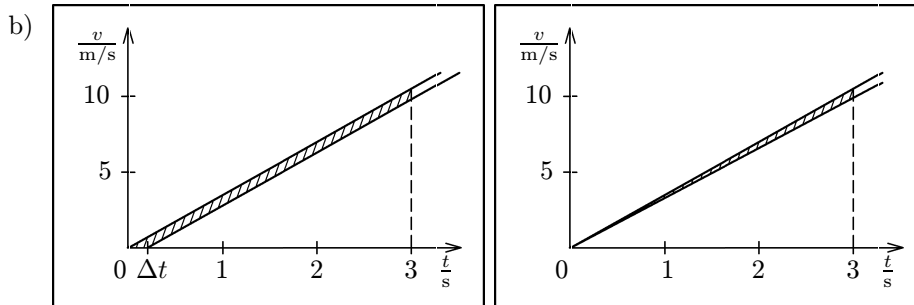


Řešení úloh regionálního kola 37. ročníku FO, kategorie D

- 1.a) V 1. i 2. případě má v každém časovém okamžiku $t > 0$ druhý automobil menší rychlost, tudíž nutně se automobily vzájemně vzdalují. Stejný závěr možno získat i z řešení úkolů b, c, d. **2 body**



Velikost vyšrafované plochy udává okamžitou vzdálenost automobilů v čase t . **2 body**

- c) Z grafů b) plyne

$$1. \quad d = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{pro } t \leq \Delta t,$$

$$d = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + (t - \Delta t) \cdot a\Delta t = a\Delta t(t - \frac{1}{2}\Delta t) \quad \text{pro } t > \Delta t.$$

$$2. \quad d' = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)t^2.$$

2 body

- d) Po dosazení do vztahů odvozených v c) dostaneme v prvním případě

$$d_1 = 0,07 \text{ m}, \quad d_2 \doteq 3,4 \text{ m}.$$

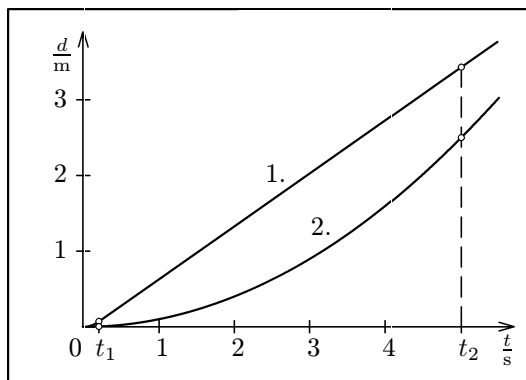
V druhém případě dostaneme

$$d'_1 = 0,004 \text{ m}, \quad d'_2 = 2,5 \text{ m}.$$

2 body

- e) 1. $\langle 0; t_1 \rangle$ parabola
 $\langle t_1; t_2 \rangle$ úsečka

2. $\langle 0; t_2 \rangle$ parabola **2 body**



- 2.a) Obvodová rychlost pohybu sedačky je

$$v_0 = r\omega_0 = 3,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

1 bod

- b) Dráha sedačky uražená během zrychleného pohybu je

$$s = \frac{1}{2}a_t t_0^2, \quad \text{kde} \quad a_t = \frac{v_0}{t_0} = \frac{r\omega_0}{t_0}$$

je tečné zrychlení sedačky. Po dosazení a úpravě máme

$$s = \frac{1}{2}r\omega_0 t_0 = 27 \text{ m}.$$

2 body

- c) Pro počet otáček rovnoměrně zrychleného pohybu platí

$$N = \frac{s}{2\pi r} = \frac{\frac{1}{2}r\omega_0 t_0}{2\pi r} = \frac{\omega_0 t_0}{4\pi} \doteq 1,43.$$

2 body

- d) Pro velikost tečného zrychlení platí

$$a_t = \frac{v_0}{t_0} = \frac{r\omega_0}{t_0} = 0,24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Pro velikost dostředivého zrychlení platí

$$a_d = \frac{v^2}{r}, \quad \text{kde} \quad v = a_t t = \frac{r\omega_0}{t_0} t$$

je okamžitá obvodová rychlost. Po dosazení a úpravě máme

$$a_d = \frac{r\omega_0^2}{t_0^2} t^2 \doteq 0,69 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Velikost celkového zrychlení je

$$a = \sqrt{a_d^2 + a_t^2} = \frac{r\omega_0}{t_0} \sqrt{\frac{\omega_0^2 t^4}{t_0^2} + 1} \doteq 0,73 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

3 body

- e) Dostředivé zrychlení s časem roste, tečné je konstantní. Po dosazení do rovnosti $a_t = a_d$ zjistíme čas

$$t_1 = \sqrt{\frac{t_0}{\omega_0}} \doteq 3,5 \text{ s},$$

v němž jsou si velikosti zrychlení rovny. Pro $t < t_1$ je $a_t > a_d$, pro $t > t_1$ je $a_t < a_d$.

2 body

- 3.a) Označme hledané rychlosti v_1 (hranol), v_2 (válec). Ze zákona zachování mechanické energie plyne pro hranol $v_1 = \sqrt{2gh}$.
Pro válec platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2, \quad \text{kde} \quad \omega = \frac{v_2}{r},$$

z čehož dostaneme

$$v_2 = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Číselně vychází $v_1 = 5,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_2 = 4,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3 body

- b) Z rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb $s = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$ plyne pro čas

$$t = \frac{2s}{v}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{h}{\sin \alpha}$$

a velikost rychlosti v je určena rovnicemi z úlohy a). Po dosazení a úpravě dostáváme

$$\text{pro kvádr} \quad t_1 = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\text{a pro válec} \quad t_2 = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

Číselně vychází $t_1 \doteq 1,00 \text{ s}$, $t_2 = 1,22 \text{ s}$.

3 body

- c) Dosazením do rovnice pro zrychlení $a = \frac{v}{t}$ z úloh a), b) dostáváme po úpravě

$$\text{pro kvádr} \quad a_1 = g \sin \alpha$$

$$\text{a pro válec} \quad a_2 = \frac{2}{3}g \sin \alpha.$$

Číselně vychází $a_1 = 5,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $a_2 = 3,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

2 body

- d) Zrychlení kvádrů po nakloněné rovině s uvažováním tření je

$$a'_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Z podmínky $a'_1 = a_2$ plyne $f = \frac{\sin \alpha}{3 \cos \alpha} = \frac{\text{tg } \alpha}{3}$.

Číselně vychází $f = 0,23$.

2 body

- 4.a) Jde o vodorovný vrh s počáteční rychlostí v_1 .

Z rovnic $h = \frac{1}{2}gt^2$, $v_1 = \frac{d_1}{t}$ vodorovného vrhu plyne

$$v_1 = d_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} = 420 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Analogicky je rychlost po průstřelu prkna

$$v_2 = d_2 \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{d_2}{d_1} v_1 = 105 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- b) Odporová síla o průměrné velikosti F vykonala na dráze x práci rovnou úbytku $-\Delta E_k$ kinetické energie střely:

$$F = \frac{E_{k1} - E_{k2}}{x} = \frac{\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)}{x} = \frac{mg(d_1^2 - d_2^2)}{4hx} = 28 \text{ kN}.$$

2 body

- c) Střela vykonala práci

$$W = Fx = \frac{mg(d_1^2 - d_2^2)}{4h} = 1650 \text{ J}.$$

2 body

- d) Podle 2. Newtonova pohybového zákona je doba průletu střely prknem

$$t = \frac{p_1 - p_2}{F} = \frac{m(v_1 - v_2)}{F}.$$

Po dosazení z předcházejících vztahů a po úpravě dostaneme

$$t = \frac{2x}{d_1 + d_2} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

3 body

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3) a I. Volf (4)