

**ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 37. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ  
OLYMPIÁDY. Kategorie D**

1. Označení veličin:  $s = 380 \text{ km}$ ,  $v_1 = 360 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  
 $v_2 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $t_0 = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}$ .

a) Doba letu za bezvětří je

$$t = \frac{s}{v_1} = 3800 \text{ s} = 1 \text{ h } 3 \text{ min} . \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

b) Průměrná rychlost za bezvětří je  $v_p = v_1 = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . **1 bod**

c) Průměrná cestovní rychlost za bezvětří je

$$w_p = \frac{2s}{2t + t_0} = 80,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 290 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} . \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

da) Doba letu po větru je

$$t' = \frac{s}{v_1 + v_2} = 3170 \text{ s} \doteq 53 \text{ min} ,$$

doba letu proti větru

$$t'' = \frac{s}{v_1 - v_2} = 4750 \text{ s} \doteq 79 \text{ min} .$$

**2 body**

db) Průměrná rychlost je stejná bez ohledu na směr větru:

$$v_p = \frac{2s}{t' + t''} = 96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 345 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} . \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

dc) Průměrná cestovní rychlost je též stejná bez ohledu na směr větru:

$$w_p = \frac{2s}{t' + t'' + t_0} = 78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 280 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} . \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

2. a) Vyjdeme ze vztahů

$$s_1 = \frac{g}{2} (t + T)^2 - \frac{g}{2} t^2 = g t T + \frac{g}{2} T^2 , \quad (1)$$

$$s_2 = \frac{g}{2} (t + 2T)^2 - \frac{g}{2} (T + t)^2 = g t T + 3 \frac{g}{2} T^2 . \quad (2)$$

Odečtením a úpravou dostaneme

$$s_2 - s_1 = g T^2 , \quad T = \sqrt{\frac{s_2 - s_1}{g}} = 0,080 \text{ s} . \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

b) Úpravou (1) dostaneme

$$t = \frac{s_1 - \frac{g}{2}T^2}{gT} = \frac{s_1 - \frac{s_2 - s_1}{2}}{gT} = \frac{3s_1 - s_2}{2\sqrt{g(s_2 - s_1)}} = 0,234 \text{ s.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Počáteční bod pohybu je nad bodem  $P_1$  ve výšce

$$h = \frac{g}{2}t^2 = \frac{(3s_1 - s_2)^2}{8(s_2 - s_1)} = 0,27 \text{ m.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

d) Velikost rychlosti v bodu  $P_1$  určíme ze vztahu

$$v_1 = gt = \frac{(3s_1 - s_2)}{2} \sqrt{\frac{g}{s_2 - s_1}} = 2,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

e) Dráhu  $s_3$  mezi body  $P_3$  a  $P_4$  určíme ze vztahu

$$s_3 = \frac{g}{2}(t + 3T)^2 - \frac{g}{2}(t + 2T)^2 = gtT + 5\frac{g}{2}T^2, \quad (3)$$

$$s_3 = gtT + 3\frac{g}{2}T^2 + gT^2 = s_2 + (s_2 - s_1) = 2s_2 - s_1 = 0,341 \text{ m.}$$

**3 body**

**3.** a) Dráha 1. úseku je  $s_1 = \frac{1}{2}vt_1$ , dráha 2. úseku  $s_2 = vt_2$ . Z dráhy  $s_3 = \frac{1}{2}vt_3$  získáme dobu pohybu na 3. úseku

$$t_3 = \frac{2s_3}{v}.$$

Hledaná průměrná rychlost je

$$v_p = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Číselně vychází  $s_1 = 290 \text{ m}$ ,  $s_2 = 1580 \text{ m}$ ,  $t_3 = 24 \text{ s}$ ,  $v_p = 13,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 48,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

**2 body**

b) Dráha uražená během poslední minuty pohybu je  $s' = s_3 + v(\cdot - t_3)$ . Po dosazení máme hledanou průměrnou rychlost

$$v'_p = \frac{s'}{t'} = \frac{s_3 + v(t' - t_3)}{t'} \doteq 13,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 48,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Čas potřebný k uražení dráhy prvního kilometru je

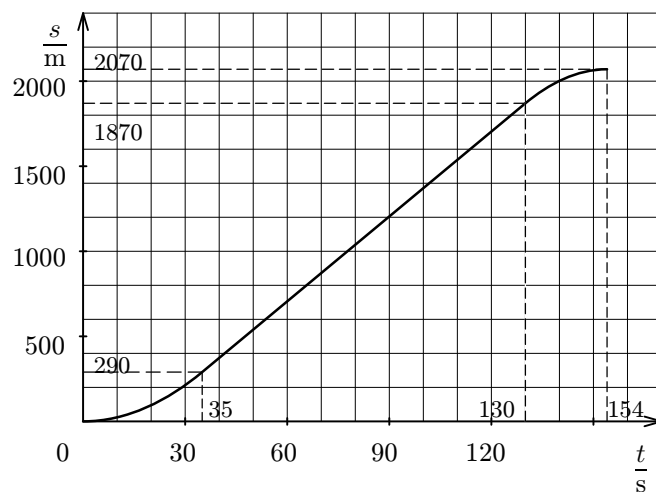
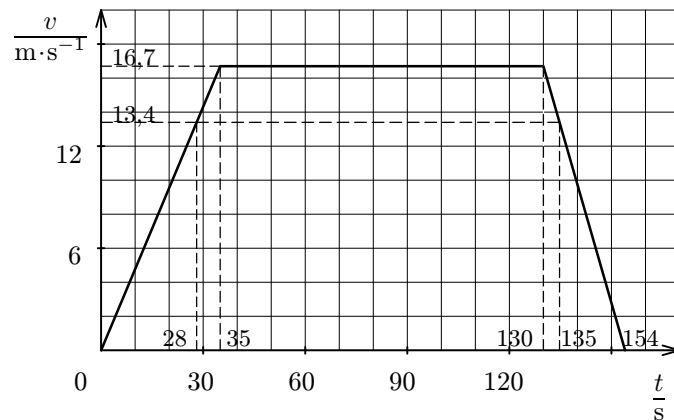
$$t'' = t_1 + \frac{s'' - s_1}{v}.$$

Po dosazení máme hledanou průměrnou rychlost

$$v_p'' = \frac{s''}{t''} = \frac{s''}{t_1 + \frac{s'' - s_1}{v}} \doteq 12,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 46,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

**2 body**

d) Grafy závislosti rychlosti a dráhy na čase



**2 body**

e) Z grafu  $v = v(t)$  vyčteme hledanou dobu prvních 28 s a posledních 19 s, tj. celkem 47 s. **1 bod**

f) Z grafu  $v = v(t)$  určíme hledanou dráhu jako obsah plochy pod grafem na časovém intervalu od 28 s do 135 s. Vychází přibližně 1770 m. **1 bod**

4. Označení veličin:  $m = 1200 \text{ kg}$ ,  $r = 100 \text{ m}$ ,  $v_1 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  
 $v_2 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

a) Doba průjezdu zatáčkou je

$$t = \frac{\pi r}{v_1} \doteq 12,6 \text{ s}.$$

**1 bod**

b) Velikost „boční“ třecí síly nesmí klesnout pod velikost dostředivé síly odpovídající dané rychlosti:

$$F_t \leq F_d = \frac{mv_1^2}{r} = 7500 \text{ N}.$$

**1 bod**

c) Brzdící síla  $\mathbf{F}$  vykonala práci

$$W = F \cdot \frac{\pi r}{2} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2,$$

z čehož plyne

$$F = m \frac{v_1^2 - v_2^2}{\pi r} \doteq 1530 \text{ N}.$$

**2 body**

d) Velikost dostředivé síly je na začátku zatáčky

$$F_1 = \frac{mv_1^2}{r} = 7500 \text{ N},$$

uprostřed zatáčky

$$F_2 = \frac{mv_2^2}{r} = 2700 \text{ N}.$$

**2 body**

e) Velikost tečného, dostředivého a celkového zrychlení je

$$a_t = \frac{F}{m} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{\pi r} \doteq 1,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad a_d = \frac{v_1^2}{r} = 6,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_d^2} \doteq 6,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**3 body**

f) Technika vhodná není. Při vjezdu do zatáčky je dokonce riziko smyku větší než při původním rovnoměrném pohybu, neboť je větší celkové zrychlení.

**1 bod**

5. a) Ze zákona zachování hybnosti při prvním rázu plyne

$$6mv = 7mu,$$

kde  $u$  je velikost rychlosti soupravy po prvním rázu. Z rovnice plyne

$$u = \frac{6v}{7} = 1,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Obdobně při druhém rázu platí  $7mu = 10mw$ , kde  $w$  je hledaná velikost rychlosti celé soupravy po druhém rázu. Z rovnice plyne

$$w = \frac{7u}{10} = \frac{3v}{5} = 1,26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

**4 body**

b) Ze zákonů zachování hybnosti a mechanické energie při dokonale pružném druhém rázu plyne

$$\begin{aligned} 7mu &= 7mw_1 + 3mw_2 \\ \frac{7}{2}mu^2 &= \frac{7}{2}mw_1^2 + \frac{3}{2}mw_2^2, \end{aligned}$$

kde  $w_1$  a  $w_2$  jsou po řadě velikosti rychlostí lokomotivy s vagónem a soupravy trojice vagónů. Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 7(u - w_1) &= 3w_2 \\ 7(u^2 - w_1^2) &= 3w_2^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Vydělením 2. rovnice 1. rovnicí máme

$$u + w_1 = w_2.$$

Dosazením  $w_2$  do rovnice (1) dostaneme

$$w_1 = \frac{2u}{5} = \frac{12v}{35} = 0,72 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Dosazením  $w_1$  do rovnice (1) dostaneme

$$w_2 = \frac{7u}{5} = \frac{6v}{5} = 2,52 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Směr pohybu každé soupravy bude po 2. rázu shodný s původním směrem pohybu lokomotivy.

**6 bodů**

7. a) Z 3. Keplerova zákona pro sluneční soustavu plyne

$$r_J = r_Z \sqrt[3]{\frac{T_J^2}{T_Z^2}} = 5,20 r_Z \doteq 778 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

**2 body**

b) Z 3. Keplerova zákona pro Jupiterovy Měsíce plyne

$$r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} \doteq 9,32 R_J.$$

Analogicky dostaneme

$$r_3 = 14,9 R_J, \quad r_4 = 26,2 R_J.$$

**3 body**

c) Z totožnosti dostředivé a gravitační síly mezi Jupiterem a např. měsícem Io plyne pro hmotnost Jupitera

$$M_J = \frac{4\pi^2 r_1^2}{\kappa T_1^2}.$$

Střední hustota Jupitera je pak určena

$$\varrho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3} = \frac{3\pi r_1^3}{\kappa T_1^2 R_J^3},$$

kde  $r_1 = 5,86 R_J$ . Po dosazení a úpravě máme

$$\varrho_J = 5,86^3 \frac{3\pi}{\kappa T_1^2} \doteq 1220 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

**5 bodů**

Autoři úloh: J. Jírů (3), P. Šedivý (2, 6) a I. Volf (1, 4, 5, 7)