

**ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 37. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY. Kategorie B**

1. a) Potenciální energii kuličky při projetí bodem A volíme jako nulovou. Ze zákona zachování energie vyplývá:

$$mgH = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2,$$

kde v_1 je velikost rychlosti středu kuličky a $\omega_1 = \frac{v_1}{R}$ je úhlová rychlost kuličky při průjezdu bodem A . Platí tedy

$$mgH = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{v_1^2}{R^2} = \frac{7}{10}mv_1^2, \quad v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gH}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Při průjezdu bodem B působí kulička na plochu odstředivou silou o velikosti

$$F_2 = F_o = \frac{mv_2^2}{r - R}.$$

Velikost v_2 rychlosti středu kuličky určíme opět ze zákona zachování energie:

$$mg(H + R) = mgr + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{v_2^2}{R^2} = mgr + \frac{7}{10}mv_2^2.$$

Sloučením obou vztahů dostaneme:

$$F_2 = \frac{10}{7}mg \frac{H - r + R}{r - R}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Aby kulička byla i při průjezdu nejvyšším bodem přitlačena na plochu, musí zde být dostředivá síla větší nebo rovna síle tíhové:

$$\frac{mv_3^2}{r - R} \geq mg.$$

Velikost v_3 rychlosti středu kuličky určíme z rovnice

$$mg(H + R) = mg(2r - R) + \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{v_3^2}{R^2} = mg(2r - R) + \frac{7}{10}mv_3^2.$$

Po dosazení a úpravě:

$$r \leq R + \frac{10}{27}H. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- d) Dosadíme do předcházejícího vztahu a dostaneme:

$$r \leq R + \frac{20}{27}r, \quad R \geq \frac{7}{27}r = \frac{7}{54}H. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

2. Odpor větve AB je $R = \varrho \frac{a}{S}$, kde a je délka strany čtverce, S je průřez vodiče a ϱ je měrný elektrický odpor materiálu, ze kterého je drát vyroben. Stejný odpor mají také větve BC , CD a AD . Odpor větve AE (rovněž BE , CE , DE) je

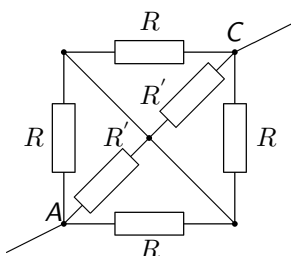
$$R' = \varrho \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{S} = R \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

a) R_{AC} :

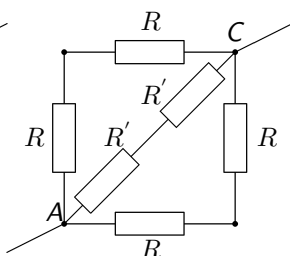
V bodech B , D a E je stejný potenciál. Lze proto větve BE , DE nahradit zkratem (obr. RB-1a) nebo vypustit (obr. RB 1.b). V obou případech dojdeme ke stejnému odporu R_{AC} :

$$\frac{1}{R_{AC}} = 2 \frac{1}{2R} + \frac{1}{2 \cdot R \frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad R_{AC} = R (2 - \sqrt{2}) \doteq 0,586 R.$$

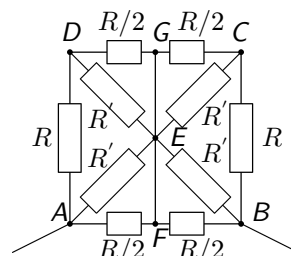
3 body



Obr. RB-1.a



Obr. RB-1.b



Obr. RB-2

b) $R_{AB}(= R_{AD})$:

Střed F větve AB a střed G větve CD mají stejný potenciál jako bod E . Z náhradního schématu na obr. RB-2 plyne:

$$R_{AB} = \frac{2}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R + \frac{2}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R'}}}} = \dots = R \cdot \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7} \doteq 0,478 R.$$

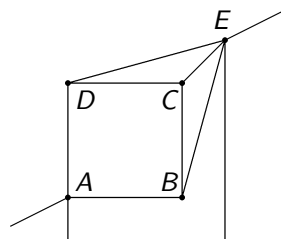
3 body

c) R_{AE} :

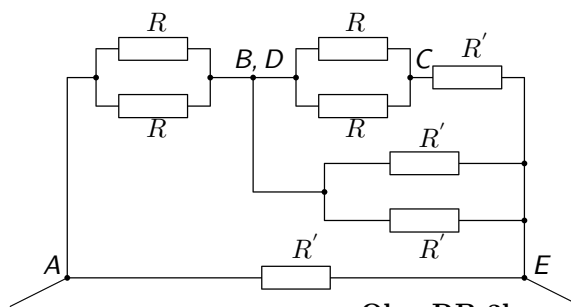
Pro přehlednost překreslíme schéma podle obr. RB-3a. V bodech B a D je stejný potenciál. Z náhradního schématu na obr. RB-3b plyne:

$$R_{AE} = \frac{1}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{\frac{R}{2} + \frac{1}{\frac{2}{R'} + \frac{1}{\frac{R}{2} + R'}}}} = \dots = R \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{7} \doteq 0,369 R.$$

3 body



Obr. RB-3a



Obr. RB-3b

Odpory jsou v poměru

$$R_{AC} : R_{AB} : R_{AE} = 0,586 : 0,478 : 0,369.$$

Největší odpor naměříme mezi uzly A a C , nejmenší mezi uzly A a E . **1 bod**

3. a) Označíme výšky hladin kapalin v nádobách h_1 a h_2 . Pro $x = 0$ mají kapaliny hmotnosti

$$m_1 = S_1 h_1 \rho_1, \quad m_2' = S_2 h_2 \rho_2 + S l \rho_2$$

a hydrostatický tlak ve spojovací trubici je $p = h_1 \rho_1 g = h_2 \rho_2 g$.

$$\text{Odtud} \quad m_2' = \frac{S_2}{S_1} m_1 + S l \rho_2.$$

Podobně pro druhou krajní polohu rozhraní, pro $x = l$, dostaneme

$$m_2'' = \frac{S_2}{S_1} m_1 - \frac{S_2 S}{S_1} l \rho_1.$$

Má-li rozhraní ležet ve spojovací trubici, musí hmotnost m_2 splňovat podmínku

$$\frac{S_2}{S_1} m_1 - \frac{S_2 S}{S_1} l \rho_1 < m_2 < \frac{S_2}{S_1} m_1 + S l \rho_2. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Pro hmotnosti kapalin a hydrostatický tlak ve spojovací trubici platí:

$$m_1 = S_1 h_1 \rho_1 + S x \rho_1, \quad m_2 = S_2 h_2 \rho_2 + S(l - x) \rho_2, \quad h_1 \rho_1 g = h_2 \rho_2 g.$$

Po vyloučení h_1 , h_2 :

$$x = \frac{S_2 m_1 - S_1 m_2 + S S_1 l \rho_2}{S S_2 \rho_1 + S S_1 \rho_2}.$$

2 body

- c) Předmět bude v levé nádobě plavat. Hmotnost první kapaliny, která by vyplnila ponořenou část tělesa je podle Archimédova zákona m ; proto je situace v levé nádobě stejná, jako kdybychom zvětšili hmotnost m_1 na $m_1 + m$.

V pravé nádobě se předmět potopí. Objem druhé kapaliny s ponořeným tělesem bude $m_2/\varrho_2 + m/\varrho$. Situace v pravé nádobě je stejná, jako kdyby hmotnost druhé kapaliny vzrostla z m_2 na $m_2 + \frac{m}{\varrho}\varrho_2$. Před vhozením předmětů platí

$$\frac{l}{2} = \frac{S_2 m_1 - S_1 m_2 + S S_1 l \varrho_2}{S S_2 \varrho_1 + S S_1 \varrho_2},$$

po vhození předmětů

$$x = \frac{l}{2} + \frac{S_2 m - S_1 \varrho_2 \frac{m}{\varrho}}{S S_2 \varrho_1 + S S_1 \varrho_2},$$

Protože $x \in \langle 0, l \rangle$, musí pro hmotnost předmětů platit:

$$m \leq \frac{l S \varrho}{2} \cdot \frac{S_2 \varrho_1 + S_1 \varrho_2}{S_2 \varrho - S_1 \varrho_2}, \quad \text{je-li } S_2 \varrho > S_1 \varrho_2$$

nebo

$$m \leq \frac{l S \varrho}{2} \cdot \frac{S_2 \varrho_1 + S_1 \varrho_2}{S_1 \varrho_2 - S_1 \varrho}, \quad \text{je-li } S_2 \varrho < S_1 \varrho_2.$$

Je-li $S_2 \varrho = S_1 \varrho_2$, může být m libovolné, protože poloha rozhraní se nemění.

3 body

d) Pro dané hodnoty určíme nejprve výšky hladin před vhozením předmětů:

$$\left(h_1 S_1 + S \frac{l}{2} \right) \varrho_1 = m_1 \quad h_1 = \frac{\frac{m_1}{\varrho_1} - S \frac{l}{2}}{S_1} = 0,500 \text{ m},$$

$$h_2 = h_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 0,625 \text{ m}.$$

Po vhození předmětů platí:

$$x = 53,96 \text{ m}, \quad h'_1 = h_1 + \frac{m}{\varrho_1 S_1} - \left(x - \frac{l}{2} \right) \frac{S}{S_1} = 0,560 \text{ m},$$

$$h'_2 = h_2 + \frac{m}{\varrho S_2} + \left(x - \frac{l}{2} \right) \frac{S}{S_2} = 0,700 \text{ m}.$$

3 body

4. a) Vyjdeme ze vztahů:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad p_2 V_1^\kappa = p_1 V_3^\kappa, \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_3}{T_3}.$$

Úpravou dostaneme:

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1}, \quad V_3 = V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad T_3 = T_1 \frac{V_3}{V_1} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Pro dané hodnoty: $T_2 = 900 \text{ K}$, $T_3 = 657 \text{ K}$, $V_3 = 2,63 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. **3 body**

b) Celková práce vykonaná během jednoho cyklu je rovna rozdílu práce vykonané při adiabatické expanzi a práce spotřebované při izobarické kompresi: $W' = W'_{23} - W_{31}$.

Práce vykonaná plynem při adiabatické expanzi je rovna úbytku vnitřní energie plynu:

$$\begin{aligned} W'_{23} = U_2 - U_3 &= \frac{5}{2} nR(T_2 - T_3) = \frac{5}{2} nRT_1 \left[\frac{p_2}{p_1} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right] = \\ &= \frac{5}{2} p_1 V_1 \left[\frac{p_2}{p_1} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]. \end{aligned}$$

Práci spotřebovanou plynem při izobarické kompresi určíme z p - V diagramu:

$$\begin{aligned} W_{31} &= p_1(V_3 - V_1) = p_1 V_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]. \\ W' &= p_1 V_1 \left[\frac{5}{2} \frac{p_2}{p_1} - \frac{7}{2} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Pro dané hodnoty: $W' = 99,4 \text{ J}$.

3 body

c) Účinnost motoru určíme jako poměr celkové práce vykonané při jednom pracovním cyklu a tepla přijatého plynem při izochorickém ohřátí:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} (p_2 V_1 - p_1 V_1) = \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right).$$

$$\eta = \frac{W'}{Q_{12}} = \frac{\frac{5}{2} \frac{p_2}{p_1} - \frac{7}{2} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} + 1}{\frac{5}{2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right)}.$$

Pro dané hodnoty: $Q_{12} = 600 \text{ J}$, $\eta = 16,6 \%$. Účinnost Carnotova cyklu, který by probíhal mezi teplotami T_2 a T_1 by měla hodnotu

$$\eta_c = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{p_1}{p_2} = 66,7 \, \%.$$

Byla by tedy přibližně čtyřikrát větší než účinnost daného cyklu. **4 body**

5. a) Z deformace pružiny po zavěšení misky určíme tuhost pružiny $k = \frac{m_1 g}{\Delta l}$.

Kulička z plastelíny dopadne na misku z výšky h rychlostí o velikosti

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Dopad kuličky můžeme považovat za nepružný ráz, po kterém miska i s kuličkou získají počáteční rychlost o souřadnici

$$v_0 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}v = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}$$

a začnou kmitat s úhlovou frekvencí a periodou

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\Delta l(m_1 + m_2)}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\Delta l}{m_1 g}}$$

okolo nové rovnovážné polohy. V této rovnovážné poloze je síla pružiny v rovnováze s tíhou misky se závažím a pružina je deformována o

$$\Delta l' = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = \frac{(m_1 + m_2)\Delta l}{m_1}.$$

Vzdálenost rovnovážných poloh nezátížené a zatížené misky určuje počáteční výchylku misky

$$y_0 = \Delta l' - \Delta l = \frac{m_2 \Delta l}{m_1}.$$

3 body

Časové průběhy okamžité výchylky a rychlosti kmitů jsou popsány rovnicemi

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad v = v_m \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega y_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

V čase $t = 0$ platí

$$y_m \sin \varphi_0 = y_0 = \frac{m_2 \Delta l}{m_1}, \quad y_m \cos \varphi_0 = \frac{v_0}{\omega} = -\frac{m_2 \sqrt{2h\Delta l}}{\sqrt{m_1(m_1 + m_2)}}.$$

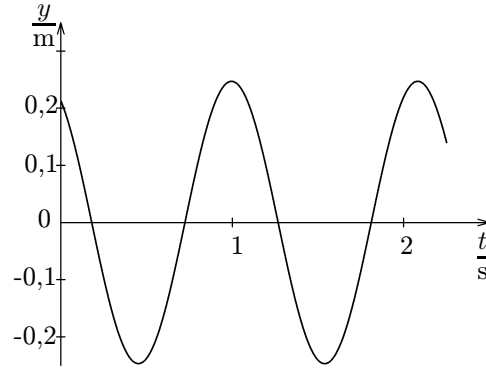
Řešením této soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{\omega y_0}{v_0} = -\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\Delta l}{2hm_1}}, \\ y_m &= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{m_2^2(\Delta l)^2}{m_1^2} + \frac{2m_2^2 h \Delta l}{m_1(m_1 + m_2)}}. \end{aligned}$$

Pro dané hodnoty: $\operatorname{tg} \varphi_0 = -1,713$, $\varphi_0 = 120,3^\circ = 2,10 \text{ rad}$, $y_m = 0,247 \text{ m}$,
 $\omega = 5,78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $T = 1,09 \text{ s}$, $v_0 = -0,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. **4 body**

b) Časový diagram okamžité výchylky na obr. RB-4 je popsán rovnicí

$$\{y\} = 0,247 \sin(5,78\{t\} + 2,10).$$



Obr. RB-4

3 body

7. a) Dosáhne-li lyžař maximální rychlosti v_m , je pohybová složka tíhové síly v rovnováze s odporem vzduchu a smykovým třením mezi lyžemi a sněhem. Pro úhly α_1 a α_2 dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha_1 &= mgf \cos \alpha_1 + \frac{1}{2} CS \rho v_{m1}^2, \\ mg \sin \alpha_2 &= mgf \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} CS \rho v_{m2}^2, \end{aligned} \quad (1)$$

ze které vyjádříme

$$C = \frac{2mg(\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)}{S\rho(v_{m2}^2 \cos \alpha_1 - v_{m1}^2 \cos \alpha_2)} = \frac{2mg \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{S\rho(v_{m2}^2 \cos \alpha_1 - v_{m1}^2 \cos \alpha_2)}.$$

Pro dané hodnoty $C = 0,42$.

4 body

b) Řešením soustavy (1) dále dostaneme

$$f = \frac{v_{m2}^2 \sin \alpha_1 - v_{m1}^2 \sin \alpha_2}{v_{m2}^2 \cos \alpha_1 - v_{m1}^2 \cos \alpha_2}.$$

Pro dané hodnoty $f = 0,12$.

3 body

c) Maximální rychlost lyžaře na svahu se sklonem α_3 určíme ze vztahu

$$v_{m3} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}(\sin \alpha_3 - f \cos \alpha_3)}.$$

Po dosazení $v_{m3} = 46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3 body

Autoři úloh: M. Randa (1, 2), K. Rauner (3), P. Šedivý (4, 6, 7), I. Volf (5)