

**ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 38. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY. Kategorie D**

- 1.a) b) Celkovou dráhu s proběhl běžec za dobu t . Dráhu prvního úseku s_1 proběhl se zrychlením a za dobu t_1 . Dráhu druhého úseku $s-s_1$ proběhl rychlostí v_2 za dobu $t-t_1$. Platí vztahy

$$v_2 = at_1, \quad s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{v_2 t_1}{2} = \frac{v_2^2}{2a}, \quad s - s_1 = v_2(t - t_1).$$

2 body

Z toho: $s - s_1 = v_2 t - v_2 t_1 = v_2 t - 2s_1, \quad v_2 = \frac{s + s_1}{t},$

$$t_1 = \frac{2s_1}{v_2} = \frac{2s_1 t}{s + s_1}, \quad a = \frac{v_2}{t_1} = \frac{(s + s_1)^2}{2s_1 t^2}.$$

Pro dané hodnoty: $v_2 = 10,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad t_1 = 5,50 \text{ s}, \quad a = 1,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$

3 body

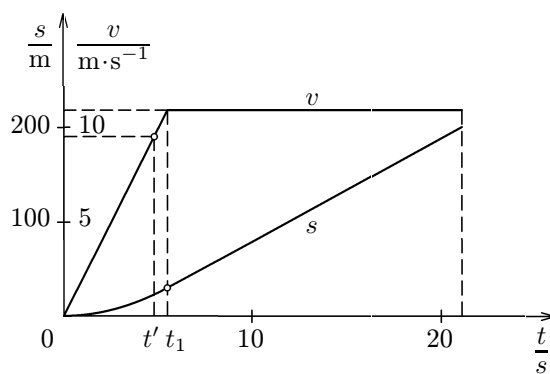
- c) Průměrná rychlost celého pohybu byla $v_p = s/t = 9,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Této rychlosti běžec dosáhl na prvním úseku dráhy v čase

$$t' = \frac{v_p}{a} = \frac{2ss_1 t}{(s + s_1)^2} = 4,79 \text{ s}.$$

Poznámka: Náš model je oproti skutečnému pohybu značně zjednodušen a vypočítané hodnoty s výjimkou průměrné rychlosti platí jen přibližně.

2 body

d)



Obr. R1

3 body

- 2.a) V bazénu urazí plavec dráhu $s_0 = 200$ m rychlostí v za dobu $t_0 = s_0/v$. V řece urazí plavec vyměřenou dráhu $s_0/2$ po proudu za dobu t_1 a proti proudu za dobu t_2 . Pro celkovou dobu t dostaneme:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\frac{s_0}{2}}{v+u} + \frac{\frac{s_0}{2}}{v-u} = \frac{s_0 v}{v^2 - u^2} = \frac{t_0}{1 - \frac{u^2}{v^2}}.$$

Pro $0 < u < v$ vychází $t > t_0$.

2 body

b) $t = 2t_0$, jestliže $\frac{u^2}{v^2} = \frac{1}{2}$, $v = u\sqrt{2}$.

3 body

c) Jestliže $u = v/2$, platí

$$t = t' = \frac{t_0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}t_0.$$

Za dobu t' urazí plavec vzhledem k vodě dráhu

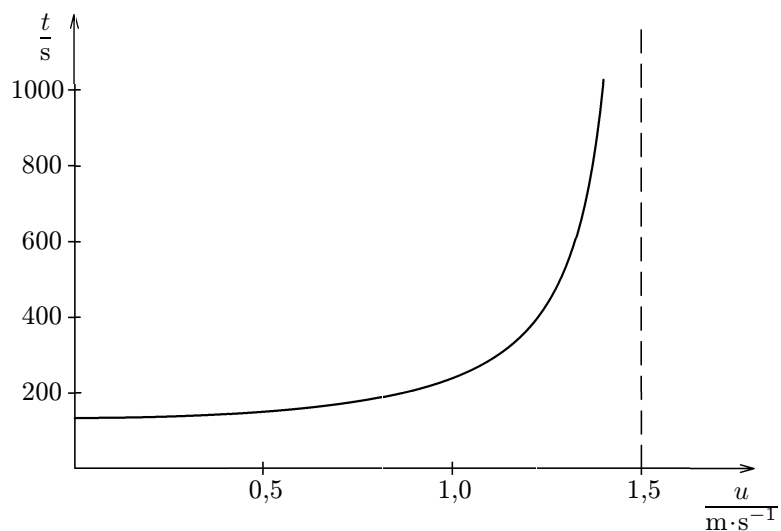
$$s' = vt' = \frac{4}{3}vt_0 = \frac{4}{3}s_0 = 267 \text{ m}.$$

2 body

d) Dosazením číselných hodnot dostaneme:

$$\{t\} = \frac{\{s_0\}\{v\}}{\{v\}^2 - \{u\}^2} = \frac{300}{2,25 - \{u\}^2}.$$

Graf:



Tabulka k sestrojení grafu:

$u/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
t/s	133	136	144	159	186	240	370	1034

3 body

- 3.a) Tahová síla motoru je podle 2. pohybového zákona rovna časové změně hybnosti plynů vytékajících z rakety:

$$F = \frac{|\Delta m| \cdot u}{\Delta t} = Q_m \cdot u. \quad \text{Z toho} \quad Q_m = \frac{F}{u} = 11\,628 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}.$$

3 body

- b) Zrychlení v okamžiku startu mělo velikost

$$a_0 = \frac{F}{m_0} - g = 2,09 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

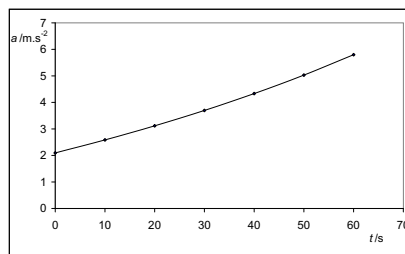
1 bod

- c) Závislost velikosti zrychlení na čase vyjadřuje vztah:

$$a = \frac{F}{m} - g = \frac{F}{m_0 - Q_m t} - g.$$

Graf je na obr. R2.

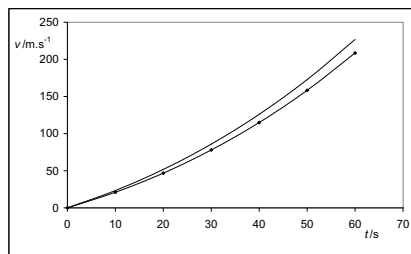
$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{a}{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$	$\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$	$\frac{s}{\text{m}}$
0	2,095	0	0
10	2,585	20,95	105
20	3,117	46,80	443
30	3,697	77,97	1067
40	4,332	114,95	2031
50	5,029	158,27	3398
60	5,799	208,56	5232



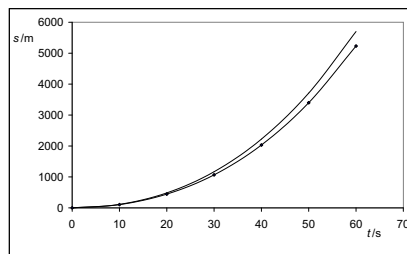
Obr. R2

2 body

- d) Výsledky numerických výpočtů rychlosti a dráhy jsou v tabulce, grafy na obr. R3, R4.



Obr. R3



Obr. R4

4 body

Poznámka: V grafech jsou také vyznačeny časové průběhy rychlosti a dráhy vypočítané podle přesných vztahů získaných integrací pohybové rovnice:

$$v = u \cdot \ln \frac{m_0}{m_0 - Q_m t} - gt, \quad s = ut + u \left(t - \frac{m_0}{Q_m} \right) \ln \frac{m_0}{m_0 - Q_m t} - \frac{1}{2}gt^2.$$

Podle nich vychází $v_{60} = 226,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $s_{60} = 5701 \text{ m}$. K přesným hodnotám se přiblížíme i naší numerickou metodou, zmenšíme-li časový krok Δt . Pro $\Delta t = 1 \text{ s}$ dostaneme $v_{60} = 225,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $s_{60} = 5651 \text{ m}$. Pro $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ se výsledky přibližného výpočtu s přesnými hodnotami prakticky shodují.

4. Uvažujme neinerciální vztažnou soustavu pevně spojenou s vagónem. V mezní situaci, tj. roura je v rovnovážné poloze vratké, protíná výslednice $\mathbf{F}$ tíhové síly $\mathbf{F}_G$ a setrvačné síly $\mathbf{F}_s$ osu otáčení. Síly mají působiště v těžišti roury.

- a) Při brzdění na přímé trati v mezní situaci platí

$$\frac{F_s}{F_G} = \frac{ma}{mg} = \frac{d}{3d} = \frac{1}{3},$$

Z rovnice plyne

$$a = \frac{g}{3} = 3,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

3 body

- b) Při rovnoměrné jízdě v zatáčce se uplatní setrvačná síla odstředivá. V mezní situaci platí

$$\frac{F_s}{F_G} = \frac{ma_d}{mg} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg} = \frac{d}{3d} = \frac{1}{3},$$

kde v je velikost rychlosti vlaku a a_d je velikost dostředivého zrychlení vagonu vzhledem k inerciální soustavě spojené se Zemí. Z rovnice plyne

$$v = \sqrt{\frac{rg}{3}} = 30,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- c) Při brzdění v zatáčce je výsledná setrvačná síla vektorovým součtem tečné setrvačné síly a odstředivé setrvačné síly, které jsou k sobě kolmé. Platí

$$\frac{F_s}{F_G} = \frac{\sqrt{((ma_t)^2 + ma_d)^2}}{mg} = \frac{\sqrt{a_t^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}}{g} = 0,26.$$

Protože $\frac{F_s}{F_G} < \frac{1}{3}$, roura se nepřevrátí.

4 body

- 5.a) Označme h_T počáteční výšku těžiště krychle nad vodorovnou rovinou a r poloměr otáčení těžiště kolem hrany krychle. Pak práce nutná k jednomu překlopení krychle je

$$W_0 = mg(r - h_T) = mg \frac{\sqrt{2} - 1}{2} a.$$

Při přemístění do vzdálenosti d musíme krychli překlopot N krát, kde $N = d/a$. Celková práce nutná k přemístění bloku překlápěním je

$$W = NW_0 = mgd \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 3\,400 \text{ J}.$$

4 body

- b) Z rovnosti vykonané práce W a potenciální energie krychle ve výšce h plyne

$$h = \frac{W}{mg} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} d = 2,5 \text{ m}.$$

2 body

- c) Práce nutná k přemístění bloku posunutím je $W_1 = fmgd$. Z nerovnosti $W_1 < W$ plyne

$$f < \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0,21.$$

4 body

- 7.a) Tloušťka plechu je mnohem menší než ostatní rozměry bóje. V takovém případě můžeme objem plechu dostatečně přesně určit ze vztahu

$$V = (2\pi r^2 + 2\pi rh)d = 2\pi r(r + h)d.$$

Tíha válce je

$$G = V \varrho_1 g = 2\pi r(r + h)d \varrho_1 g.$$

Tíha vody stejného objemu jako objem válce je

$$G_0 = \pi r^2 h \varrho_0 g.$$

Z podílu $\frac{G}{G_0} = \frac{2(r + h)d \varrho_1}{r h \varrho_0} = 0,16 < 1$ plyne, že bóje bude plavat.

4 body

- b) Platí

$$2\pi r(r + h)d_1 \varrho_1 g = \pi r^2 \frac{h}{2} \varrho_0 g,$$

z čehož

$$d_1 = \frac{r h \varrho_0}{4(r + h) \varrho_1} = 4,6 \text{ mm}.$$

4 body

- c) Jelikož užitím hliníkového plechu bude hmotnost bóje menší než hmotnost ocelové bóje, tím spíše bude plavat.

Z výsledku b) plyne pro tloušťku plechu

$$d_2 = \frac{r h \varrho_0}{4(r + h) \varrho_2} = 13,2 \text{ mm}.$$

2 body

Autoři úloh: J. Hradecká (5), J. Jírů (2, 3, 4), P. Šedivý (6) a I. Volf (1, 7)