

**ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 38. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY. Kategorie C**

- 1.a) Je-li soustava v rovnováze, musí být výsledný moment vzhledem k libovolně zvolené ose otáčení nulový. Osu otáčení zvolíme v místě podpěry. Síla, kterou působí chlapec na lano, je stejně velká jako síla, kterou působí lano na těleso o hmotnosti m_2 . Velikost této síly označíme F . Z podmínky rovnováhy

$$d_3 m_3 g + d_4 m_4 g + F d_2 = m_1 d_1 g + m_2 d_2 g + F d_4$$

odvodíme:

$$F = g \frac{m_3 d_3 + m_4 d_4 - m_1 d_1 - m_2 d_2}{d_4 - d_2} = g \frac{m_3 + 7m_4 - 5m_1 - 3m_2}{4} = 370 \text{ N}.$$

Velikost síly, kterou působí chlapec na lano, je asi 370 N. 3 body

- b) Minimální hmotnost má chlapec, který za lano netáhne vůbec, tedy $F_{\min} = 0$. Z podmínky rovnováhy určíme hmotnost chlapce:

$$d_3 m_3 g + d_4 m_{4\min} g = d_1 m_1 g + d_2 m_2 g,$$

$$m_{4\min} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 - m_3 d_3}{d_4} = \frac{5m_1 + 3m_2 - m_3}{7} = 29 \text{ kg}.$$

3 body

Maximální síla, kterou může chlapec působit, má velikost $F_{\max} = m_2 g$. Potom těleso o hmotnosti m_2 na kládu nepůsobí. Vyjádříme opět podmínku pro rovnovážný stav:

$$d_1 m_1 g = d_3 m_3 g + d_4 m_{4\max} g - d_2 m_2 g,$$

$$m_{4\max} = \frac{m_1 d_1 - m_3 d_3 + m_2 d_4}{d_4} = \frac{5m_1 - m_3 + 7m_2}{7} = 51 \text{ kg}.$$

3 body

Velikost síly, kterou chlapec působí na lano, je ve druhém případě $F_{\max} = m_2 g = 390 \text{ N}$; velikost síly může tedy být z intervalu $\langle 0 \text{ N}, 390 \text{ N} \rangle$. **1 bod**

Hmotnost chlapce může ležet v intervalu $\langle 29 \text{ kg}, 51 \text{ kg} \rangle$, tomu odpovídá interval sil $\langle 0 \text{ N}, 390 \text{ N} \rangle$.

- 2.a) Na konci děje je v nádobě voda o teplotě $t_3 < t_1$, voda z první nádoby odevzdala teplo

$$Q_1 = m_1 c(t_1 - t_3).$$

Ve druhé nádobě bude voda o teplotě $t_4 > t_2$, voda přijala teplo

$$Q_2 = m_2 c(t_4 - t_2).$$

Obě nádoby jsou tepelně izolované, tedy platí: $Q_1 = Q_2$. Porovnáním obou tepel určíme teplotu t_4 :

$$t_4 = t_2 + \frac{m_1}{m_2}(t_1 - t_3) = 25^\circ\text{C}.$$

5 bodů

- b) Hmotnost přeléváné vody označíme m . Pro přelití tohoto množství vody z první nádoby do druhé platí:

$$m(t_1 - t_4) = m_2(t_4 - t_2).$$

Po dosazení za t_4 určíme hmotnost m :

$$m = m_1 m_2 \frac{t_1 - t_3}{m_2(t_1 - t_2) - m_1(t_1 - t_3)} = 0,14 \text{ kg}.$$

5 bodů

Teplota vody ve druhé nádobě bude po ukončení děje 25°C , hmotnost přeléváné vody je $0,14 \text{ kg}$.

- 3.a) Ze stavové rovnice plyne, že absolutní teplota je přímo úměrná součinu pV . Teplota ve stavu zobrazeném bodem B je tedy $T_B = T_{\max}$, teplota ve stavu zobrazeném bodem D je $T_D = T_{\min}$.

Bod A : $p_A = p_1$, $V_A = V_1$, $T_A = \frac{p_1 V_1}{n R_m} = 361 \text{ K}.$

Bod B : $p_B = p_1$, $T_B = T_{\max}$, $V_B = V_A \frac{T_{\max}}{T_A} = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$

Bod D : $T_D = T_{\min}$, $V_D = V_1$, $p_D = p_1 \frac{T_{\min}}{T_A} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$

Bod C : $p_C = p_D$, $V_C = V_B$, $\frac{T_C}{T_{\min}} = \frac{T_{\max}}{T_A}$, $T_C = \frac{T_{\min} T_{\max}}{T_A} = 499 \text{ K}.$

Upřesněný diagram p, V je na obr. R1a.

2 body

- b) Obr. R1b, R1c.

2 body

- c) Celková práce vykonaná plynem při kruhovém ději je dána obsahem plochy p, V diagramu: $W' = (p_A - p_D)(V_B - V_A)$. Po dosazení z části a) a úpravě obdržíme pro práci vztah:

$$W' = p_1 \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_A} \right) V_1 \left(\frac{T_{\max}}{T_A} - 1 \right) = 335 \text{ J.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- d) Ke stanovení termodynamické účinnosti musíme určit teplo přijaté plynem během kruhového děje. Plyn teplo přijímá při dějích AB a DA :

$$Q = Q_{AB} + Q_{DA} = nC_p(T_{\max} - T_A) + nC_V(T_A - T_{\min}),$$

$$Q = nR_m \left[\frac{5}{2}(T_A - T_{\min}) + \frac{7}{2}(T_{\max} - T_A) \right] = 8220 \text{ J.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

$$\text{Pro účinnost platí: } \eta = \frac{W'}{Q} = 0,041 = 4,1\%.$$

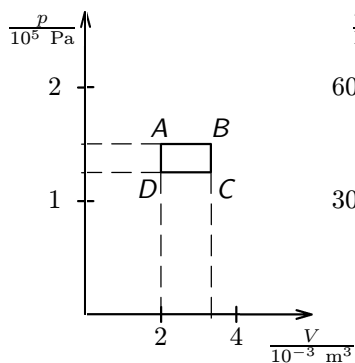
1 bod

- e) Účinnost Carnotova cyklu je dána vztahem:

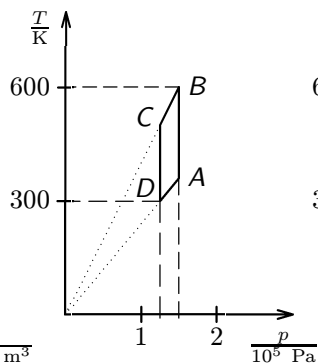
$$\eta_c = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = 0,5 = 50\%.$$

1 bod

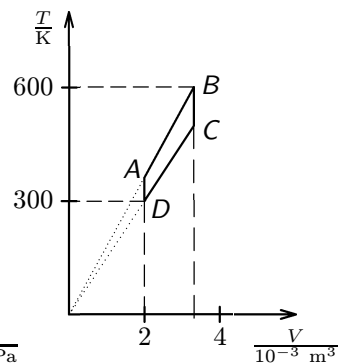
Práce vykonaná během kruhového děje je 335 J, účinnost zařízení je asi 4,1%, což je mnohem méně než účinnost Carnotova cyklu při stejné maximální a minimální teplotě. Účinnost Carnotova cyklu je 50%.



Obr. R1a



Obr. R1b



Obr. R1c

4. Objem kapaliny, která vystoupí vlivem kapilární elevace o délku x nad původní výšku, musí být stejně velký jako objem ponořené části přepážky. Z obr. 3 v zadání plyne:

$$\frac{ab2h}{3} = adx, \quad \text{odsud} \quad b = \frac{3dx}{2h}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Musíme určit výšku kapilární elevace x . Povrchová síla, která elevaci vyvolá, je dána vztahem $F_p = 2\sigma a$.

(Sílu, která působí na kratších stranách o délce d , zanedbáme.)

Tíha kapaliny o výšce x je $G = adx\rho g$. Platí:

$$F_p = G, \quad \text{odsud} \quad x = \frac{2\sigma}{\rho g d}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Kapalina ovšem při elevaci nemůže vystoupit nad okraj nádoby. Proto

$$x < \frac{h}{3}, \quad d > \frac{6\sigma}{\rho g h} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Dosadíme do vztahu pro b :

$$b = \frac{3\sigma}{\rho g h} = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Aby kapalina v široké části zůstala ve stejné výšce, musí mít přepážka tloušťku 0,38 mm a její vzdálenost od stěny musí být větší než 0,75 mm.

5. c) Pohyb válce můžeme v inerciální vztažné soustavě spojené s válcovou plochou popsat jako složený z posuvného pohybu osy válce a z otáčivého pohybu okolo této osy. Na válec působí tíhová síla $\mathbf{F}_G$ a reakce válcové plochy $\mathbf{F}$. Obě síly rozložíme do směrů tečny a normály k válcové ploše (obr. R2). Složky ve směru tečny určují tečné zrychlení osy válce $\mathbf{a}_t$ a složky ve směru normály určují zrychlení normálové $\mathbf{a}_n$. Úhlové zrychlení válce určuje tečná složka reakce, což je síla smykového tření $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_t$. Platí pohybové rovnice:

$$ma_t = F_1 - F_3, \quad ma_n = \frac{mv^2}{R-r} = F_4 - F_2, \quad F_3 r = J\varepsilon,$$

kde $J = mr^2/2$ je moment setrvačnosti válce, v je velikost okamžité rychlosti jeho osy. Nedochází-li ke smyku, platí

$$v = \omega r, \quad a_t = \varepsilon r,$$

kde ω a ε jsou úhlová rychlost a úhlové zrychlení válce. Z pohybových rovnic odvodíme:

$$F_3 = J \frac{\varepsilon}{r} = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{a_t}{r^2} = \frac{ma_t}{2},$$

$$F_1 = mg \sin \alpha = F_3 + ma_t = 3F_3, \quad F_3 = F_t = \frac{mg \sin \alpha}{3}.$$

3 body

Ze zákona zachování energie plyne:

$$\begin{aligned} mg(R-r)(1 - \cos \alpha_m) &= mg(R-r)(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \\ &= mg(R-r)(1 - \cos \alpha) + \frac{3}{4}mv^2, \end{aligned}$$

$$\frac{mv^2}{R-r} = \frac{4}{3}mg(\cos \alpha - \cos \alpha_m), \quad F_4 = F_2 + ma_n = \frac{7}{3}mg \cos \alpha - \frac{4}{3}mg \cos \alpha_m,$$

$$v = 2\sqrt{\frac{g(\cos \alpha - \cos \alpha_m)(R-r)}{3}}.$$

Podle principu akce a reakce působí válec na válcovou plochu silou $-\mathbf{F}$ o velikosti $F = \sqrt{F_3^2 + F_4^2}$, která svírá s normálou válcové plochy úhel $\beta = \arctg(F_3/F_4)$.

Pro dané hodnoty:

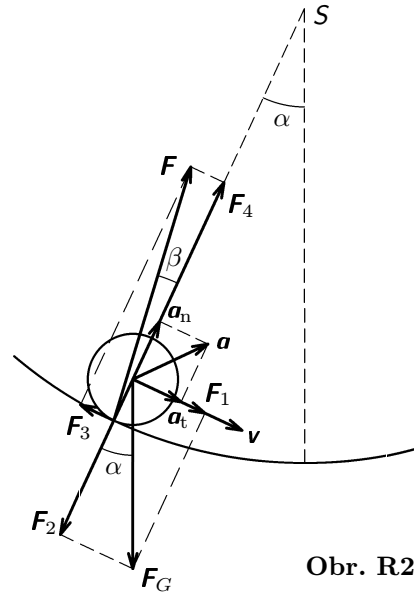
$$v = 1,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad F_3 = 0,42 \text{ N},$$

$$F_4 = 5,70 \text{ N}, \quad F = 5,71 \text{ N},$$

$$\beta = 4,2^\circ.$$

V poloze určené úhlem $\alpha = 15^\circ$ se osa válce pohybuje rychlostí o velikosti $1,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Válec působí na válcovou plochu silou o velikosti $5,71 \text{ N}$, která svírá s normálou úhel $4,2^\circ$.

3 body



Obr. R2

- b) V rovnovážné poloze platí: $\alpha = 0$, $F_3 = 0$, $\beta = 0$,

$$v = 2\sqrt{\frac{g(1 - \cos \alpha_m)(R - r)}{3}}, \quad F = F_4 = \frac{7}{3}mg - \frac{4}{3}mg \cos \alpha_m.$$

Pro dané hodnoty: $v = 1,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $F = 6,1 \text{ N}$.

Rychlost osy válce při průchodu rovnovážnou polohou má velikost $1,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a válec zde působí na válcovou plochu svislou silou o velikosti $6,1 \text{ N}$.

2 body

- a) Aby nedošlo ke smyku válce po válcové ploše, musí během celého pohybu platit $F_t = F_3 \leq f \cdot F_4$. V počáteční poloze je F_3 největší a F_4 nejmenší. Postačující podmínkou, aby nedošlo ke smyku je tedy

$$\frac{mg \sin \alpha_m}{3} \leq f \cdot mg \cos \alpha_m, \quad \text{tg } \alpha_m \leq 3f.$$

Pro dané hodnoty: $\text{tg } 35^\circ = 0,700 < 3 \cdot 0,35 = 1,05$.

Podmínka, aby nedošlo ke smyku válce, je pro dané hodnoty splněna.

2 body

- 7.a)** Po dobu vysouvání papíru zpod válečku působí na váleček tíhová síla F_G a reakce papíru R , jejíž svislá složka R_2 ruší účinek tíhové síly a vodorovná složka $R_1 = F_t$ je smykové tření, které vyvolá pohyb válečku (obr.R3a). V inerciální vztažné soustavě spojené se stolem popíšeme tento pohyb jako složený z posuvného rovnoměrně zrychleného pohybu hmotného středu válečku ve směru pohybu papíru a z rovnoměrně zrychleného otáčivého pohybu válečku okolo jeho osy. Platí pohybové rovnice

$$F_t = ma_1, \quad F_t r = J\varepsilon_1,$$

kde a_1 je velikost zrychlení hmotného středu válečku, ε_1 je velikost úhlového zrychlení válečku a $J = mr^2/2$ je moment setrvačnosti válečku. Jestliže nenastane smyk, platí

$$a - a_1 = r\varepsilon_1.$$

Řešením pohybových rovnic dojdeme ke vztahům:

$$a_1 = \frac{a}{3}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2a}{3r}, \quad F_t = \frac{1}{3}ma.$$

Aby nenastal smyk válečku po papíru, musí platit

$$F_t \leq f_1 mg. \quad \text{Z toho} \quad a \leq 3f_1 g.$$

Pro dané hodnoty: $a_1 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\varepsilon = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$, $a \leq 8,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Ke smyku válečku po papíru nedojde. Hmotný střed válečku se během vysouvání papíru pohybuje vzhledem k desce stolu rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti $1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4 body

- b) Váleček během doby t_1 vysouvání papíru získá úhlovou rychlost o velikosti ω_1 , jeho hmotný střed se posune do vzdálenosti s_1 a získá rychlost o velikosti v_1 . Platí:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{2} + s_1 &= \frac{1}{2} a t_1^2 \\ s_1 &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \end{aligned} \right\} \frac{\frac{l}{2} + s_1}{s_1} = \frac{a}{a_1} = 3, \quad s_1 = \frac{l}{4}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{3l}{2a}}, \quad \omega_1 = \varepsilon_1 t_1 = \frac{2a}{3r} \sqrt{\frac{3l}{2a}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2la}{3}},$$

$$v_1 = a_1 t_1 = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{3l}{2a}} = \sqrt{\frac{al}{6}}.$$

Pro dané hodnoty:

$$s_1 = 7,0 \text{ cm}, \quad t_1 = 0,37 \text{ s}, \quad \omega_1 = 37 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_1 = 0,37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V okamžiku vysunutí papíru zpod válečku bude jeho hmotný střed vzdálen od počáteční polohy o 7 cm a jeho rychlost bude mít velikost $0,37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Úhlová rychlost válečku bude mít velikost $37 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

3 body

- c) Po vysunutí papíru zpod válečku působí na váleček tíhová síla $\mathbf{F}_G$ a reakce papíru $\mathbf{R}'$, jejíž svislá složka $\mathbf{R}'_2$ ruší účinek tíhové síly a vodorovná složka $\mathbf{R}'_1 = \mathbf{F}'_t$ je smykové tření, které brzdí pohyb válečku (obr. R3b). V inerciální vztažné soustavě spojené se stolem popíšeme pohyb válečku jako složený z posuvného rovnoměrně zpomaleného pohybu hmotného středu válečku a z rovnoměrně zpomaleného otáčivého pohybu válečku okolo jeho osy. Platí pohybové rovnice

$$F'_t = m a_2, \quad F'_t r = J \varepsilon_2.$$

Váleček klouže po stole a smykové tření má velikost $F'_t = m g f_2$. Řešením pohybových rovnic dostaneme pro velikost a_2 zrychlení hmotného středu a pro velikost ε_2 úhlového zrychlení:

$$a_2 = \frac{F'_t}{m} = g f_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{F'_t r}{J} = \frac{2 g f_2}{r}.$$

Obě složky pohybu ustanou současně, neboť jejich brzdné doby jsou stejné:

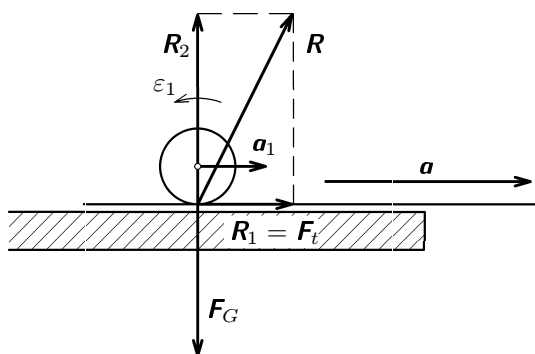
$$t_b = \frac{\omega_1}{\varepsilon_2} = \frac{\frac{1}{r} \sqrt{\frac{2la}{3}}}{\frac{2gf_2}{r}} = \frac{\sqrt{\frac{al}{6}}}{gf_2} = \frac{v_1}{a_2}.$$

Hmotný střed válečku se po vysunutí papíru posune do vzdálenosti

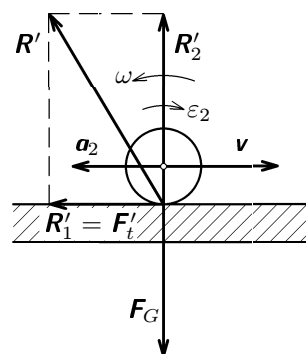
$$s_2 = \frac{v_1 t_b}{2} = \frac{v_1^2}{2a_2} = l \cdot \frac{a}{12gf_2}.$$

Pro dané hodnoty: $a_2 = 3,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\varepsilon_2 = 390 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$, $s_2 = 0,018 \text{ m} = 1,8 \text{ cm}$.

Po vysunutí papíru se váleček setrvačností sklouzne ještě do vzdálenosti 1,8 cm a zastaví se. **3 body**



Obr. R3a



Obr. R3b

Autorka úloh: R. Horáková