

**ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 37. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY. Kategorie C**

1. a) Za dobu t urazí první kapka dráhu:

$$s_1 = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2},$$

následující kapka dráhu

$$s_2 = \frac{gt^2}{2}.$$

1 bod

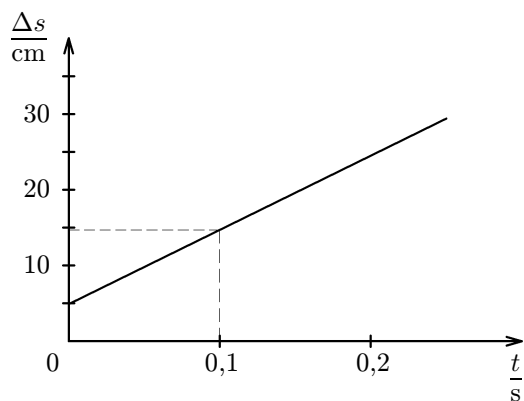
Vzdálenost obou kapek v čase t je

$$\Delta s = s_1 - s_2 = g\Delta t \cdot t + \frac{g(\Delta t)^2}{2},$$

po dosazení:

$$\Delta s = 0,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot t + 0,049 \text{ m}.$$

2 body



2 body

- b) V čase $t_0 = 0 \text{ s}$ je vzdálenost mezi kapkami $\Delta s_0 = \frac{g(\Delta t)^2}{2}$; za vzdálenost Δs dosadíme $n\Delta s_0 = \frac{ng(\Delta t)^2}{2}$:

$$\frac{ng(\Delta t)^2}{2} = g\Delta t \cdot t + \frac{g(\Delta t)^2}{2},$$

1 bod

odtud určíme čas t :

$$t = \frac{(n-1)\Delta t}{2} = 0,50 \text{ s}.$$

1 bod

c) Za dobu t_1 od odtržení první kapky urazí k -tá kapka dráhu

$$s_k = \frac{1}{2}g[t_1 - (k-1) \cdot \Delta t]^2 = \frac{1}{2}g[t_1^2 - 2t_1(k-1)\Delta t + (k-1)^2(\Delta t)^2],$$

$(k+1)$. kapka dráhu

$$s_{k+1} = \frac{1}{2}g(t_1 - k\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g[t_1^2 - 2t_1k\Delta t + k^2(\Delta t)^2].$$

1 bod

Vzdálenost mezi kapkami je

$$\Delta s = s_k - s_{k+1} = \frac{1}{2}g\Delta t(2t_1 - 2k\Delta t + \Delta t) \doteq 1,55 \text{ m}.$$

2 body

2. a) Děj je izobarický, platí:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T}, \quad \text{kde} \quad V_0 = Sh_0, \quad V = Sh.$$

$$\text{Odtud} \quad T = T_0 \frac{h}{h_0} = \frac{9}{8}T_0 = 340 \text{ K}.$$

2 body

b) Práci vykonanou plynem určíme ze vztahu

$$W = p_0\Delta V = p_0S(h - h_0), \quad \text{kde} \quad p_0 = \left(\frac{mg}{S} + p_a\right).$$

Po dosazení

$$W = \left(\frac{mg}{S} + p_a\right)S(h - h_0) = (mg + p_aS)(h - h_0) \doteq 83 \text{ J}.$$

2 body

c) Změnu vnitřní energie určíme ze vztahu

$$\Delta U = \frac{3}{2}Nk\Delta T = \frac{3}{2}Nk(T - T_0).$$

1 bod

Dosadíme ze stavových rovnic

$$p_0V_0 = NkT_0, \quad p_0V = NkT.$$

1 bod

Odtud po odečtení

$$Nk(T - T_0) = p_0(V - V_0) = \left(p_a + \frac{mg}{S}\right)S(h - h_0).$$

Po dosazení

$$\Delta U = \frac{3}{2}(p_aS + mg)(h - h_0) = 120 \text{ J}.$$

2 body

d) Teplo přijaté plynem určíme z prvního termodynamického zákona:

$$Q = \Delta U + W = \frac{5}{2}(p_a S + mg)(h - h_0) = 210 \text{ J}.$$

2 body

3. a) Soustava koná harmonický pohyb. Zrychlení určíme ze vztahu $a = -\omega^2 y$, kde y je okamžitá výchylka, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je úhlová frekvence harmonického pohybu. Amplitudě výchylky y_m odpovídá amplituda zrychlení

$$a_m = -\omega^2 y_m. \quad (1)$$

1 bod

Aby při kmitavém pohybu soustavy zůstalo závaží v klidu, musí být splněna podmínka:

$$|a_m| \leq g. \quad \textbf{1 bod}$$

Po dosazení do vztahu (1) dostaneme podmínku pro amplitudu výchylky:

$$y_m \leq \frac{gT^2}{4\pi^2} \doteq 0,27 \text{ m}.$$

Amplituda výchylky může být v intervalu $0 \text{ m} < y_m \leq 0,27 \text{ m}$. **3 body**

b) Pro periodu soustavy platí:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_1}{k}}, \quad (2)$$

1 bod

kde k je tuhost pružiny. Úpravou vztahu (2) vyjádříme k :

$$k = \frac{4\pi^2(m + m_1)}{T^2} \quad (3)$$

1 bod

V obou případech, tedy je-li hmotnost závaží m_1 nebo m_2 platí, že velikost tíhové a tahové síly je v rovnovážné poloze stejná:

$$(m + m_1)g = ky_1, \quad (m + m_2)g = k(y_1 + \Delta y).$$

1 bod

Odečtením obou rovnic a dosazením vztahu (3) za k dostaneme vztah pro změnu výchylky při změně hmotnosti závaží:

$$\Delta y = \frac{(m_2 - m_1)gT^2}{4\pi^2(m + m_1)} \doteq 0,20 \text{ m}.$$

2 body

4. a) Vyjdeme z rovnice kontinuity a Bernoulliovy rovnice:

$$v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}, \quad p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Úpravou těchto rovnic vyjádříme v_1 :

$$v_1 = d_2^2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(d_1^4 - d_2^4)}}.$$

2 body

Rozdíl tlaků Δp je roven hydrostatickému tlaku kapalinového sloupce o výšce h :

$$\Delta p = \rho_0 g h.$$

Hustotu plynu určíme ze stavové rovnice:

$$\frac{p_1 V}{T_1} = \frac{m R_m}{M_m}, \quad \rho = \frac{p_1 M_m}{R_m T_1} = 2,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Po dosazení

$$v_1 = d_2^2 \sqrt{\frac{2\rho_0 R_m T_1 g h}{p_1 M_m (d_1^4 - d_2^4)}}.$$

2 body

Pro $h = h_{max}$ dostáváme $v_1 = 10,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1 bod

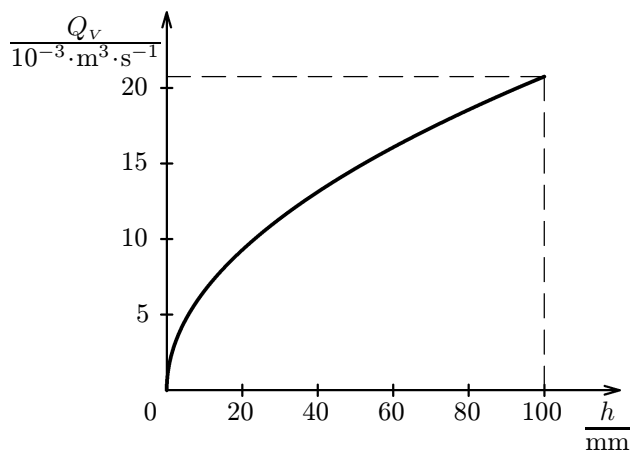
b) Objemový průtok plynu je

$$Q_V = \frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \pi d_1^2 d_2^2 \sqrt{\frac{\rho_0 R_m T_1 g h}{8 p_1 M_m (d_1^4 - d_2^4)}} = k \sqrt{h}.$$

2 body

Pro zadané hodnoty je $k = 6,56 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{2,5} \cdot \text{s}^{-1}$.

1 bod



2 body

5. a) Válec je v rovnovážné poloze, tedy velikost tíhové a vztlakové síly je stejná:

$$\pi r_1^2 h \varrho_1 g = \frac{1}{2} \pi r_1^2 h \varrho g, \quad \text{odtud:} \quad \varrho_1 = \frac{\varrho}{2} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

b) Poněvadž koule má stejnou hmotnost a stejný objem jako válec, má materiál, ze kterého je koule vyrobena, stejnou hustotu jako materiál, ze kterého je vyroben válec. Platí

$$\varrho_2 = \varrho_1 = \frac{\varrho}{2}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

c) Poloměr koule určíme z rovnosti objemů válce a koule:

$$\pi r_1^2 h = \frac{4}{3} \pi r_2^3, \quad \text{odtud:} \quad r_2 = \sqrt[3]{\frac{3r_1^2 h}{4}}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

d) Hmotnost válce je $m_v = \pi r_1^2 h \varrho_1 = \frac{1}{2} \pi r_1^2 h \varrho$. Při zvednutí jeho těžiště o vzdálenost $h/2$ se potenciální energie tíhová zvětší o

$$\Delta E_{p1} = \frac{1}{4} \pi r_1^2 \varrho g h^2. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Na uvolněné místo nateče kapalina o stejném objemu, potenciální energie tíhová se zmenší o hodnotu

$$\Delta E_{pk} = -\frac{1}{2} \pi r_1^2 \varrho g h \cdot \frac{h}{4} = -\frac{1}{8} \pi r_1^2 \varrho g h^2. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Práce vykonaná při zvednutí válce těsně nad volný povrch kapaliny je

$$W_1 = \Delta E_{p1} + \Delta E_{pk} = \frac{1}{8} \pi r_1^2 \varrho g h^2. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Obdobně pro kouli:

Koule má hmotnost stejnou jako válec, při zvednutí jejího těžiště o r_2 se potenciální energie tíhová zvýší o

$$\Delta E_{p2} = \frac{1}{2} \pi r_1^2 \varrho g h r_2. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Na její místo vteče kapalina a potenciální energie tíhová se sníží o

$$\Delta E'_{pk} = -\frac{2}{3} \pi r_2^3 \varrho g \cdot \frac{3}{8} r_2.$$

1 bod

Práce vykonaná při zvednutí koule těsně nad volný povrch kapaliny je (po dosažení za r_2):

$$W_2 = \Delta E_{p2} + \Delta E'_{pk} = \frac{5}{16} \pi r_1^2 \rho g h \sqrt[3]{\frac{3r_1^2 h}{4}}.$$

1 bod

e) Při rovnosti $W_1 = W_2$ je splněna podmínka:

$$\frac{h}{r_1} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

1 bod

6. b) Zrychlení soustavy určíme ze vztahu $a_1 = 2s/t_1^2$. Ze soustavy pohybových rovnic:

$$\begin{aligned} ma_1 &= mg \sin \alpha - mg f \cos \alpha - F, \\ m_1 a_1 &= F - m_1 g \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} (m + m_1) a_1 &= mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha - m_1 g, \\ f mg \cos \alpha &= mg \sin \alpha - m_1 g - (m + m_1) a_1, \\ f &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_1}{m \cos \alpha} - \frac{(m + m_1) a_1}{mg \cos \alpha}. \end{aligned}$$

c) Zrychlení soustavy určíme ze vztahu $a_2 = 2s/t_2^2$. Ze soustavy pohybových rovnic:

$$ma_2 = F - mg \sin \alpha - mg f \cos \alpha, \quad m_2 a_2 = m_2 g - F$$

dostaneme

$$\begin{aligned} (m + m_2) a_2 &= m_2 g - mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha, \\ f mg \cos \alpha &= m_2 g - mg \sin \alpha - (m + m_2) a_2, \\ f &= \frac{m_2}{m \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha - \frac{(m + m_2) a_2}{mg \cos \alpha}. \end{aligned}$$

7. a) Pokud kvádry o hmotnostech m_1 a m_2 sjíždějí zrychleným pohybem dolů, platí pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g \sin \beta - F_1 - m_1 g f \cos \beta, \\ m_2 a &= m_2 g \sin \beta + F_1 - F_2 - m_2 g f \cos \beta, \\ m_3 a &= F_2 - m_3 g. \end{aligned}$$

2 body

Řešením této soustavy tří rovnic určíme a , F_1 a F_2 :

$$\begin{aligned} a &= g \frac{(m_1 + m_2)(\sin \beta - f \cos \beta) - m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ F_1 &= \frac{m_1 m_3 g (\sin \beta - f \cos \beta + 1)}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ F_2 &= \frac{m_3 g (m_1 + m_2)(\sin \beta - f \cos \beta + 1)}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Čitatel zlomku ve vztahu pro výpočet zrychlení musí být kladný. To je splněno, jestliže

$$\sin \beta - f \cos \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \beta > f \quad \text{a také} \quad m_3 < (m_1 + m_2)(\sin \beta - f \cos \beta). \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

b) Pokud kvádry o hmotnostech m_1 a m_2 vyjíždějí zrychleným pohybem nahoru, platí pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - m_1 g \sin \beta - m_1 g f \cos \beta, \\ m_2 a &= F_2 - m_2 g \sin \beta - m_2 g f \cos \beta - F_1, \\ m_3 a &= m_3 g - F_2. \end{aligned} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Řešením této soustavy tří rovnic určíme a , F_1 a F_2 :

$$\begin{aligned} a &= g \frac{m_3 - (m_1 + m_2)(\sin \beta + f \cos \beta)}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ F_1 &= \frac{m_1 m_3 g (\sin \beta + f \cos \beta + 1)}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ F_2 &= \frac{m_3 g (m_1 + m_2)(\sin \beta + f \cos \beta + 1)}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Čitatel zlomku ve vztahu pro výpočet zrychlení musí být opět kladný. To je splněno, jestliže

$$m_3 > (m_1 + m_2)(\sin \beta + f \cos \beta). \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

c) Pro dané hodnoty dostáváme

$$(m_1 + m_2)(\sin \beta - f \cos \beta) = 0,192 \text{ kg} > m_3, \quad \operatorname{tg} \beta = 0,577 > f.$$

Nastane tedy situace podle a). Kvádry o hmotnostech m_1 a m_2 sjedou po nakloněné rovině dolů. Po dosazení zadaných hodnot dostáváme:

$$a = 0,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad F_1 = 0,96 \text{ N}, \quad F_2 = 1,5 \text{ N}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Autorka úloh: RNDr. R. Horáková