

Řešení úloh regionálního kola 38. ročníku FO, kat. B

Autoři úloh: M. Randa (1), V. Vícha (2, 3), R. Baník (4)

1. **úloha** Před přiložením otevřeného konce zatavené kapiláry k hladině se v kapiláře nachází vzduch o objemu $V_0 = \pi r^2 l$ a tlaku p_a . Po ponoření se objem zmenší na $V = \pi r^2 (l - x)$ a tlak vzroste na hodnotu p . Platí Boyleův-Mariottův zákon:

$$p_a V_0 = p V, \quad p = \frac{V_0}{V} p_a = \frac{l}{l - x} p_a. \quad (1)$$

2 body

Tlak v uzavřeném prostoru je roven součtu atmosférického tlaku a kapilárního tlaku zmenšenému o hydrostatický tlak sloupce kapaliny:

$$p = p_a + \frac{2\sigma}{r} - x \rho g. \quad (2)$$

2 body

Z kapilární elevace v otevřené kapiláře určíme

$$\sigma \cdot 2\pi r = \pi r^2 h \rho g, \quad \frac{2\sigma}{r} = h \rho g. \quad (3)$$

2 body

Spojením vztahů (1), (2), (3) dostaneme:

$$p_a \frac{l}{l - x} = p_a + h \rho g - x \rho g, \quad x^2 \rho g - x(p_a + h \rho g + l \rho g) + h l \rho g = 0,$$

2 body

Numerickým řešením této kvadratické rovnice dostaneme kořeny

$$x_1 = 11,24 \text{ m}, \quad x_2 = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Úloze vyhovuje druhý kořen. V zatavené kapiláře vystoupí voda jen do výše 2,6 mm.

2 body

2. úloha

- a) Na desce a válci vzniknou po připojení zdroje náboje $+Q_1$, $-Q_1$, jejichž velikost je určena napětím zdroje a počáteční kapacitou kondenzátoru. Protože zdroj odpojíme, náboje se během pohybu desky nemění. Platí:

$$Q_1 = U_1 C_1 = \frac{U_1 \varepsilon_0 S}{h} = \frac{U_1 \varepsilon_0 \pi d^2}{h}.$$

Během pohybu desky se kapacita kondenzátoru zvětšuje. Jeho elektrická energie, kterou určíme ze vztahu

$$E_{\text{el}} = \frac{Q_1^2}{2C} = \frac{\frac{U_1^2 \varepsilon_0^2 S^2}{2h^2}}{\frac{\varepsilon_0 S}{x}} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 S}{2h^2} x,$$

je přímo úměrná vzdálenosti x desek a během pohybu se zmenšuje. Působením elektrické přitažlivé síly F_{el} deska získává kinetickou energii, která je rovna úbytku elektrické energie kondenzátoru. Platí:

$$F_{\text{el}}(-\Delta x) = -\Delta E_{\text{el}} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 S}{2h^2}(-\Delta x), \quad F_{\text{el}} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 S}{2h^2} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8h^2} = \textit{konst.}$$

4 body

- b) V beztláčeném stavu na desku působí jen elektrická síla, která ji uvede do rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením

$$a = \frac{F_{\text{el}}}{m} = \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8mh^2}.$$

Z toho určíme dobu pohybu t :

$$h = \frac{1}{2}at^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \frac{4h}{U_1 d} \sqrt{\frac{hm}{\pi \varepsilon_0}}.$$

Po dosazení: $t = 21,5 \text{ s}$ ($F_{\text{el}} = 8,7 \cdot 10^{-5} \text{ N}$, $a = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). **3 body**

- c) V tíhovém poli Země působí na desku tíhová síla, která je mnohem větší než síla elektrická. Platí:

$$a = \frac{F_G + F_{\text{el}}}{m} = g + \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8mh^2}.$$

Z toho určíme rychlost dopadu:

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}, \quad v = \sqrt{2ha} = \sqrt{2h \left(g + \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8mh^2} \right)}.$$

Při nenabitém kondenzátoru $a = g$, $v' = \sqrt{2hg} \doteq 1,401 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Poměr obou rychlostí je

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{1 + \frac{U_1^2 \varepsilon_0 \pi d^2}{8mgh^2}} = 1,0000221.$$

Rychlosti se liší o $0,0000221v' \doteq 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, tedy zcela nepatrně. **3 body**

3. úloha

- a) Barycentrum rozděluje spojnici středů Země a Měsíce v převráceném poměru jejich hmotností:

$$\frac{x}{r-x} = \frac{M_M}{M_Z}, \quad x = \frac{rM_M}{M_Z + M_M} = 4\,667 \text{ km}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

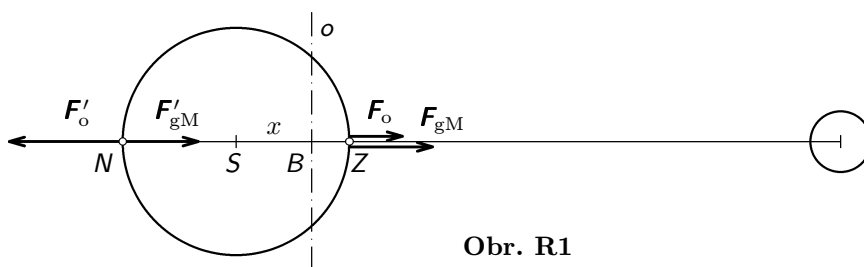
- b) Dostředivá síla, která nutí Zemi obíhat okolo barycentra, je gravitační síla Měsíce. Platí:

$$M_Z \frac{4\pi^2 x}{T^2} = \kappa \frac{M_Z M_M}{r^2}, \quad T = 2\pi r \sqrt{\frac{x}{\kappa M_M}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\kappa (M_Z + M_M)}}.$$

Po dosazení: $T = 27\text{d } 6\text{h } 38\text{ min.}$

3 body

c)



Obr. R1

$$\left. \begin{aligned} \text{V bodě } Z: \quad F_{gM} &= \kappa \frac{mM_M}{(r-R_Z)^2} = 3,4 \cdot 10^{-5} \text{ N} \\ F_o &= \frac{4\pi^2 m(R_Z - x)}{T^2} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_v &= 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ N} \\ &\text{od středu Země} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{V bodě } N: \quad F'_{gM} &= \kappa \frac{mM_M}{(r+R_Z)^2} = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ N} \\ F'_o &= \frac{4\pi^2 m(R_Z + x)}{T^2} = 7,8 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F'_v &= 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ N} \\ &\text{od středu Země} \end{aligned} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

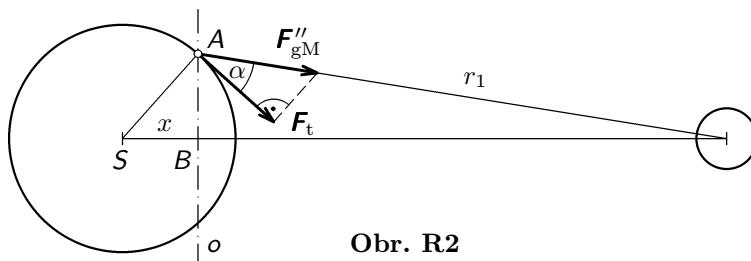
- d) V místech, kde osa o protíná povrch Země, bude F_o nulová. Stačí tedy určit tečnou složku složku gravitační síly F_{gM} . Podle obr. R2:

$$|AB| = \sqrt{R_Z^2 - x^2}, \quad r_1 = \sqrt{(r-x)^2 + |AB|^2} = \sqrt{r^2 - 2rx + R_Z^2} = 3,798 \cdot 10^8 \text{ m},$$

$$r^2 = R_Z^2 + r_1^2 - 2R_Z r_1 \cos(90^\circ + \alpha), \quad \sin \alpha = \frac{r^2 - R_Z^2 - r_1^2}{2R_Z r_1},$$

$$F_t = F''_{gM} \cos \alpha = \varkappa \frac{mM_M}{r_1^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 - R_Z^2 - r_1^2}{2R_Z r_1} \right)^2} = 2,37 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

3 body



Obr. R2

4. úloha

- a) V roztoku kyseliny sírové dochází k disociaci $\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 2\text{H}^+ + \text{SO}_4^{2-}$. Kationty H^+ vytvářejí s molekulami vody *oxoniové ionty* H_3O^+ a putují k záporné katodě kde se neutralizují za vzniku vodíku. Anionty SO_4^{2-} putují ke kladné anodě, kde odevzdávají elektrony a reagují s vodou za vzniku kyslíku.

2 body

- b) Při vyloučení molekuly kyslíku O_2 se na anodě uvolní 4 elektrony. Stejně velký náboj stačí na katodě ke vzniku dvou molekul vodíku H_2 . Proto objem plynu v trubici u katody roste rychleji než v trubici u anody. Počet N molekul plynu ve zcela zaplněné trubici určíme pomocí stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = \frac{NR_m}{N_A}, \quad N = \frac{N_A pV}{R_m T} = \frac{N_A L S \left(p_a + \frac{L}{2} \rho g \right)}{R_m T}.$$

Po dosazení: $N = 1,096 \cdot 10^{23}$.

($T = 293,15 \text{ K}$, $p = 1,109 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $V = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.) K vyloučení takového počtu molekul vodíku potřebujeme náboj

$$Q_1 = 2Ne = I\tau_1. \quad \text{Z toho: } \tau_1 = \frac{Q_1}{I} = \frac{2Ne}{I}.$$

Po dosazení: $Q_1 = 3,51 \cdot 10^4 \text{ C}$, $\tau_1 = 7,02 \cdot 10^4 \text{ s} = 19,5 \text{ h}$.

K vyloučení stejného počtu molekul kyslíku potřebujeme dvojnásobný náboj. Proto $\tau_2 = 2\tau_1 = 7,02 \cdot 10^4 \text{ s} = 39 \text{ h}$. Toto je také doba, za kterou budou zaplněny plynem obě trubice.

5 bodů

- c) Abychom získali N molekul kyslíku, musíme rozložit $2N$ molekul vody o relativní molekulové hmotnosti $M_r = 18,016$. Celková hmotnost rozložené vody je $m = 2NM_r m_u = 6,55 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$.

2 body