

Řešení úloh ústředního kola 38. ročníku FO

Autoři úloh: J. Erhart (1), P. Šedivý (2, 3, 4)

1. úloha

- a) Označme dané veličiny: $V = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $T_0 = 273 \text{ K}$, $T_1 = 373 \text{ K}$,
 $m = 0,018 \text{ kg}$, $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Objem vody je vzhledem k objemu nádoby zanedbatelný. Část vody se po uzavření nádoby odpaří a vytvoří nasycené páry, které budou mít při teplotě 0°C nepatrný tlak 611 Pa (viz MFCh tabulky).

Po zahřátí na 100°C stoupne tlak vzduchu v nádobě na

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} = 1,37 p_0$$

a tlak nasycených vodních par právě na hodnotu p_0 . V nádobě bude výsledný tlak

$$p = p_1 + p_0 = 2,37 p_0. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- b) Hmotnost m' nasycených vodních par v nádobě určíme pomocí stavové rovnice, která platí dosti přesně i pro nasycené páry:

$$\frac{p_0 V}{T_1} = \frac{m'}{M_m} R_m, \quad m' = \frac{M_m p_0 V}{R_m T_1}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Po dosazení

$$m' = \frac{18 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,0224 \text{ m}^3}{8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 373 \text{ K}} = 0,013 \text{ kg}.$$

Protože $m' < m$, všechna voda se neodpařila a páry jsou skutečně nasycené.

2 body

2. úloha

- a) Vyjdeme z kinematických zákonů šikmého vrhu:

$$x = v_0 t \cos \varepsilon, \quad y = H + v_0 t \sin \varepsilon - \frac{1}{2} g t^2 = H + x \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{1}{2} g t^2.$$

V bodě dopadu platí:

$$L = v_0 T \cos \varepsilon, \quad H + L \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{1}{2} g T^2 = 0.$$

Z toho

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{1}{2} g T^2 - H}{L}, \quad v_0 = \frac{L}{T \cos \varepsilon}.$$

Numericky: $\operatorname{tg} \varepsilon = 5,2398$, $\varepsilon = 79,20^\circ$, $v_0 = 18,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4 body

- b) Hledaný bod leží zřejmě blízko vrcholu trajektorie na její sestupné části, nebo je to bod B . Vzdálenost r kamene od bodu A závisí na čase podle vztahu

$$r^2 = (v_0 t \cos \varepsilon)^2 + \left(v_0 t \sin \varepsilon - \frac{gt^2}{2} \right)^2 = t^2 \left(v_0^2 - v_0 g t \sin \varepsilon + \frac{g^2 t^2}{4} \right).$$

Leží-li hledaný bod blízko vrcholu trajektorie, musí zde platit

$$\frac{d(r^2)}{dt} = t(g^2 t - 3v_0 g \sin \varepsilon + 2v_0^2) = 0,$$

Rovnice má tři kořeny

$$t_0 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{v_0 \left(3 \sin \varepsilon \mp \sqrt{9 \sin^2 \varepsilon - 8} \right)}{2g},$$

ovšem za předpokladu, že

$$\sin \varepsilon > \sqrt{\frac{8}{9}}, \quad \varepsilon > 70,53^\circ, \quad \text{což je v našem případě splněno.}$$

Po dosazení dostáváme $t_1 = 2,0343$ s, $t_2 = 3,621$ s.

V čase t_1 dostaneme lokální maximum $r_1 = 18,75$ m, v čase t_2 lokální minimum $r_2 = 13,05$ m. Protože

$$|AB| = \sqrt{L^2 + H^2} = 18,03 \text{ m},$$

nachází se kámen v největší vzdálenosti od bodu A v čase t_1 , kdy prolétá bodem X o souřadnicích $x = 7,18$ m, $y = 27,32$ m. **6 bodů**

Poznámka: Můžeme také vycházet ze skutečnosti, že v nejvzdálenějším bodě trajektorie jsou vektory $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ navzájem kolmé:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \left(v_0 t \cos \varepsilon, v_0 t \sin \varepsilon - \frac{1}{2} g t^2 \right) \cdot (v_0 \cos \varepsilon, v_0 \sin \varepsilon - g t) = 0,$$

$$v_0^2 t - \frac{3 g t^2 v_0 \sin \varepsilon}{2} + \frac{g^2 t^3}{2} = 0, \quad \dots \text{atd.}$$

3. úloha

- a) Dráhový rozdíl paprsků vycházejících ze sousedních vrypů mřížky směrem k výstupní štěrbině určíme podle obr. R1. Musí být roven vlnové délce světla, pro které na výstupní štěrbině vznikne interferenční maximum prvního řádu:

$$\delta = s_2 - s_1 = b(\cos \varphi - \sin \varphi) = \lambda, \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

kde $b = \frac{1 \text{ mm}}{850}$ je perioda (mřížková konstanta) mřížky. Výraz upravíme:

$$\cos \varphi - \sin \varphi = \sin(\varphi + 90^\circ) - \sin \varphi = 2 \sin 45^\circ \cos(\varphi + 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(\varphi + 45^\circ),$$

$$\delta = b\sqrt{2} \cos(\varphi + 45^\circ) = \lambda, \quad \varphi = \arccos \frac{\lambda}{b\sqrt{2}} - 45^\circ. \quad (1)$$

3 body

Pro vlnovou délku $\lambda_1 = 420 \text{ nm}$ dostáváme $\varphi_1 = 30,38^\circ$; pro vlnovou délku $\lambda_2 = 750 \text{ nm}$ dostáváme $\varphi_2 = 18,21^\circ$.

1 bod

- b) Průmět úsečky SA do směru osy mikrometrického šroubu je podle obr. R2 a vztahu (1)

$$x = r \cos(\varphi + 45^\circ) = \frac{\lambda r}{b\sqrt{2}}.$$

Z toho

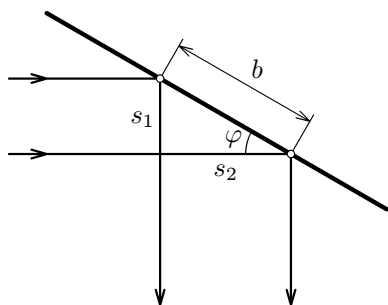
$$\Delta x = \frac{\Delta \lambda r}{b\sqrt{2}}, \quad r = \frac{b \Delta x \sqrt{2}}{\Delta \lambda}. \quad (2)$$

3 body

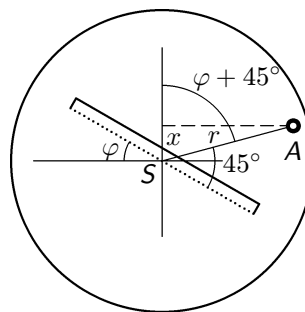
1 bod

Pro dané hodnoty dostáváme $r = 49,9 \text{ mm}$.

Obr. R1

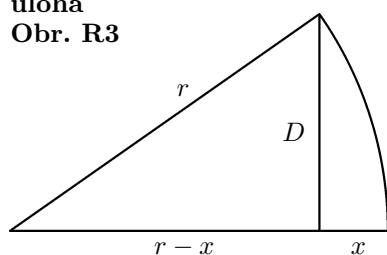


Obr. R2



4. úloha

Obr. R3



Poloměr r trajektorie částic určíme podle obr. R3:

$$r^2 - (r - x)^2 = D^2,$$

$$r = \frac{D^2 + x^2}{2x} = 1,30 \text{ m}.$$

1 bod

- a) Při klasickém řešení předpokládáme, že částice α má konstantní hmotnost $m = m_0 = 4,0026 m_u = 6,6467 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Náboj částice α je dvojnásobkem elementárního náboje e . Hybnost p částice α určíme na základě rovnosti dostředivé a magnetické síly:

$$2Bev = \frac{mv^2}{r}, \quad p = mv = 2Ber = 9,9977 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Částice α se pohybuje rychlostí $v = \frac{p}{m_0} = 1,5042 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 0,05 c$.

Kinetická energie částice α je

$$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{p^2}{2m_0} = 7,5191 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 4,6930 \text{ MeV}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Výpočet hybnosti provedený v části a) zůstává v platnosti i při relativistickém řešení. Kinetickou energii částice α vyjádříme ze vztahu mezi celkovou energií E , klidovou energií $E_0 = m_0c^2 = 5,9737 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ a hybností p :

$$E^2 = (E_k + E_0)^2 = E_0^2 + p^2c^2, \quad E_k = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} - E_0,$$

$$E_k = \sqrt{m_0^2c^4 + (2Ber)^2} - m_0c^2 = 7,5144 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 4,6900 \text{ MeV}.$$

Klasický výsledek byl větší o $0,0047 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 0,0030 \text{ MeV}$, tj. o 0,064 %.

3 body

- c) Pro částici β^- platí obdobné relativistické vztahy jako pro částici α . Náboj je však poloviční a má opačné znaménko, klidová energie má hodnotu $E_0 = 8,1871 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,511 \text{ MeV}$ a kinetická energie hodnotu $9,73 \cdot 10^{-14} \text{ J}$. Klasické řešení nepřipadá v úvahu, neboť $E_k > E_0$ a částice se tedy pohybuje rychlostí blízkou k rychlosti světla ve vakuu. Platí

$$p = Ber, \quad p^2c^2 = (Ber)^2 = E_k^2 + 2E_kE_0,$$

$$B = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_kE_0}}{erc} = 0,00255 \text{ T}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Poznámka: Užitím aproximačního vztahu $(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \doteq \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$ dostaneme

$$\begin{aligned} E_{\text{krelat}} &= \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} - E_0 = E_0 \left[\left(1 + \frac{p^2c^2}{E_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \doteq \\ &\doteq \frac{p^2c^2}{2E_0} - \frac{p^4c^4}{8E_0^3} + \frac{p^6c^6}{E_0^5} = E_{\text{kklas}} - 4,732 \cdot 10^{-16} \text{ J} + 9,53 \cdot 10^{-18} \text{ J} \doteq \\ &\doteq E_{\text{kklas}} - 4,72 \cdot 10^{-16} \text{ J}. \end{aligned}$$