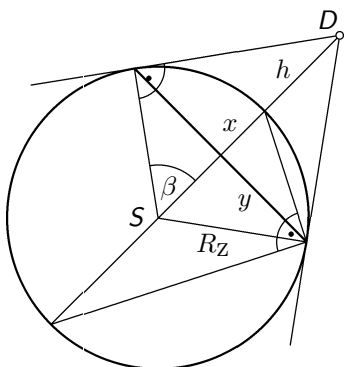


## Řešení úloh regionálního kola 37. ročníku FO, kategorie C

- 1.a) Vyjdeme z obr. RC1. Plošný obsah kulového vrchlíku viditelného z družice tvoří 5% zemského povrchu. Z toho určíme výšku vrchlíku:

Obr. RC1



$$2\pi x R_Z = 0,05 \cdot 4\pi R_Z^2, \quad x = 0,10 R_Z.$$

Podle Euklidovy věty pro výšku platí:

$$y^2 = (h + x)(R_Z - x) = x(2R_Z - x).$$

Z toho určíme

$$h = \frac{R_Z \cdot x}{R_Z - x} = \frac{0,10 R_Z^2}{0,90 R_Z} = \frac{1}{9} R_Z = 708 \text{ km}.$$

**3 body**

Rychlost družice určíme porovnáním gravitační a dostředivé síly:

$$m \frac{v^2}{R_Z + h} = \varkappa \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2}.$$

Úpravou dostaneme:

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_Z + h}} = 3 \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{10 R_Z}} = 7,51 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**2 body**

Dobu oběhu určíme ze vztahu:

$$T = \frac{2\pi(R_Z + h)}{v} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{10 R_Z}{9}\right)^3 \frac{1}{\varkappa M_Z}} \doteq 5\,925 \text{ s} \doteq 1 \text{ h } 39 \text{ min}.$$

**2 body**

- b) Družice se vzhledem k Zemi pohybuje úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_0} = 9,875 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dobu  $t$  pozorování určíme ze vztahu:  $t = \frac{2\beta}{\omega}$ .

Pro úhel  $\beta$  platí:  $\cos \beta = \frac{R_Z}{R_Z + h} = 0,90$ ,  $\beta = 25,84^\circ = 0,45103 \text{ rad}$ .

Po dosazení vychází  $t = 913 \text{ s} = 15 \text{ min } 13 \text{ s}$ .

**3 body**

Parametry pohybu umělé družice Země, z níž je najednou vidět 5% povrchu Země, jsou: výška nad Zemí 708 km, rychlost  $7,51 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , doba oběhu 1 hodina 39 minut. Jedno místo na rovníku lze nepřetržitě pozorovat 15 minut 13 sekund.

- 2.a) Pro adiabatický děj platí:  $p_0 V_0^\gamma = p V^\gamma$ , kde  $V = 4V_0$ . Po dosazení a úpravě dostáváme:

$$p = \frac{p_0}{4^\gamma} = 5,95 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

**2 body**

Ze stavové rovnice určíme T:

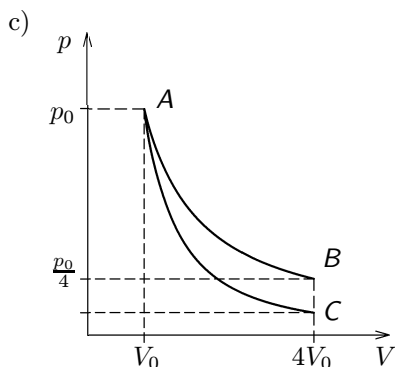
$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p \cdot 4V_0}{T}, \quad \text{po dosazení a úpravě} \quad T = T_0 \cdot 4^{1-\gamma} = 238 \text{ K}.$$

**2 body**

- b) Pro adiabatický děj platí:  $W' = -\Delta U = \frac{3}{2} Nk(T_0 - T)$ . Součin  $Nk$  určíme ze stavové rovnice:  $Nk = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ . Po dosazení a úpravě dostaneme pro práci vztah:

$$W' = \frac{3}{2} p_0 V_0 (1 - 4^{1-\gamma}) = 543 \text{ J}.$$

**3 body**



Pro izotermický děj platí:

$$p_0 V_0 = p_1 V, \quad \text{kde} \quad V = 4V_0.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$p_1 = \frac{p_0}{4} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

**1 bod**

**Obr. RC2**

$AB \dots$  izoterma,  $AC \dots$  adiabata

**2 body**

Konečná teplota po adiabatické expanzi je 238 K, tlak  $5,95 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ . Plyn vykoná práci 543 J. Po izotermické expanzi má plyn tlak  $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

3.a) Tuhost pružiny určíme z rovnosti sil:

$$mg = ky_0, \quad \text{z toho} \quad k = \frac{mg}{y_0} = 327 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

1 bod

b) Prodloužení  $y_1$  určíme z rovnosti sil:

$$m_1g = ky_1, \quad \text{z toho} \quad y_1 = \frac{m_1g}{k} = \frac{m_1}{m}y_0 = 9,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

1 bod

c) Pro úhlovou frekvenci tělesa zavěšeného na pružině platí:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{mg}{m_2y_0}} = 9,04 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

d) Určíme tuhost vzniklé pružiny. Představíme si sériové spojení dvou pružin o stejné délce  $l_1 = l/2$  a stejné tuhosti  $k_1$ . Při tomto zapojení platí, že celkové prodloužení je součtem prodloužení jednotlivých pružin a působící síla je stejná. Platí tedy:

$$y = \frac{F}{k} = 2y_1 = 2\frac{F}{k_1} \quad \text{z toho} \quad k_1 = 2k.$$

2 body

Pro úhlovou frekvenci platí:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{2mg}{m_2y_0}} = 12,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1 bod

e) Každá z pružin má tuhost  $2k$ , jsou zavěšeny paralelně. Pro toto spojení platí, že prodloužení pružin jsou stejná:  $y = y_1 = y_2$ . Pro působící sílu platí  $F = F_1 + F_2 = 2F_1$ , po dosazení  $k_2y = 2k_1y = 4ky$ . Výsledná tuhost pružiny je

$$k_2 = 4k = 4\frac{mg}{y} = 1\,310 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

3 body

**Tuhost původní pružiny je  $327 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , prodloužení při zavěšení tělesa o hmotnosti  $3,00 \text{ kg}$  je  $9,00 \text{ cm}$ , úhlová frekvence kmitání při zavěšení tělesa o hmotnosti  $4,00 \text{ kg}$  je  $9,04 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , úhlová frekvence kmitání tohoto tělesa na pružině o poloviční délce je  $12,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , tuhost pružiny vzniklé paralelním spojením dvou pružin s poloviční délkou je  $1\,310 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .**

4. a), b) Napíšeme pohybové rovnice pro všechna tělesa:

$$(m + m_2)a = (m + m_2)g - T_2, \quad (1)$$

$$ma = T_1 - mg, \quad (2)$$

$$J\varepsilon = T_2r - T_1r. \quad (3)$$

Rovnici (3) upravíme:

$$m_1a = 2(T_2 - T_1). \quad (4)$$

**4 body**

Řešením soustavy rovnic (1), (2) a (4) určíme hledané veličiny:

$$a = 2g \frac{m_2}{4m + 2m_2 + m_1} = 0,417 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**1 bod**

$$T_2 = g \frac{(m + m_2)(4m + m_1)}{4m + 2m_2 + m_1} = 20,7 \text{ N}.$$

**1 bod**

$$T_1 = mg \frac{4m + 4m_2 + m_1}{4m + 2m_2 + m_1} = 20,5 \text{ N}.$$

**1 bod**

c) Použijeme vztah pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$h = \frac{1}{2}at^2, \quad \text{odtud} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{h(4m + 2m_2 + m_1)}{m_2g}} = 2,19 \text{ s}.$$

**1 bod**

d) Rychlost dopadu určíme ze vztahu:

$$v = at = 2\sqrt{\frac{ghm_2}{4m + 2m_2 + m_1}} = 0,914 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**1 bod**

e) Kinetická energie kladky je dána vztahem:

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1ah = \frac{ghm_1m_2}{4m + 2m_2 + m_1} = 0,209 \text{ J}.$$

**1 bod**

**Zrychlení soustavy je  $0,417 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , tahové síly ve vláknech mají velikosti  $20,5 \text{ N}$  a  $20,7 \text{ N}$ , rychlost dopadu pravého tělesa na podložku je  $0,914 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , těleso dopadne na podložku za  $2,19 \text{ s}$ , kinetická energie kladky v okamžiku dopadu pravého tělesa na podložku je  $0,209 \text{ J}$ .**

Autoři úloh: I. Volf (1), R. Horáková (2, 3, 4)