

Řešení úloh regionálního kola 37. ročníku FO, kategorie C

1. Určíme nejprve celkový odpor sítě mezi uzly A , B při odpojeném zdroji. Síť nejprve překreslíme podle obr. R1. Vzhledem k symetrii sítě je v bodech D a F stejný potenciál. Větvi DF proto neprochází proud a můžeme ji vypustit. Zbývající vodiče jdoucí do bodu F můžeme rozdělit do dvou samostatných větví. Tak dostaneme zjednodušenou síť podle obr. R2. Dalším zjednodušením dojdeme k síti na obr. R3, která má celkový odpor

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}} = \frac{6}{11}R \doteq 2,73 \, \Omega.$$

5 bodů

Celkový proud odebíraný ze zdroje určíme pomocí Ohmova zákona pro celý obvod:

$$I = \frac{U_e}{R_{AB} + R_i} \doteq 3,8 \, \text{A}.$$

2 body

Z náhradního schématu na obr. R3 vidíme, že se celkový proud rozdělí na tři proudy

$$I_1 = I_{AB}, \quad I_2 = I_{AF} = I_{FB}, \quad I_3 = I_{AE} = I_{CB}$$

v poměru

$$I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{R} : \frac{1}{2R} : \frac{1}{3R} = 6 : 3 : 2.$$

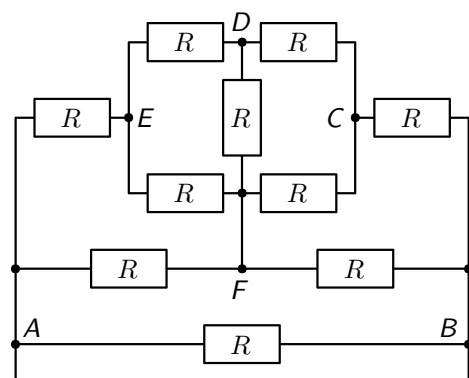
Z toho

$$I_1 = \frac{6}{11}I \doteq 2,1 \, \text{A}, \quad I_2 = \frac{3}{11}I \doteq 1,0 \, \text{A}, \quad I_3 = \frac{2}{11}I \doteq 0,69 \, \text{A}.$$

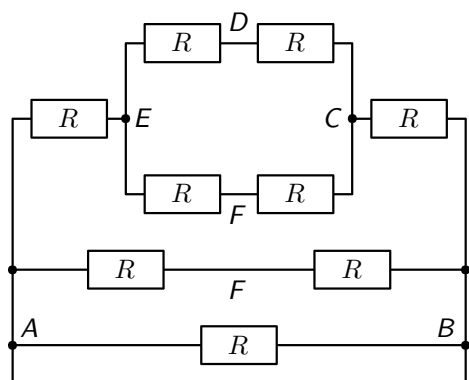
V uzlu E se proud I_3 dále dělí na dvě poloviny, které se v uzlu C spojují. Proto

$$I_{EF} = I_{ED} = I_{FC} = I_{DC} = \frac{1}{11}I \doteq 0,35 \, \text{A}.$$

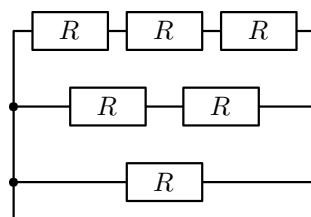
3 body



Obr. R1



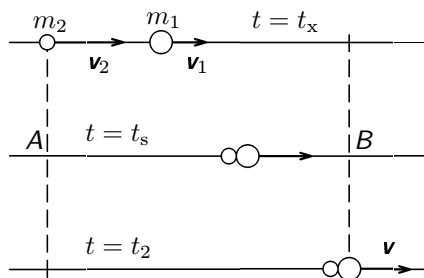
Obr. R2



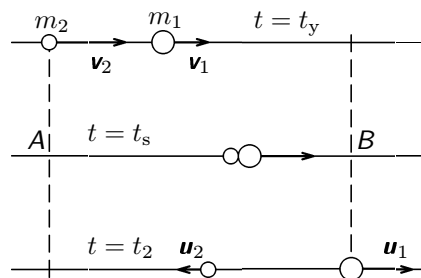
Obr. R3

- 2.a) Průběh děje v případě dokonale nepružného rázu znázorňuje obr. R4. Dobu od začátku děje do srážky označme t_s a rychlost obou kuliček po rázu označme $\mathbf{v}$. Z obrázku odvodíme:

$$\begin{aligned} v_1 t_s &= v_2(t_s - t_x), \\ v(t_2 - t_s) &= l - v_1 t_s. \end{aligned}$$



Obr. R4



Obr. R5

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$t_s = \frac{vt_2 - l}{v - v_1}, \quad t_x = \frac{v_2 - v_1}{v_2} \cdot \frac{vt_2 - l}{v - v_1}.$$

Rychlost $\mathbf{v}$ určíme ze zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Po dosazení a úpravě

$$t_x = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2) t_2 - l(m_1 + m_2)}{m_2 v_2}, \quad \text{pro dané hodnoty } t_x = 1,30 \text{ s.}$$

4 body

- b) Průběh děje v případě dokonale pružného rázu znázorňuje obr. R5. Rychlosti kuliček po rázu označme $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Analogicky k úloze a) odvodíme

$$t_s = \frac{u_1 t_2 - l}{u_1 - v_1}, \quad t_y = \frac{v_2 - v_1}{v_2} \cdot \frac{u_1 t_2 - l}{u_1 - v_1}.$$

Rychlost $\mathbf{u}_1$ určíme ze zákona zachování hybnosti a ze zákona zachování mechanické energie:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \Rightarrow m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_1, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \Rightarrow m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_1^2. \end{aligned}$$

Po vydělení obou rovnic a další úpravě dostaneme:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2, \quad u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Po dosazení a úpravě

$$t_y = \frac{[v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2]t_2 - l(m_1 + m_2)}{2m_2v_2},$$

pro dané hodnoty $t_y = 1,55$ s.

4 body

- c) Největšího zkrácení doby letu dosáhneme, vypustíme-li druhou kuličku bezprostředně po kuličce první. V takovém případě platí při dokonale nepružné srážce:

$$t_{2\min} = \frac{l}{v} = \frac{l(m_1 + m_2)}{m_1v_1 + m_2v_2}, \quad \text{pro dané hodnoty } t_{2\min} = 0,87 \text{ s}.$$

Při dokonale pružné srážce platí

$$t_{2\min} = \frac{l}{u_1} = \frac{l(m_1 + m_2)}{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}, \quad \text{pro dané hodnoty } t_{2\min} = 0,49 \text{ s}.$$

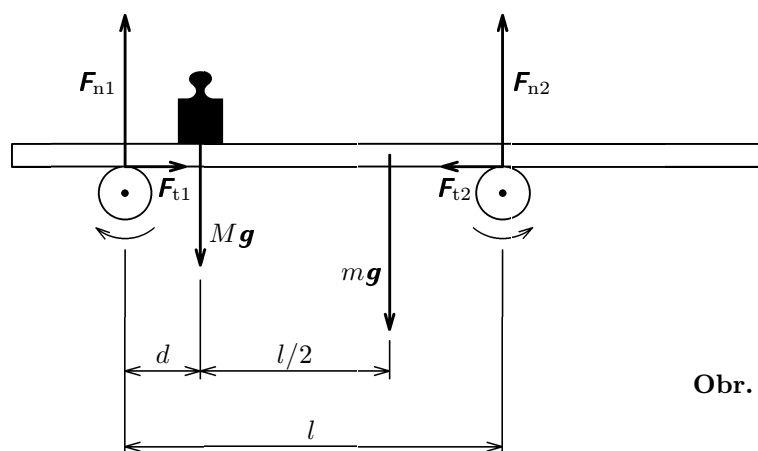
2 body

- 3.a) V rovnovážné poloze (obr. R6) musí být výsledná síla působící na soustavu závaží – deska nulová. Musí být tedy stejně velké třecí síly $\mathbf{F}_{t1}$, $\mathbf{F}_{t2}$, kterými působí na desku oba válce. Proto musí být stejně velké i normálové síly:

$$F_{n1} = F_{n2} = \frac{M+m}{2}g.$$

Deska se neotáčí, proto musí být splněna momentová věta vzhledem k libovolně zvolené ose. Pro osu v místě dotyku levého válce dostaneme:

$$Mgd + mg\left(d + \frac{l}{2}\right) = \frac{M+m}{2}gl, \quad \text{po úpravě} \quad d = \frac{l}{2} \cdot \frac{M}{M+m}.$$



Obr. R6

2 body

- b) Po vychýlení desky z rovnovážné polohy (obr. R7) na ni působí celková síla vodorovného směru o souřadnici $F = F_{t1} - F_{t2} = f(F_{n1} - F_{n2})$. Deska se neotáčí, proto opět platí momentová věta. Pro osu v místě dotyku levého válce dostaneme:

$$Mg(d+x) + mg\left(d+x + \frac{l}{2}\right) = F_{n2} \cdot l,$$

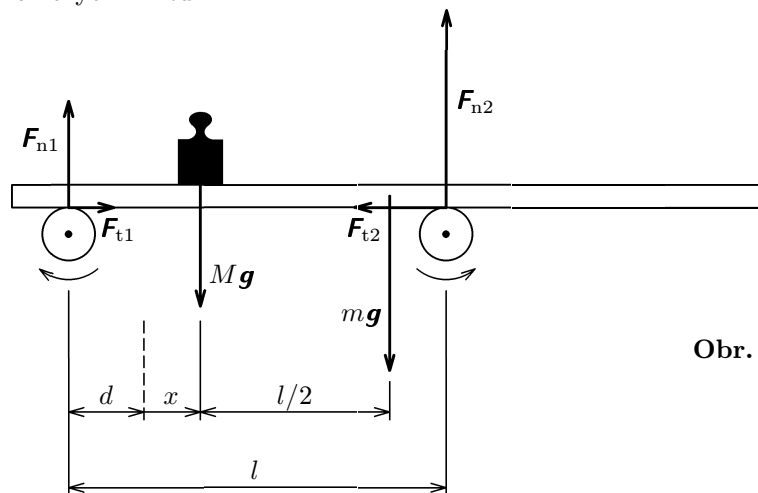
po úpravě

$$F_{n2} = \frac{(M+m)g}{2} + \frac{(M+m)gx}{l},$$

$$F_{n1} = (M+m)g - F_{n2} = \frac{(M+m)g}{2} - \frac{(M+m)gx}{l},$$

$$F = f(F_{n1} - F_{n2}) = -\frac{2(M+m)gf}{l} \cdot x = -k \cdot x.$$

Výsledná síla je přímo úměrná výchylce a má opačný směr. Protože na počátku je deska se závažím vychýlena z rovnovážné polohy, dojde ke vzniku harmonických kmitů.



Obr. R7

3 body

- c) Úhlovou frekvenci a periodu kmitů určíme ze vztahů:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{2gf}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2gf}}.$$

Na počátku je deska v klidu, je tedy v krajní poloze kmitů, ve vzdálenosti d od rovnovážné polohy. Kmity mají amplitudu $x_m = d$.

Velikost rychlosti desky při průchodu rovnovážnou polohou je

$$v_m = \omega x_m = \sqrt{\frac{2gf}{l}} \cdot \frac{M}{M+m} \cdot \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{gfl}{2}} \cdot \frac{M}{M+m}.$$

2 body

- d) Závaží udržuje v kmitavém pohybu tření mezi ním a deskou. V krajní poloze, kde zrychlení dosahuje maximální hodnoty a_m , musí platit

$$Ma_m = M\omega^2 x_m = M \cdot \frac{2gf}{l} \cdot \frac{M}{M+m} \cdot \frac{l}{2} = \frac{gfM^2}{M+m} < Mgf',$$

$$f' > f \frac{M}{M+m}.$$

2 body

- e) V počáteční poloze přesahuje deska přes válce na obou stranách stejně daleko. Během kmitů se posune z původní polohy až do vzdálenosti $2x_m = 2d$. Celková délka desky proto musí splňovat vztah $L > l + 4d$.

1 bod

4. a, b) Na cyklistu, který jede bez šlapání, má dynamický účinek pohybová složka tíhové síly a odpor vzduchu, pro který platí Newtonův vztah $F_o = 0,5 \cdot CS\rho v^2$, kde v je relativní rychlost tělesa vůči vzduchu. Po dosažení mezní rychlosti se účinky obou sil ruší. Za bezvětří

$$mg \sin \alpha = 0,5 \cdot CS\rho v_1^2 = K v_1^2.$$

$K = \frac{mg \sin \alpha}{v_1^2}$ je konstanta úměrnosti v Newtonově vztahu daná hustotou vzduchu, rozměry a tvarem cyklisty. Pro dané hodnoty $K = 0,278 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$. Při jízdě po větru

$$mg \sin \alpha = K(v_2 - v_v)^2,$$

při jízdě proti větru

$$mg \sin \alpha = K(v_3 + v_v)^2.$$

Porovnáním dostáváme

$$v_2 = v_1 + v_v, \quad v_3 = v_1 - v_v.$$

Pro dané hodnoty $v_2 = 15,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 57 \text{ km/h}$, $v_3 = 5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 21 \text{ km/h}$.

3 body

- c) Při šlapání s kopce platí při rovnoměrném pohybu rychlostí v_4

$$mg \sin \alpha + F_1 = K v_4^2 = \frac{mg \sin \alpha}{v_1^2} v_4^2, \quad F_1 = mg \sin \alpha \left(\frac{v_4^2}{v_1^2} - 1 \right),$$

kde F_1 je velikost síly, kterou cyklista vyvinul šlapáním; pro dané hodnoty $F_1 = 29,9 \text{ N}$. Cyklista šlape s výkonem

$$P = F_1 v_4 = K v_4^3 - v_4 mg \sin \alpha = mg \sin \alpha \left(\frac{v_4^3}{v_1^2} - v_4 \right).$$

Pro dané hodnoty $P = 448 \text{ W} \doteq 450 \text{ W}$.

3 body

- d) Při rovnoměrné jízdě do kopce rychlostí v_5 musí cyklista vyvinout sílu o velikosti

$$F_2 = K v_5^2 + mg \sin \alpha = mg \sin \alpha \left(\frac{v_5^2}{v_1^2} + 1 \right)$$

a pro jeho výkon platí

$$P = F_2 v_5 = K v_5^3 + v_5 mg \sin \alpha = mg \sin \alpha \left(\frac{v_5^3}{v_1^2} + v_5 \right).$$

Dostáváme rovnici třetího stupně s neznámou v_5 . Po dosazení číselných hodnot a numerickém řešení dostaneme $v_5 = 8,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 31 \text{ km/h}$. **4 body**

Autoři úloh: M. Randa (1, 3), V. Vícha (2) a P. Šedivý (4)