

Řešení úloh regionálního kola 37. ročníku FO, kategorie A

1. a) V krátkém časovém úseku můžeme valivý pohyb kotoučů bez klouzání popsat jako otáčivý pohyb okolo okamžité osy, která se nachází v místě dotyku kotoučů s podložkou. Mezi rychlostí pohybu těžiště tělesa a úhlovou rychlostí otáčivého pohybu platí vztah $v = R\omega$. Podobně mezi zrychlením posuvného pohybu a úhlovým zrychlením otáčivého pohybu platí vztah $a = R\varepsilon$. Z pohybové rovnice

$$M = F(R + r) = (J + mR^2)\varepsilon = (J + mR^2)\frac{a}{R}$$

vyjádříme

$$a = \frac{FR(R + r)}{mR^2 + J}.$$

2 body

- b) Rychlost konce lanka v' je stejná jako okamžitá rychlost nejvyššího bodu hřídele. Platí

$$v' = \omega(R + r) = v \frac{R + r}{R}, \quad a' = \frac{dv'}{dt} = \frac{R + r}{R} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{R + r}{R} a.$$

2 body

Pro dané hodnoty dostáváme: $a = 1,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a' = 2,06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1 bod

- c) Předpokládejme, že smykové tření F_t má opačný směr než síla F působící na lanko. Z pohybové rovnice

$$F - F_t = ma$$

dostaneme:

$$F_t = F - ma = F - \frac{mFR(R + r)}{mR^2 + J} = F \frac{J - mRr}{J + mR^2}.$$

2 body

Mohou nastat 3 případy:

1. $J > mRr \Rightarrow F_t > 0$... Smykové tření má předpokládaný směr – opačný než síla F .
2. $J = mRr \Rightarrow F_t = 0$... V tomto případě smykové tření nevzniká.
3. $J < mRr \Rightarrow F_t < 0$... Smykové tření má stejný směr jako síla F .

K prokluzování kotoučů nedojde, pokud $|F_t| < f \cdot mg$. Ve druhém případě nedojde k prokluzování kotouče při libovolně velké tažné síle $\mathbf{F}$. V prvním a třetím případě nedojde k prokluzování kotouče, jestliže

$$F < \frac{J + mR^2}{|J - mRr|} \cdot fmg = F_0.$$

2 body

Pro dané hodnoty dostáváme: $F_0 = 21,6 \text{ N}$... k prokluzování nedojde.

1 bod

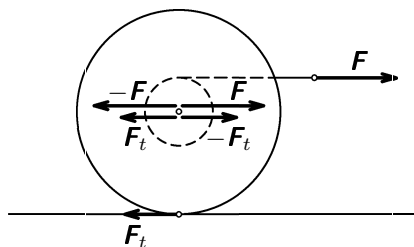
Jiné řešení:

Valivý pohyb bez klouzání můžeme popsat jako pohyb složený z posuvného pohybu určeného přímočarým pohybem těžiště a z otáčivého pohybu okolo osy procházející těžištěm. Předpokládejme, že v místě dotyku kotoučů s podložkou působí smykové tření $\mathbf{F}_t$ ve směru vyznačeném na obr. 1. Doplníme-li nákres o síly $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_t$ a $-\mathbf{F}_t$ působící v těžišti, dynamická situace se nezmění. Vidíme, že působení síly lanka a smykového tření můžeme nahradit působením síly o velikosti $F - F_t$ v těžišti a dvěma dvojicemi sil, jejichž celkový moment má velikost $Fr + F_tR$. Řešením pohybových rovnic

$$F - F_t = ma, \quad Fr + F_tR = J\varepsilon = J\frac{a}{R}$$

dojdeme ke vztahům

$$a = \frac{FR(R+r)}{mR^2 + J}, \quad F_t = F \frac{J - mRr}{J + mR^2}.$$



obr. 1

2. a) Z pozorovaného bodu A astronomického objektu přicházejí do objektivu rovnoběžné paprsky, které by objektiv soustředil do bodu A' v obrazové ohniskové rovině. Díváme-li se do dalekohledu neakomodovaným okem, musejí paprsky vystupovat z okuláru rovnoběžně. Toho dosáhneme, bude-li předmětová ohnisková rovina okuláru splývat s obrazovou ohniskovou rovinou objektivu (obr. 2.a). Z obrázku odvodíme vztah pro výpočet úhlového zvětšení:

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau} \doteq \frac{\operatorname{tg} \tau'}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{\frac{m}{|f_2|}}{\frac{m}{f_1}} = \frac{f_1}{|f_2|}.$$

Pro dané hodnoty $\gamma = 10$.

3 body

- b) Z bodu A ležícího ve vzdálenosti a od dalekohledu přicházejí do objektivu rozbíhavé paprsky, které by objektiv soustředil do bodu A' ve vzdálenosti a' . Určíme ji použitím čočkové rovnice:

$$a' = \frac{af_1}{a - f_1}.$$

Díváme-li se do dalekohledu neakomodovaným okem, musejí paprsky opět vystupovat z okuláru rovnoběžně. Toho dosáhneme, bude-li předmětová ohnisková rovina okuláru ležet ve vzdálenosti a' od objektivu (obr. 2.b). Z obrázku odvodíme vztah pro výpočet úhlového zvětšení:

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau} \doteq \frac{\operatorname{tg} \tau'}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{\frac{m}{|f_2|}}{\frac{m}{a'}} = \frac{a'}{|f_2|} = \frac{af_1}{|f_2|(a - f_1)}.$$

Pro dané hodnoty $\gamma = 10,2$.

4 body

- c) V případě a) je vzdálenost d_0 objektivu a okuláru rovna rozdílu absolutních hodnot jejich ohniskových vzdáleností:

$$d_0 = f_1 - |f_2|.$$

V případě b) je vzdálenost objektivu a okuláru

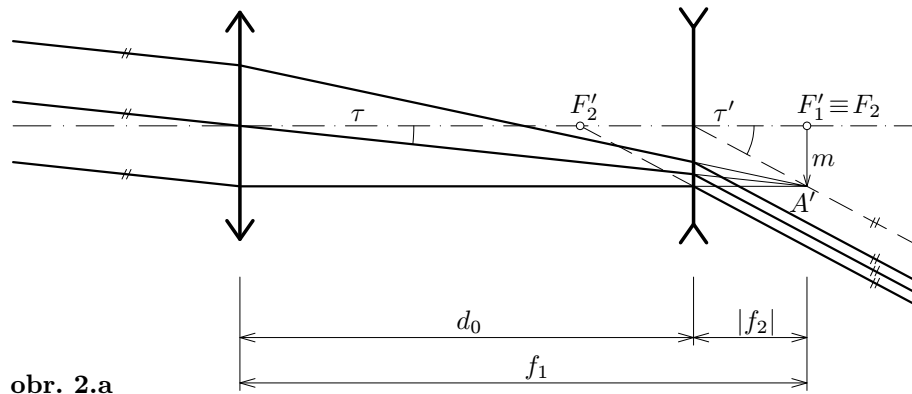
$$d = a' - |f_2|.$$

Rozdíl obou vzdáleností je

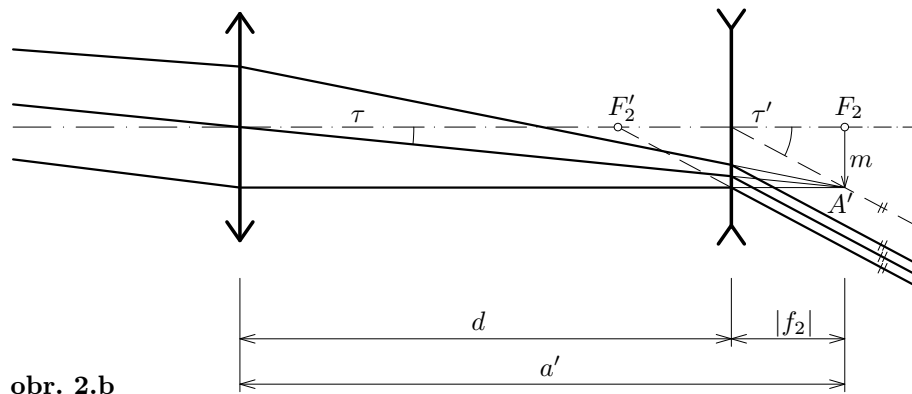
$$\Delta d = d - d_0 = a' - f_1 = \frac{af_1}{a - f_1} - f_1 = \frac{f_1^2}{a - f_1}.$$

Pro dané hodnoty $d = 0,275 \text{ m}$, $\Delta d = 0,0046 \text{ m}$. Okulár musíme vzdálit od objektivu o 4,6 mm.

3 body



obr. 2.a



obr. 2.b

3. a) Vstupní napětí se na děliči rozdělí v poměru impedancí. Napětový přenos děliče je

$$A = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{2R}{2j\omega C}}{2R + \frac{1}{2j\omega C}} = \frac{\frac{2R}{4j\omega RC + 1}}{\frac{R}{1 + j\omega RC} + \frac{2R}{1 + 4j\omega RC}} =$$

$$= \frac{2 + 2j\omega RC}{3 + 6j\omega RC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + j\omega RC}{1 + 2j\omega RC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + 2\omega^2 R^2 C^2 - j\omega RC}{1 + 4\omega^2 R^2 C^2}.$$

Absolutní hodnotu napětového přenosu a fázové posunutí určují vztahy:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\sqrt{1 + 4\omega^2 R^2 C^2}}, \quad \text{tg } \varphi = -\frac{\omega RC}{1 + 2\omega^2 R^2 C^2}.$$

Fázové posunutí je záporné – výstupní napětí je opožděno za vstupním.

2 body

- b) Extrém nastane, jestliže

$$\frac{d(\text{tg } \varphi)}{d\omega} = \frac{-RC(1 + 2\omega^2 R^2 C^2) + \omega RC \cdot 4R^2 C^2}{(1 + 2\omega RC)^2} = \frac{RC(2\omega^2 R^2 C^2 - 1)}{(1 + 2\omega RC)^2} = 0.$$

Tomu odpovídá úhlová frekvence

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}RC},$$

pro kterou úhel φ dosahuje minima, neboť pro $\omega > \omega_1$ je derivace kladná a pro $\omega < \omega_1$ je derivace záporná.

2 body

Po dosazení $\omega_1 = 707 \text{ s}^{-1}$, $f_1 = 113 \text{ Hz}$.

Při této frekvenci je

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,47,$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0,354, \quad \varphi = -19,5^\circ \doteq -0,340 \text{ rad}.$$

2 body

c) Vztahy pro výpočet absolutní hodnoty napěťového přenosu a fázového posunutí můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{2\omega_1^2}}}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{f^2}{2f_1^2}}}{\sqrt{1 + 2\frac{f^2}{f_1^2}}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\frac{\omega}{\omega_1\sqrt{2}}}{1 + 2\frac{\omega^2}{\omega_1^2}} = -\frac{\frac{f}{f_1\sqrt{2}}}{1 + 2\frac{f^2}{f_1^2}}.$$

Při nízkých frekvencích ($f \ll f_1$) platí

$$A \rightarrow \frac{2}{3}, \quad \varphi \rightarrow 0^\circ.$$

Při vysokých frekvencích ($f \gg f_1$) platí

$$A \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \varphi \rightarrow 0^\circ.$$

2 body

d) Vyměníme-li oba kondenzátory, změní se napěťový přenos na

$$A = \frac{\frac{2R}{\frac{1}{j\omega C}}}{2R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{2R}{2j\omega RC + 1}}{\frac{R}{1 + 2j\omega RC} + \frac{2R}{1 + 2j\omega RC}} = \frac{2}{3} = \text{konst.}$$

Dělič má stejný napěťový přenos, jako kdyby byl tvořen pouze rezistory o odporech R a $2R$. Absolutní hodnota napěťového přenosu a fázové posunutí mají hodnoty

$$A = \frac{2}{3}, \quad \varphi = 0^\circ.$$

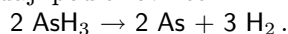
2 body

4. a) Počáteční tlak plynu p_0 souvisí s počátečním počtem molekul N_0 podle stavové rovnice:

$$\frac{p_0 V}{T} = \frac{N_0}{N_A} R_m ,$$

kde N_A je Avogadrova konstanta a R_m molární plynová konstanta. **2 body**

Molekuly arsanu se rozkládají podle rovnice



Z každých dvou molekul arsanu vzniknou tedy tři molekuly vodíku. **2 body**

Počet dosud nerozložených molekul arsanu v čase t označíme N . Za malý časový interval dt se rozloží počet molekul, který je úměrný počtu dosud nerozložených molekul a délce intervalu. Označíme-li konstantu úměrnosti λ , bude

$$dN = -\lambda N dt , \quad \frac{dN}{N} = -\lambda dt .$$

Znaménko minus vyjadřuje, že se počet molekul zmenšuje. Integrací dostaneme

$$\ln N = -\lambda t + C .$$

V čase $t = 0$ však byl počet molekul arsanu N_0 , takže $C = \ln N_0$. Proto

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0 , \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t , \quad N = N_0 e^{-\lambda t} .$$

V čase t bude celkový počet molekul v nádobě

$$N_c = N + \frac{3}{2}(N_0 - N) = \frac{N_0}{2} (3 - e^{-\lambda t}) .$$

Zbývá ještě určit konstantu λ . Podle zadání platí

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \tau} , \quad e^{-\lambda \tau} = \frac{1}{2} , \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau} .$$

Pro tlak plynu ze stavové rovnice odvodíme:

$$p = \frac{N_c R_m T}{N_A V} = \frac{N_0 (3 - e^{-\lambda t}) R_m T}{2 N_A V} = p_0 \frac{3 - e^{-\lambda t}}{2} .$$

4 body

- b) Po dlouhé době bude člen $e^{-\lambda t}$ zanedbatelný a tlak bude mít hodnotu

$$p = \frac{3}{2} p_0 .$$

2 body

Autoři úloh: V. Havel, V. Vícha, P. Šedivý a J. Blažek