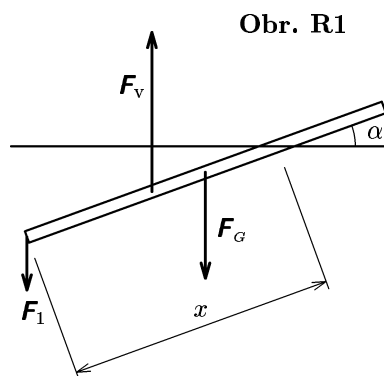
$$S(L - h)\rho_v g = SL\rho g + F, \quad Sh\rho_v g = SL(\rho_v - \rho)g - F,$$

$$h = L \frac{\rho_v - \rho}{\rho_v} - \frac{F}{S\rho_v g} = L \left[1 - \frac{\rho}{\rho_v} \left(\frac{F}{mg} + 1 \right) \right].$$

Hraniční hodnota F_2 tahové síly lanka je dána podmínkou $h = 0$:

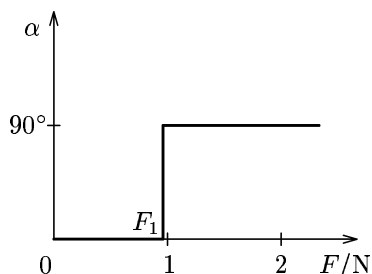
$$F_2 = mg \left(\frac{\rho_v}{\rho} - 1 \right).$$

Číselně: $F_2 = 2,1 \text{ N}$.

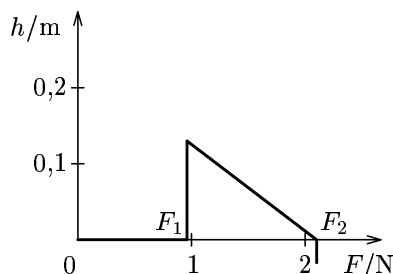


Po překročení této síly klesne tyč bez dalšího zvětšování zátěže ke dnu (zátěž se dotkne dna tyč na lanku zůstane ve svislé poloze).

3 body



Obr. R2



Obr. R3

3 body

- 2.a) V neinerciální vztažné soustavě spojení s rotujícím závěsem působí po vychýlení závěsu na kuličku tři síly, které jsou v rovnováze: síla vlákna F_v , tíhová síla F_G a setrvačná odstředivá síla F_o (obr. R4). Platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_o}{F_G} = \frac{m\omega^2 l \sin \varphi}{mg} = \frac{4\pi^2 f^2 l \sin \varphi}{g}.$$

Tato rovnice má dvě řešení:

$$\sin \varphi = 0, \quad \cos \varphi = \frac{g}{4\pi^2 f^2 l}.$$

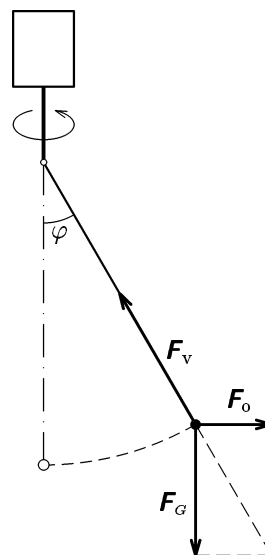
Druhá rovnovážná poloha může vzniknout jen když

$$\frac{g}{4\pi^2 f^2 l} < 1, \quad f > \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = f_k.$$

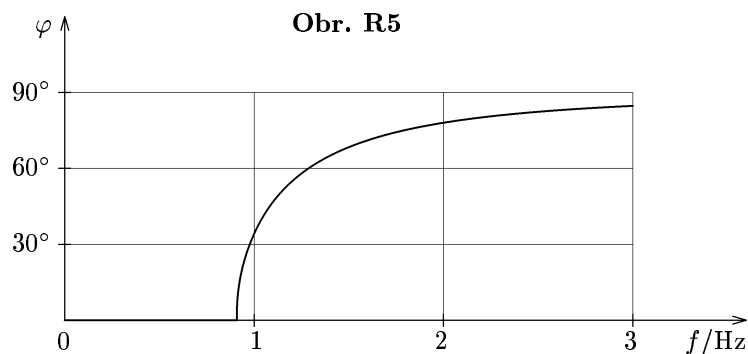
Je-li překročena kritická frekvence, je první rovnovážná poloha labilní a kulička po sebemenším vychýlení přejde do druhé rovnovážné polohy, která je stabilní.

6 bodů

- b) Pro danou délku závěsu dostaneme $f_k = 0,91$ Hz. Graf závislosti odchylky závěsu na frekvenci otáčení je na obrázku R5:



Obr. R4



4 body

3. a, b) Počáteční rychlost míčku měla velikost $v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_0)} = 13,29 \text{ ms}^{-1}$.
 Při prvním odrazu od chodníku se velikost rychlosti míčku zmenšila
 z $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ na $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Z toho určíme koeficient vzpruživosti

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{0,75} = 0,866 = \frac{v_3}{v_2} = \frac{v_4}{v_3} \dots$$

Po dalších odrazech měla rychlost míčku velikost:

$$v_3 = v_2 \cdot k = v_1 \cdot k^2, \quad v_4 = v_3 \cdot k = v_1 \cdot k^3 \dots v_n = v_1 \cdot k^{n-1}.$$

První výstup se uskutečnil za dobu $\tau_0 = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2(h_1 - h_0)}{g}}$, první sestup

za dobu $\tau_1 = \frac{v_1}{g} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Další výstupy a sestupy proběhly za doby:

$$\tau_2 = \frac{v_2}{g} = k \frac{v_1}{g} = k\tau_1, \quad \tau_3 = \frac{v_3}{g} = k^2\tau_1 \dots \tau_n = k^{n-1}\tau_1.$$

Číselné hodnoty jsou pro přehlednost zapsány do tabulky:

i	0	1	2	3	4	5
$v_i/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	13,29	19,81	17,16	14,86	12,87	11,14
τ_i/s	1,35	2,02	1,75	1,51	1,31	1,14

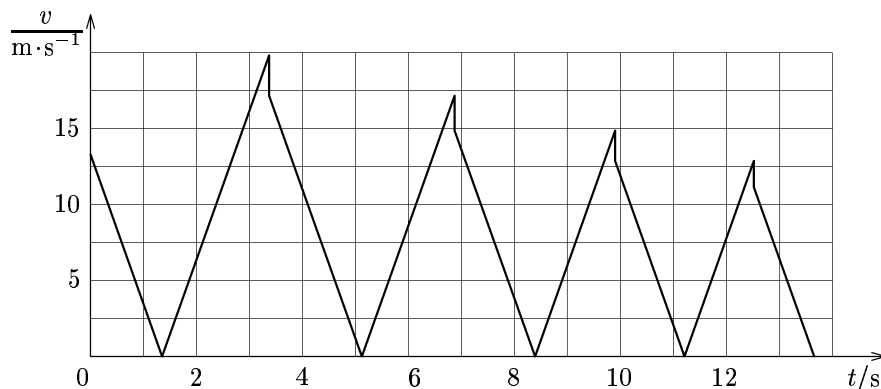
Časy jednotlivých výstupů jsou $\tau_0, \tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \tau_0 + \tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3, \dots$

Číselně 1,35 s, 5,12 s, 8,39 s, 11,21 s, 13,66 s.

Časy jednotlivých dopadů jsou $\tau_0 + \tau_1, \tau_0 + \tau_1 + 2\tau_2, \tau_0 + \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3, \dots$

Číselně 3,37 s, 6,87 s, 9,90 s, 12,52 s, 14,80 s.

3 body

Graf:**Obr. R6****2 body**

- c) Výšky výstupu po jednotlivých odrazech určíme ze vztahu

$$h_i = \frac{v_i^2}{2g} = k^{2(i-1)} \frac{v_1^2}{2g} = k^{2(i-1)} h_1.$$

Číselně $h_3 = 11,25$ m, $h_4 = 8,44$ m, $h_5 = 6,33$ m.

2 body

- d) Míček proletí ve výšce $h_0 = 11$ m poprvé v čase $2\tau_0 = 2,71$ s. Časy dalších průletů touto výškou budeme počítat od předcházejícího dopadu na chodník. Použijeme rovnici

$$h_0 = v_i t - \frac{1}{2} g t^2, \quad \text{která má za předpokladu } \frac{v_i^2}{2g} > h_0$$

dva kořeny

$$t = \frac{v_i \pm \sqrt{v_i^2 - 2gh_0}}{g}.$$

Po prvním odrazu dosadíme $v_i = v_2 = 17,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a dostáváme kořeny $t_2 = 0,85$ s a $t'_2 = 2,65$ s.

Po druhém odrazu dosadíme $v_i = v_3 = 14,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a dostáváme kořeny $t_3 = 1,29$ s a $t'_3 = 1,74$ s.

Po třetím odrazu už míček do výše h_0 nevystoupí.

Od opuštění chlapcovy ruky tedy míček proletí ve výšce h_0 celkem pětkrát v časech 2,71 s, 4,22 s, 6,02 s, 8,16 s a 8,61 s. Nejsnáze jej zachytíme v posledních dvou případech, kdy je jeho rychlost nejmenší. **3 body**

4.a) $T_2 = 3T_1 = 900 \text{ K}$, $T_3 = \frac{T_2}{2} = \frac{3}{2}T_1 = 450 \text{ K}$, $T_4 = \frac{T_3}{3} = \frac{T_1}{2} = 150 \text{ K}$.

2 body

b) $W = \Delta p \cdot \Delta V = \frac{1}{2}p_1 \cdot 2V_1 = p_1 V_1 = 16 \cdot 10^3 \text{ J} = 16 \text{ kJ}$.

1 bod

c) Plyn přijímá teplo při dějích $1-2$ a $4-1$.

$$Q_{1-2} = nC_p(T_2 - T_1) = \frac{7}{2}R_m \cdot \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} \cdot 2T_1 = 7p_1 V_1,$$

$$Q_{4-1} = nC_V(T_1 - T_4) = \frac{5}{2}R_m \cdot \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} \cdot \frac{T_1}{2} = \frac{5}{4}p_1 V_1.$$

Celkové přijaté teplo:

$$Q = Q_{1-2} + Q_{4-1} = \frac{33}{4}p_1 V_1 = 132 \text{ kJ}.$$

2 body

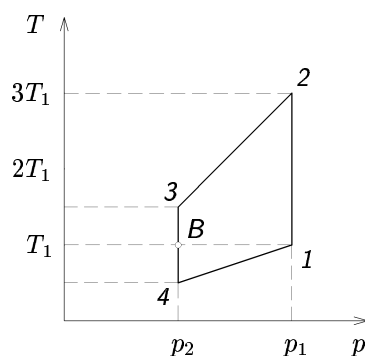
d) Účinnost kruhového děje:

$$\eta = \frac{W}{Q} = 0,12.$$

1 bod

e) Stejnou vnitřní energii jako v bodě 1 bude mít plyn při stejné teplotě T_1 . Protože $T_3 > T_1 > T_4$, leží hledaný bod na izobare 34 popsané rovnicí $p = p_2 = \frac{p_1}{2}$. Hledáme její průsečík s izotermou popsanou rovnicí $pV = p_1 V_1$. Po dosazení vyjde: $V = 2V_1$.

f)



Obr. R7

2 body

- 5.a) Teplo potřebné na zahřátí vody je $Q_1 = \rho V c(t_v - t_1)$, přičemž využití tepla dodaného vaříčem je vyjádřeno vztahem $Q_1 = \eta P \tau_1$. Příkon vaříče je

$$P = \frac{\rho V c(t_v - t_1)}{\eta \tau_1}, \quad \text{číselně } P = 826 \text{ W}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Stejnou úvahou dostaneme

$$t_2 = t_v - \frac{\eta P \tau_2}{\rho V c} = t_v - \frac{(t_v - t_1) \tau_2}{\tau_1}, \quad \text{číselně } t_2 = 57,5^\circ \text{C}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Označíme-li poměr objemů teplé a studené vody $V_2/V_1 = p$, přičemž $V_1 + V_2 = V$, je teplo potřebné na zahřátí do varu

$$Q_3 = \rho V_1 c(t_v - t_1) + \rho V_2 c(t_v - t_2) = \rho V c \left[\frac{t_v - t_1}{1 + p} + \frac{p(t_v - t_2)}{1 + p} \right],$$

přičemž $Q_3 = \eta P \tau_3$. Po dosazení a úpravách dostaneme

$$p = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_3 - \tau_2}, \quad \text{číselně } p = \frac{3}{2}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- 7.a) Výslednou sílu působící na automobil určíme z druhého pohybového zákona $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$. Rozjezd automobilu proběhl jako sled rovnoměrně zrychlených pohybů. Při zařazení vyššího rychlostního stupně se zrychlení automobilu po každé zmenšilo. Velikost zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu určíme pomocí vztahu $a = \Delta v / \Delta t$. Na počátku a na konci rozjezdu dostáváme:

$$a_1 = \frac{8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{5 \text{ s}} = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad F_1 = 1920 \text{ N},$$

$$a_2 = \frac{7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{20 \text{ s}} = 0,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad F_2 = 420 \text{ N}.$$

2 body

- b) Velikost okamžitého zrychlení nerovnoměrně zpomaleného pohybu při jízdě s vypnutým motorem určíme ze sklonu tečny ke grafu rychlosti (obr. R8). Na začátku a na konci tohoto pohybu dostáváme:

$$a_3 = \frac{30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{35 \text{ s}} = 0,857 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad F_3 = 1030 \text{ N},$$

$$a_4 = \frac{17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{100 \text{ s}} = 0,17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad F_4 = 204 \text{ N}.$$

2 body

- c) Při dojíždění automobilu jej brzdila jen konstantní složka odporové síly. Bezprostředně po vyřazení motoru se uplatnil především vírový odpor vzduchu.

$$F_k = F_4 = 204 \text{ N} \quad F_3 = F_4 + k v^2, \quad k = \frac{F_3 - F_4}{v^2} = 0,92 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2.$$

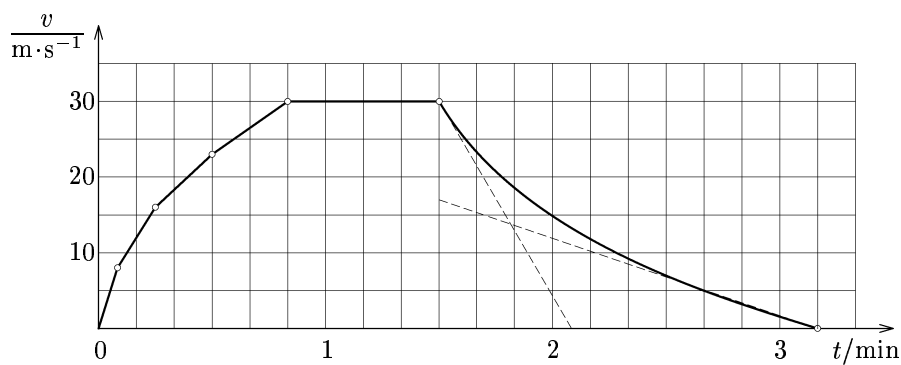
2 body

- d) Tažná sílu motoru měla na začátku rozjezdu velikost

$$F_{m1} = F_k + ma_1 \doteq 2120 \text{ N},$$

na konci rozjezdu $F_{m2} = F_k + kv^2 + ma_2 = F_3 + ma_2 = 1450 \text{ N}$. Na úseku s konstantní rychlostí byla síla motoru v rovnováze se silou odporovou: $F_m = F_3 = 1030 \text{ N}$. **2 body**

- e) Na konci rozjezdu dosáhl motor automobilu výkonu $P_2 = F_{m2}v = 43,5 \text{ kW}$, k udržení stálé rychlosti $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ postačil výkon $P = F_m v = 30,9 \text{ kW}$. **2 body**



Obr. R8