

Řešení úloh 2. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B

Autoři úloh: V. Vícha (1, 4), A. Zilberman (2, 3).

- 1.a) Práce potřebná k převrácení krychle je rovna změně potenciální energie při přechodu do labilní polohy:

$$W = mg\Delta H = mg \left(\frac{u}{2} - \frac{a}{2} \right) = \frac{mga(\sqrt{2} - 1)}{2} \doteq 5\,900 \text{ J}.$$

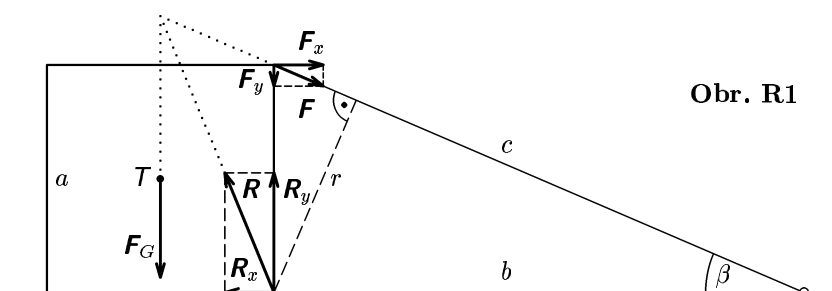
2 body

- b) Protože navíjení probíhá pomalu, můžeme zanedbat dynamický účinek síly lanka. Hledáme podmínky rovnováhy všech sil, které působí na krychli. Kromě tíhové síly $\mathbf{F}_G$ a síly lanka $\mathbf{F}$ je to ještě reakce podlahy $\mathbf{R}$, která působí v hraně, okolo které se krychle převrací (obr. R1). Vzhledem k této hraně se momenty sil $\mathbf{F}_G$ a $\mathbf{F}$ vzájemně ruší. Rameno r síly lanka určíme jako výšku pravoúhlého trojúhelníku:

$$P_{\Delta} = \frac{ab}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot r}{2}, \quad F_G \cdot \frac{a}{2} = F \cdot r, \quad mg \frac{a}{2} = F \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$F = \frac{mg\sqrt{a^2 + b^2}}{2b} \doteq 1,50 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

2 body



Obr. R1

- c) Z podmínek rovnováhy plyne:

$$R_x = F_x = F \cos \beta = F \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{mg}{2},$$

$$R_y = F_G + F_y = F_G + F \sin \beta = F_G + F \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = mg \left(1 + \frac{a}{2b} \right).$$

Aby krychle nesklouzla po podlaze, musí platit:

$$F_x = R_x \leq f R_y = f(F_G + F_y), \quad f \geq \frac{F_x}{F_G + F_y} = \frac{1}{2 + \frac{a}{b}} = \frac{b}{a + 2b} = 0,43.$$

2 body

- d) Podobně jako v části b) vyjdeme z momentové věty: $F_G \cdot r_1 = F \cdot r_2$. Rameno r_2 síly $\mathbf{F}$ určíme jako výšku trojúhelníku určeného stranami a , b a jimi sevřeným úhlem $\gamma = 90^\circ - \varphi$ (obr. R2). Platí:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \varphi},$$

$$P_\Delta = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ab \cos \varphi}{2} = \frac{r_2 c}{2} = \frac{r_2 \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \varphi}}{2},$$

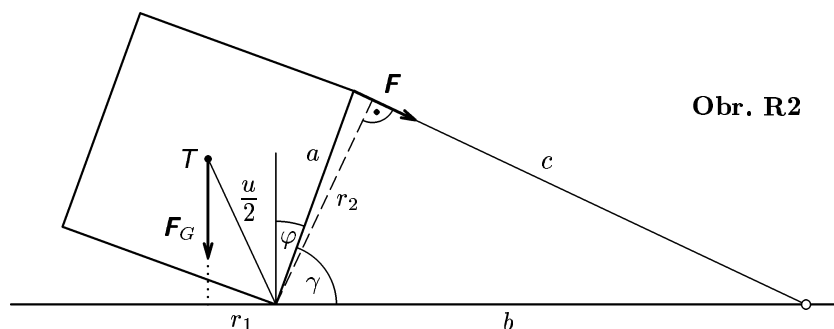
$$r_2 = \frac{ab \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \varphi}}, \quad r_1 = \frac{u}{2} \sin(45^\circ - \varphi) = \frac{a\sqrt{2}}{4} \sin(45^\circ - \varphi)$$

$$F = \frac{F_G \cdot r_1}{r_2} = \frac{mg\sqrt{2} \sin(45^\circ - \varphi) \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \varphi}}{4b \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 45^\circ.$$

3 body

Pro dané hodnoty dostaneme $F \doteq 940 \text{ N}$.

1 bod



Obr. R2

2. Proud I_1 vyjádříme podle Ohmova zákona jako podíl elektromotorického napětí zdroje a celkového odporu R_c :

$$I_1 = \frac{U_e}{R_c} = \frac{U_e}{R_A + \frac{R_V \cdot R}{R_V + R}}.$$

Napětí U_1 na paralelní kombinaci voltmetru s rezistorem je pak

$$U_1 = \frac{R_V \cdot R}{R_V + R} \cdot I_1 = \frac{R_V \cdot R}{R_V R_A + R_A R + R_V R} \cdot U_e. \quad (1)$$

2 body

Přemístěním rezistoru upravíme obvod podle obr. R3.

Ze zdroje odebíráme proud

$$I' = \frac{U_e}{R_V + \frac{R_A \cdot R}{R_A + R}}.$$

Na paralelní kombinaci ampérmetru s rezistorem vznikne napětí

$$U' = \frac{R_A \cdot R}{R_A + R} \cdot I' = \frac{R_A \cdot R}{R_V R_A + R_A R + R_V R} \cdot U_e,$$

ampérmetrem tedy prochází proud

$$I_2 = \frac{U'}{R_A} = \frac{R}{R_V R_A + R_A R + R_V R} \cdot U_e, \quad (2)$$

4 body

Porovnáním vztahů (1) a (2) dostaneme:

$$I_2 = \frac{U_1}{R_V}, \quad R_V = \frac{U_1}{I_2} = 800 \, \Omega.$$

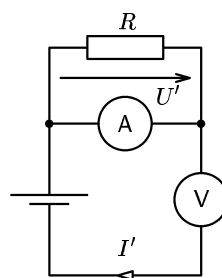
2 body

Zbývá určit odpor rezistoru. Z (1) plyne:

$$R = \frac{U_1 R_V}{R_V I_1 - U_1} = \frac{\frac{U_1^2}{I_2}}{\frac{U_1}{I_2} I_1 - U_1} = \frac{U_1}{I_1 - I_2} \doteq 270 \, \Omega.$$

2 body

Odpor ampérmetru a elektromotorické napětí zdroje z daných hodnot určit nelze.



Obr. R3

3.a) Z fázorových diagramů na obr. R4 plyne:

$$I_1^2 = (2I_R)^2 + I_C^2, \quad I_2^2 = I_R^2 + I_C^2.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$I_R^2 = \frac{I_1^2 - I_2^2}{3}, \quad I_C^2 = \frac{4I_2^2 - I_1^2}{3}, \quad I_R = 0,129 \text{ A} \quad I_C = 0,153 \text{ A}.$$

4 body

b) Odpor rezistorů a kapacita kondenzátorů jsou:

$$R = \frac{U}{I_R} \doteq 280 \, \Omega, \quad C = \frac{I_C}{2\pi f U} \doteq 14 \, \mu\text{F}.$$

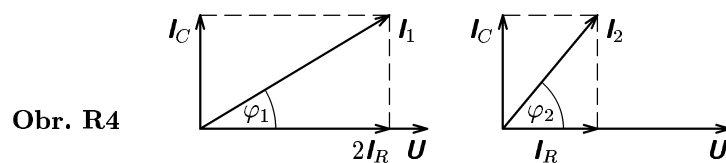
3 body

c) Z fázorových diagramů dále plyne:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{I_C}{2I_R} \doteq 31^\circ, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{I_C}{I_R} \doteq 50^\circ.$$

Proudy I_1 , I_2 předbíhají fázově před napětím zdroje o 31° a 50° .

3 body



4.a) Vydeme ze vztahu pro výpočet doby kyvu

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{D}} = \pi \sqrt{\frac{J}{mg}},$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, D směrový moment, d vzdálenost těžiště od osy otáčení, m hmotnost kyvadla a g tíhové zrychlení. Za daných zjednodušujících předpokladů je ve výšce h tíhové zrychlení

$$g \doteq a_g = \frac{\varkappa M_z}{(R_z + h)^2} = \frac{\varkappa M_z}{R_z^2} \cdot \frac{R_z^2}{(R_z + h)^2} = g_0 \frac{R_z^2}{(R_z + h)^2},$$

kde g_0 je tíhové zrychlení v nulové nadmořské výšce. Doba kyvu ve výšce h je

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{mg_0}} \cdot \frac{R_z + h}{R_z} = \tau_0 \cdot \frac{R_z + h}{R_z},$$

kde $\tau_0 = 1$ s je doba kyvu v nulové nadmořské výšce. Počet kmitů za jeden den ve výšce h je

$$N = \frac{86\,400 \text{ s}}{\tau} = \frac{86\,400 \text{ s}}{\tau_0} \cdot \frac{R_z}{R_z + h} = 86\,400 \left(1 - \frac{h}{R_z + h}\right) = 86\,400 - 5,4.$$

Po zvednutí do výše 400 m se hodiny za den zpozdí o 5,4 s.

5 bodů

- b) Vzroste-li teplota kyvadla, vzroste i vzdálenost těžiště od osy otáčení podle vztahu $d = d_1(1 + \alpha\Delta t)$, kde d_1 je vzdálenost při výchozí teplotě t_1 . Podle obdobného vztahu se zvětší také vzdálenosti jednotlivých částic kyvadla od osy otáčení. Proto

$$D = mgd = mgd_1(1 + \alpha\Delta t) = D_1(1 + \alpha\Delta t),$$

$$J = \sum m_i r_i^2 = J_1(1 + \alpha\Delta t)^2,$$

kde J_1 a D_1 jsou moment setrvačnosti a směrový moment při výchozí teplotě t_1 . Změní se i doba kyvu podle vztahu

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{D}} = \pi \sqrt{\frac{J_1}{D_1}} \cdot \sqrt{1 + \alpha\Delta t} = \tau_1 \sqrt{1 + \alpha\Delta t},$$

kde $\tau_1 = 1 \text{ s}$ je doba kyvu při výchozí teplotě t_1 . Počet kyvů za den bude

$$N = \frac{86\,400 \text{ s}}{\tau} = \frac{86\,400 \text{ s}}{\tau_1 \sqrt{1 + \alpha \Delta t}} = \frac{86\,400}{\sqrt{1 + \alpha \Delta t}} \doteq \\ \doteq 86\,400 \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{2} \right) = 86\,400 - 5,2.$$

Po zahřátí o 10 K se hodiny za den zpozdí o 5,2 s.

5 bodů