

**ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 38. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY. Kategorie B**

- 1.a) Otočením rotoru o 180° se objem plynu zvětší z V_1 na $V_2 = V_1 + V_s$. Tlak plynu klesne na p_2 a absolutní teplota na T_2 . Z Poissonova zákona a stavové rovnice odvodíme:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_s} \right)^\kappa = 9,86 \cdot 10^4 \text{ Pa},$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_s} \right)^{\kappa-1} = 293,98 \text{ K}, \quad t_2 = 20,8^\circ \text{C}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Pokud by platil předpoklad o adiabatickém rozpínání, dostali bychom při dalších pŕlotáčkách rotoru vývěvy posloupnost tlaků $\{p_i\}$:

$$p_3 = p_2 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_s} \right)^\kappa = p_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_s} \right)^{2\kappa} \dots p_i = p_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_s} \right)^{(i-1)\kappa}.$$

Odtud vyjádříme i jako funkci tlaku p_i :

$$\ln \frac{p_i}{p_1} = (i-1)\kappa \cdot \ln \frac{V_1}{V_1 + V_s}, \quad i = 1 + \frac{\ln \frac{p_i}{p_1}}{\kappa \cdot \ln \frac{V_1}{V_1 + V_s}}.$$

Pokles tlaku pod p_k nastane pro $i > 711,9$. Tomu odpovídá $N_1 = 356$ otáček rotoru vývěvy. Na konci čerpání by v nádobě byla teplota

$$T_k = T_1 \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 17,4 \text{ K}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Má-li tlak v nádobě zůstat pod hodnotou p_k i po vyrovnání teploty na t_1 , musí se látkové množství plynu zmenšit z počáteční hodnoty n_1 na hodnotu menší než

$$n_k = n_1 \frac{p_k}{p_1}.$$

Po jednotlivých pŕlotáčkách rotoru dostáváme posloupnost látkových množství $\{n_i\}$:

$$n_3 = n_2 \frac{V_1}{V_1 + V_s} = n_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_s} \right)^2 \dots n_i = n_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_s} \right)^{(i-1)}.$$

Odtud vyjádříme i jako funkci látkového množství n_i :

$$\ln \frac{n_i}{n_1} = (i-1) \ln \frac{V_1}{V_1 + V_s}, \quad i = 1 + \frac{\ln \frac{n_i}{n_1}}{\ln \frac{V_1}{V_1 + V_s}}.$$

Pokles tlaku pod p_k nastane pro $i > 996,3$. Tomu odpovídá $N_2 = 499$ otáček rotoru vývěvy. **3 body**

- d) Skutečný počet otáček rotoru potřebný k poklesu tlaku pod p_k bude větší, protože sání neprobíhá jako rovnovážný děj – v sacím prostoru bude menší tlak než v nádobě. Projeví se také netěsnosti šoupátek a válcového rotoru v místech dotyku se stěnami čerpací komory. **1 bod**

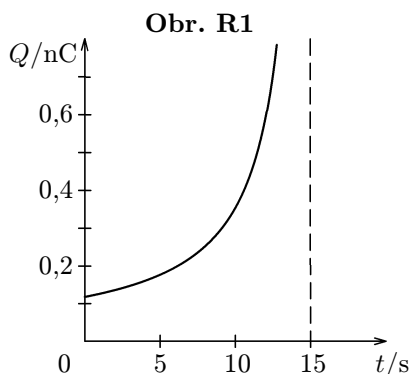
- 2.a) Pohyb desky až do dotyku s druhou deskou trvá po dobu

$$t_d = d/v = 15 \text{ s}.$$

V tomto časovém intervalu se náboj kondenzátoru zvětšuje podle vztahu

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{d - vt} = Q_0 \cdot \frac{d}{d - vt}, \quad (1)$$

kde $Q_0 = \frac{\varepsilon_0 SU}{d} = 0,118 \text{ nC}$ je počáteční náboj.



Závislost náboje kondenzátoru na čase je vyjádřena lomenou funkcí a grafem je úsek hyperboly (obr. R1). **2 body**

- b) V čase t' platí

$$Q' = \frac{\varepsilon_0 SU}{d - vt'}, \quad \text{z toho} \quad t' = \frac{dQ' - \varepsilon_0 SU}{Q'v} = 13,2 \text{ s}.$$

1 bod

- c) Posloupnosti časů $\{t_i\}$ časů odečítaných po jedné desetíně sekundy přísluší posloupnost $\{Q_i\}$ okamžitých nábojů na kondenzátoru. Průměrný proud v n -té desetíně sekundy je

$$I_n = \frac{Q_n - Q_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \frac{\varepsilon_0 SU v}{(d - vt_n)(d - vt_{n-1})}$$

Po dosazení $I_{100} = 6,9 \cdot 10^{-11} \text{ A}$, $I_{145} = 5,9 \cdot 10^{-9} \text{ A}$.

2 body

- d) Okamžitý nabíjecí proud v čase t je

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_0 SU}{d - vt} \right) = \frac{\varepsilon_0 SU v}{(d - vt)^2}$$

(Stejný výsledek dostaneme i v úloze c), pro velmi malý časový interval.

Pak $t_n \doteq t_{n-1} \doteq t$.)

2 body

e) Výsledná kapacita obou seriově spojených kondenzátorů je

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d - vt}}{\frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{\varepsilon_0 S}{d - vt}} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d - vt}.$$

Je stejná jako kapacita jediného kondenzátoru, jehož desky by měly vzdálenost $2d - vt$. Analogicky k úloze b):

$$Q'' = \frac{\varepsilon_0 S U}{2d - vt''}, \quad \text{z toho} \quad t'' = \frac{2dQ'' - \varepsilon_0 S U}{Q'' v} = 12,3 \text{ s}.$$

V čase t'' bude na pevném kondenzátoru napětí

$$U_1 = \frac{Q''}{C_1} = \frac{Q'' d}{\varepsilon_0 S} = 42,4 \text{ V}$$

a na pohyblivém kondenzátoru $U_2 = U - U_1 = 7,6 \text{ V}$.

3 body

3.a) Dobu kmitu T_1 kyvadla určíme ze vztahu

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}},$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a D je direkční moment kyvadla. Platí $D = mgd$, kde $d = a \frac{\sqrt{3}}{3}$ je vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení. Kyvadlo složeno ze tří tyčí délky a a hmotnosti $m/3$. Užitím Steinerovy věty dostaneme:

$$J = 3 \cdot \frac{1}{12} \frac{m}{3} a^2 + 2 \cdot \frac{m}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{2}.$$

Po dosazení

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{ma^2}{2}}{mga \frac{\sqrt{3}}{3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{2g}}.$$

4 body

Redukovanou délku l^* kyvadla určíme z rovnosti

$$2\pi \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^*}{g}}. \quad \text{Po úpravě} \quad l^* = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Redukovaná délka l^* našeho kyvadla je rovna výšce trojúhelníka. **3 body**

- b) Hmotný bod jsme umístili ve vzdálenosti od osy, která je rovna redukované délce kyvadla, doba kmitu se nezmění. Je to, jako by s původním kyvadlem současně kývalo matematické kyvadlo se stejnou dobou kmitu. Doba kmitu se přidáním hmotného bodu nezmění. Můžeme se o tom přesvědčit dosazením do obecného vztahu:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J + m \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{mga\frac{\sqrt{3}}{3} + mga\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{5}{4}ma^2}{\frac{5}{6}mga\sqrt{3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{2g}} = T_1.$$

3 body

- 4.a) Ke dnu komína dorazí všechny koule téměř současně rychlostí o velikosti $v = \sqrt{2gh}$. Pak začne série dokonale pružných rázů.

Po dokonale pružném přímém centrálním rázu dvou koulí o hmotnostech m_1 a m_2 , jejichž rychlosti měly před rázem souřadnice v_1 a v_2 , má druhá koule rychlost o souřadnici

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Při srážce první a druhé koule u dna komína platí:

$$m_2 = qm_1, \quad v_1 = v, \quad v_2 = -v.$$

Po srážce se druhá koule pohybuje vzhůru rychlostí

$$u_2 = \frac{2m_1v - (qm_1 - m_1)v}{m_1 + qm_1} = v \frac{3 - q}{1 + q} = v \left[\frac{2^2}{1 + q} - 1 \right].$$

Při srážce druhé a třetí koule u dna komína platí:

$$m_3 = qm_2, \quad v_2 = v \left[\frac{2^2}{1 + q} - 1 \right], \quad v_3 = -v.$$

Po srážce se třetí koule pohybuje vzhůru rychlostí

$$u_3 = \frac{2m_2v \left[\frac{2^2}{1 + q} - 1 \right] - (qm_2 - m_2)v}{m_2 + qm_2} = v \left[\frac{2^3}{(1 + q)^2} - 1 \right].$$

Matematickou indukcí dokažte, že poslední koule získá při odrazu od předposlední koule rychlost

$$u_n = v \left[\frac{2^n}{(1 + q)^{n-1}} - 1 \right] = \sqrt{2gh} \left[\frac{2^n}{(1 + q)^{n-1}} - 1 \right].$$

5 bodů

b) Nerovnice

$$u_n = v \left[\frac{2^n}{(1+q)^{n-1}} - 1 \right] = v \left[\left(\frac{2}{1+q} \right)^n (1+q) - 1 \right] > c$$

má za podmínky $v > 0$, $q \in (0; 1)$ řešení

$$\left(\frac{2}{1+q} \right)^n > \frac{\frac{c}{v} + 1}{1+q}, \quad n > \frac{\log \left(\frac{\frac{c}{\sqrt{2gh}} + 1}{1+q} \right)}{\log \left(\frac{2}{1+q} \right)}.$$

Pro dané hodnoty $n > 4,69$, tedy $n = 5$.

3 body

c) Celková mechanická energie soustavy pro $n = 5$ je

$$E_c = \frac{1}{2} v^2 \cdot \sum_{i=1}^5 m_i = \frac{1}{2} m_1 v^2 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}.$$

Pátá koule získala energii

$$E_5 = \frac{1}{2} m_1 q^4 u_5^2 = \frac{1}{2} m_1 q^4 v^2 \left[\frac{2^5}{(1+q)^4} - 1 \right]^2.$$

Energie poslední koule a celková mechanická energie jsou v poměru

$$\frac{E_5}{E_c} = \frac{q^4 \left[\frac{2^5}{(1+q)^4} - 1 \right]^2}{\frac{q^5 - 1}{q - 1}} = 0,0391.$$

Poslední koule tedy získala asi 3,9 % z celkové mechanické energie soustavy.

2 body

5. Samotný tónový generátor si můžeme představit jako sériové spojení ideálního zdroje harmonického napětí o efektivní hodnotě U_0 a vnitřního odporu R_i . Odebíráme-li z generátoru proud I , klesne jeho svorkové napětí na

$$U = U_0 - R_i \cdot I. \quad \text{Z toho} \quad R_i = \frac{U_0 - U}{I} = 3,0 \text{ k}\Omega.$$

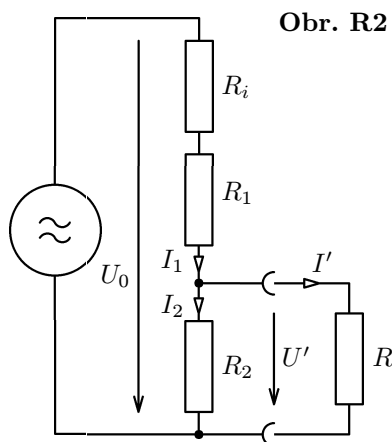
2 body

Tónový generátor s děličem napětí překreslíme podle obr. R2. Označme U' napětí na výstupních svorkách děliče, jestliže z nich odebíráme proud I' . Rezistorem o odporu R_2 přitom prochází proud I_2 a generátor dodává proud I_1 . Platí:

$$I_2 = \frac{U'}{R_2}, \quad I_1 = I' + I_2,$$

$$U' + I_1(R_1 + R_i) = U_0.$$

2 body



Spojením těchto vztahů a úpravami dostaneme:

$$U' + \left(I' + \frac{U'}{R_2} \right) (R_1 + R_i) = U_0,$$

$$U' = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_i} - \frac{(R_1 + R_i) R_2}{R_1 + R_2 + R_i} \cdot I' = U'_0 - R'_i I'. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Podle zadání

$$U'_0 = \frac{10 \text{ V} \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_i} = 100 \text{ mV}, \quad R'_i = \frac{(R_1 + R_i) R_2}{R_1 + R_2 + R_i} = 75 \Omega.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$R_2 = \frac{100}{99} R'_i = 75,8 \Omega, \quad R_1 = 99 R_2 - R_i = 99 R_2 - 3,0 \text{ k}\Omega = 4\,500 \Omega.$$

3 body

7. Pod zakřiveným povrchem vody v kapiláře o průměru d se sníží tlak oproti tlaku atmosférickému o

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma \cos \vartheta}{d}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Podtlak v užší části kapiláry je větší než v části širší. V rovnovážné poloze po nadzvednutí užší části kapiláry vyrovnáme rozdíl kapilárních tlaků hydrostatickým tlakem nakloněného sloupce vody:

$$p_{\text{at}} - \frac{4\sigma \cos \vartheta}{d_1} + \rho g h = p_{\text{at}} - \frac{4\sigma \cos \vartheta}{d_2}, \quad h = \frac{4\sigma \cos \vartheta \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)}{g}.$$

2 body

Délka vodního sloupce bude největší, když téměř všechna voda bude v užší části trubice. V tomto případě bude sklon kapiláry minimální:

$$l_{\max} = \frac{4m}{\rho\pi d_1^2} = \frac{h}{\sin \alpha_{\min}},$$

$$\sin \alpha_{\min} = \frac{h\rho\pi d_1^2}{4m} = \frac{\sigma\pi d_1^2 \cos \vartheta}{mg} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = \frac{\sigma\pi d_1 \cos \vartheta}{mg} \left(1 - \frac{d_1}{d_2} \right).$$

2 body

Délka vodního sloupce bude nejmenší, když téměř všechna voda bude v širší části trubice. V tomto případě bude sklon kapiláry maximální:

$$l_{\min} = \frac{4m}{\rho\pi d_2^2} = \frac{h}{\sin \alpha_{\max}},$$

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{h\rho\pi d_2^2}{4m} = \frac{\sigma\pi d_2^2 \cos \vartheta}{mg} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = \frac{\sigma\pi d_2 \cos \vartheta}{mg} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right).$$

2 body

Diskuse:

Pro minimální úhel sklonu musí platit:

$$\sin \alpha_{\min} < 1, \quad m > \frac{\sigma\pi d_1 \cos \vartheta}{g} \left(1 - \frac{d_1}{d_2} \right).$$

Je-li hmotnost kapky menší nebo rovna této hodnotě, bude všechna voda trvale v užší trubici. Pro maximální úhel sklonu musí platit:

$$\sin \alpha_{\max} \leq 1, \quad m \geq \frac{\sigma\pi d_2 \cos \vartheta}{g} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right).$$

Je-li hmotnost kapky menší, nevyteče voda ani ve svislé poloze.

2 body

Pro dané hodnoty dostaneme: $\alpha_{\min} = 8,96^\circ$ $\alpha_{\max} = 38,1^\circ$.

1 bod

Autoři úloh: V. Vícha (1,2), K. Rauner (4), Z. Polák (6), P. Šedivý (3,5,7)