

**ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 37. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY. Kategorie A**

1. Situaci při zvedání trámu znázorňuje obr. RA-1. Na trám působí tři síly: tíhová síla $\mathbf{F}_G$, vztlaková síla $\mathbf{F}_v$ a síla lana $\mathbf{F}$, které splňují podmínky rovnováhy. Protože tíhová síla působí svisle dolů a vztlaková síla působí svisle vzhůru, přemisťuje se trám ve vodě tak, že i síla lana působí stále svisle vzhůru. Platí:

$$F = F_G - F_v = \varrho l g S - \varrho_1 2x g S,$$

1 bod

kde x je vzdálenost těžiště ponořené části od konce a $2x$ je délka ponořené části trámu. Z momentové věty pro osu procházející těžištěm trámu dostaneme:

$$F \frac{l}{2} \cos \alpha = F_v \left(\frac{l}{2} - x \right) \cos \alpha, \quad (F_G - F_v) \frac{l}{2} = F_v \left(\frac{l}{2} - x \right),$$

$$(\varrho l - \varrho_1 2x) \frac{l}{2} = \varrho_1 2x \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

Úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici

$$4\varrho_1 x^2 - 4\varrho_1 l x + \varrho l^2 = 0,$$

3 body

která má řešení

$$x = \frac{l \left(\varrho_1 \pm \sqrt{\varrho_1 (\varrho_1 - \varrho)} \right)}{2\varrho_1}.$$

Protože $x < l/2$, vyhovuje úloze kořen se znaménkem (-) a délka ponořené části má stálou velikost

$$2x = l \left(1 - \sqrt{\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}} \right).$$

Délka vynořené části je

$$l_1 = l - 2x = l \sqrt{\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}}.$$

Lano působí konstantní silou

$$F_1 = F_G - \varrho_1 g S 2x = F_G \left[1 - \frac{\varrho_1}{\varrho} \left(1 - \sqrt{\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}} \right) \right].$$

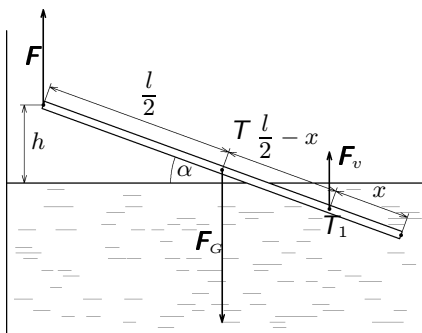
2 body

Odvozené vztahy přestanou platit, jakmile výška h zvedaného konce překročí hodnotu l_1 a trám zaujme svislou polohu. Od tohoto okamžiku se vztlačková síla rovnoměrně zmenšuje a pro $h = l$ je nulová. Síla lana dosáhne velikosti F_G a dále už neroste.

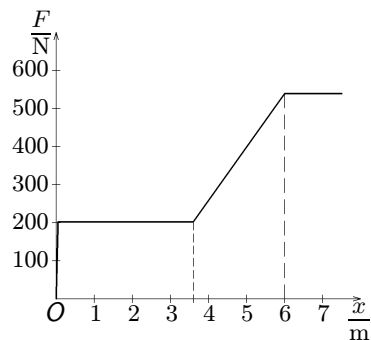
2 body

Pro dané hodnoty dostaneme: $l_1 = 0,60l = 3,6$ m, $F_G = 539$ N, $F_1 = = 0,375 F_G = 202$ N. Znalost těchto výsledků stačí k sestrojení grafu na obr. RA-2.

2 body



Obr. RA-1



Obr. RA-2

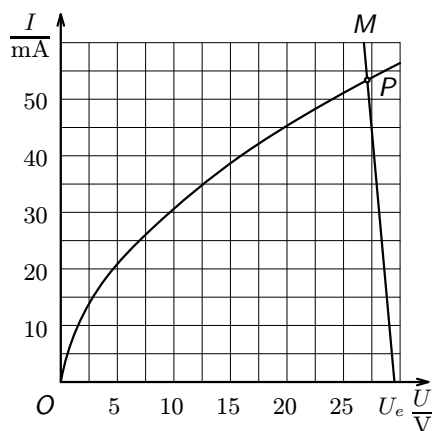
- 2.a) Voltampérová charakteristika žárovky je graf funkce $I = f(U)$ vyjadřující vztah mezi napětím na žárovce a proudem, který žárovkou prochází. V jednoduchém obvodu s jedinou žárovkou je napětí na žárovce současně svorkovým napětím zdroje, pro které platí

$$I = \frac{U_e - U}{R_i}.$$

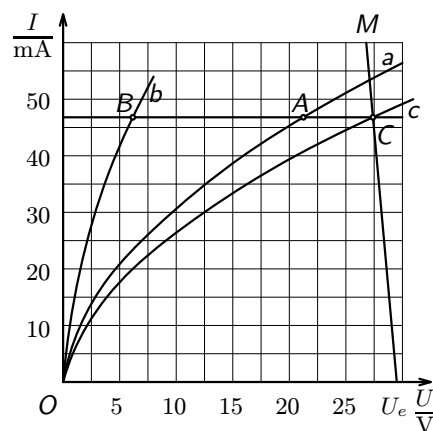
Také tento lineární vztah můžeme vyjádřit graficky jako tzv. *zatěžovací charakteristiku zdroje*. K sestrojení zatěžovací charakteristiky postačí znát elektromotorické napětí zdroje a svorkové napětí při některé hodnotě odebíraného proudu. Na obr. RA-3 byl použit bod M o souřadnicích $I = 60$ mA; $U = = 29,5$ V – $45 \Omega \cdot 0,060$ A = 26.8 V.

Průsečík obou grafů P určuje řešení úlohy: $U = 27,1$ V, $I = 53.4$ mA

3 body



Obr. RA-3



Obr. RA-4

b) Dvěma paralelně spojenými žárovkami prochází dvakrát větší proud než jednou žárovkou. Tomu odpovídá na obr. RA-4 graf *b*.

2 body

c) Připojíme-li ke zdroji skupinu žárovek zapojenou podle obr. A-2, bude svorkové napětí zdroje U rovno součtu napětí U_1 na samostatné žárovce a napětí U_2 na žárovkách spojených paralelně. Tomu odpovídá na obr. RA-4 graf *c*.

2 body

d) Do společného obrázku s voltampérovými charakteristikami nakreslíme zatěžovací charakteristiku zdroje. Její průsečík *C* s grafem *c* určuje svorkové napětí zdroje a celkový proud v obvodu I .

Odečteme: $U = 27,4 \text{ V}$, $I = 46,8 \text{ mA}$.

Bodem *C* vedeme rovnoběžku s osou napětí a určíme její průsečík *B* s grafem *b*, který určuje napětí U_2 na paralelně spojených žárovkách a průsečík *A* s grafem *a*, který určuje napětí U_1 na zbývající žárovce.

Odečteme: $U_1 = 21,2 \text{ V}$, $U_2 = 6,2 \text{ V}$. Každou z paralelně zapojených žárovek prochází proud $I/2 = 23,2 \text{ mA}$.

3 body

3.a) Osvětlení podlahy v bodě C od obou zdrojů se sčítají. Platí (obr. RA-5):

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I_1}{(h - x_1)^2} + \frac{I_2}{(h - x_2)^2 + l^2} \cdot \cos \alpha = \frac{I_1}{(h - x_1)^2} + \frac{I_2(h - x_2)}{\sqrt{[(h - x_2)^2 + l^2]^3}}.$$

Pro $x_1 = x_2 = \frac{d - l}{2}$ dostaneme

$$E_0 = \frac{I_1}{\left(h - \frac{d - l}{2}\right)^2} + \frac{I_2 \left(h - \frac{d - l}{2}\right)}{\sqrt{\left[\left(h - \frac{d - l}{2}\right)^2 + l^2\right]^3}}.$$

Pro dané hodnoty: $x_1 = x_2 = 1,15$ m, $E_0 = 30,9$ lx.

2 body

b) Stejné osvětlení vyvolá v bodě C zdroj Z_1 , jestliže

$$E_0 = \frac{I_1}{(h - x_1)^2}, \quad x_1 = h - \sqrt{\frac{I_1}{E_0}}.$$

Současně musí platit $x_1 \leq d - l$.

Pro dané hodnoty: $x_1 = 2,20$ m; $d - l = 2,3$ m, $x_1 < d - l$.

2 body

c) Samotný zdroj Z_2 vyvolá v bodě C osvětlení E_0 , jestliže

$$E_0 = \frac{I_2(h - x_2)}{\sqrt{[(h - x_2)^2 + l^2]^3}}, \quad E_0^2 [(h - x_2)^2 + l^2]^3 = I_2^2(h - x_2)^2.$$

Dostáváme rovnici šestého stupně, kterou můžeme řešit pomocí počítače např. nalezením průsečíku grafů funkcí

$$E = E_0, \quad E = \frac{I_2(h - x_2)}{\sqrt{[(h - x_2)^2 + l^2]^3}} \quad (\text{obr. RA-6}).$$

Kořen musí současně splňovat podmínku $x \leq d - l$.

Pro dané hodnoty: $x_2 = 1,55$ m. (Další kořen $x_2 = 2,67$ m již nevyhovuje podmínce $x_2 < d - l = 2,3$ m.)

3 body

d) Z obr. RA-6 můžeme také přibližně určit, pro jaké x_2 vyvolá druhý zdroj v bodě C maximální osvětlení. Přesnější polohu extrému určíme pomocí první derivace:

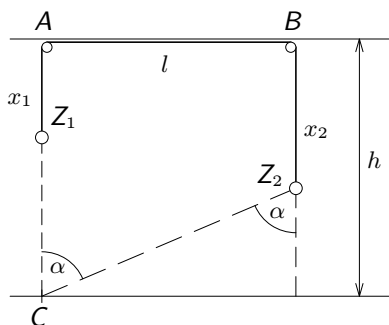
$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx_2} &= \\ &= I_2 \cdot \frac{-\sqrt{[(h - x_2)^2 + l^2]^3} - (l - x_2) \cdot \frac{3}{2} [(h - x_2)^2 + l^2]^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (h - x_2) \cdot (-1)}{[(h - x_2)^2 + l^2]^3} = 0, \end{aligned}$$

Řešením je

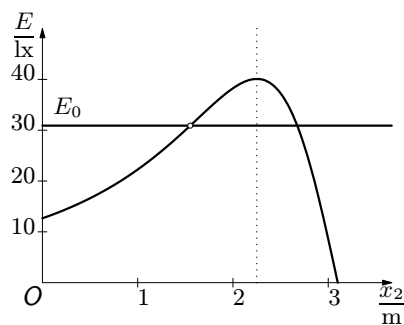
$$x_2 = h - \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Pro dané hodnoty: $x_2 = 2,25$ m. Tento kořen splňuje podmínku.

3 body



Obr. RA-5



Obr. RA-6

4. Při ohřívání vzduchu v místnosti se jeho tlak neustále vyrovnává s venkovním atmosférickým tlakem. Jedná se tedy o děj izobarický. Dodané teplo můžeme rozdělit na část Q_1 potřebnou k ohřátí vzduchu, který zůstane v místnosti, a na část Q_2 , kterou odnese vzduch postupně unikající do vnějšího prostoru.

Výpočet tepla Q_1 :

Hmotnost vzduchu, který zbyl ve třídě po dosažení požadované teploty T_1 , určíme pomocí stavové rovnice:

$$pV = \frac{m}{M_m} RT_1 \quad m = \frac{M_m pV}{RT_1}.$$

1 bod

K jeho ohřátí se spotřebovalo teplo

$$Q_1 = mc_p \Delta T = \frac{pV M_m c_p \Delta T}{RT_1}.$$

2 body

Pro dané hodnoty: $Q_1 = 6,76$ MJ.

1 bod

Výpočet tepla Q_2 :

Při ohřátí vzduchu o dT se jeho objem zvětší o $dV = V \frac{dT}{T}$. Tento přírůstek objemu unikne z místnosti. Na jeho ohřátí se spotřebovalo teplo

$$dQ = \varrho dV c_p (T - T_0).$$

2 body

Hustotu ϱ vypočteme ze stavové rovnice:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM_m}{RT}.$$

1 bod

Po dosazení dostáváme:

$$dQ = \frac{pVM_m c_p (T - T_0) dT}{RT^2}.$$

Provedeme integraci:

$$Q_2 = \frac{pVM_m c_p}{R} \int_{T_0}^{T_1} \left(\frac{1}{T} - \frac{T_0}{T^2} \right) dT = \frac{pVM_m c_p}{R} \left(\ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{\Delta T}{T_1} \right).$$

2 body

Pro dané hodnoty: $Q_2 = 0,24 \text{ MJ}$. Celkové množství tepla potřebné k ohřátí vzduchu ve třídě je $Q = Q_1 + Q_2 = 7,0 \text{ MJ}$.

1 bod

5. a) Označme F_{t1} třecí sílu mezi válcem a nakloněnou rovinou a F_{t2} třecí sílu mezi kvádrem a nakloněnou rovinou. Pro soustavu v klidu je $F_{t1} = 0$ (v opačném případě by na válec působil nenulový moment síly). Třecí síla F_{t2} je v rovnováze s pohybovými složkami tíhových sil, takže

$$F_{t2} = (m_1 + m_2)g \sin \alpha.$$

Soustava se udrží v klidu, pokud $F_{t2} \leq f m_2 g \cos \alpha$. V opačném případě, tj. pro

$$f < \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \operatorname{tg} \alpha = f_{max}$$

bude po nakloněné rovině sjíždět. Pro dané hodnoty: $f_{max} = 0,67$.

3 body

- b) Vyjdeme z pohybových rovnic pro válec a kvádr ve tvaru

$$(m_1 g \sin \alpha - F)r = (J + m_1 r^2) \frac{a}{r},$$

$$m_2 g \sin \alpha + F - f m_2 g \cos \alpha = m_2 a.$$

2 body

Jejich řešením je

$$a = g \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = g \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha}{\frac{3}{2} m_1 + m_2},$$

$$F = m_2 g \frac{f \left(m_1 + \frac{J}{r^2} \right) \cos \alpha - \frac{J}{r^2} \sin \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = m_1 m_2 g \frac{3f \cos \alpha - \sin \alpha}{3m_1 + 2m_2},$$

(Pro $F > 0$ je tyč namáhána tahem, pro $F < 0$ je namáhána tlakem.) Pro dané hodnoty: $a = 2,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $F = 2,0 \text{ N}$.

2 body

c) Třecí síla F_{t1} mezi válcem a nakloněnou rovinou uděluje válci úhlové zrychlení. Pokud se válec pohybuje bez prokluzování, platí

$$F_{t1} r = J \frac{a}{r}, \quad F_{t1} \leq f m_1 g \cos \alpha.$$

Po úpravě a dosazení dostaneme

$$\frac{J a}{r^2} = \frac{J g [(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha]}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + J} \leq f m_1 g \cos \alpha,$$

$$J(m_1 + m_2) \sin \alpha - J f m_2 \cos \alpha \leq f m_1 (m_1 + m_2) r^2 \cos \alpha + J f m_1 \cos \alpha,$$

$$f \geq \frac{J \sin \alpha}{m_1 r^2 \cos \alpha + J \cos \alpha} = \frac{\text{tg } \alpha}{\frac{m_1 r^2}{J} + 1} = \frac{\text{tg } \alpha}{3} = f_{\min}.$$

Pro dané hodnoty: $f_{\min} = 0,155$.

3 body

7. a) Děje v cyklotronu jsou na hranici platnosti klasické mechaniky. Na proton působí v magnetickém poli dostředivá síla o velikosti

$$F_d = \frac{m v^2}{r} = B e v, \quad m \doteq m_0.$$

Z toho odvodíme

$$v = 2\pi r f_p = \frac{B e}{m_0}, \quad f_p = \frac{B e}{2\pi m_0} = 22,9 \text{ MHz}.$$

1 bod

b) Zvětšení hmotnosti vede k prodloužení doby oběhu a ke ztrátě synchronizace pohybu protonu se změnami elektrického pole. Při kinetické energii 15 MeV můžeme ještě s dostatečnou přesností použít klasický vzorec:

$$E_k \doteq \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad v \doteq \sqrt{\frac{2 E_k}{m_0}} = 5,4 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,18 c,$$

$$r = \frac{v}{2\pi f_p} = \frac{\sqrt{2 m_0 E_k}}{B e} = 0,373 \text{ m}.$$

2 body

c) Hmotnost a rychlost protonu s kinetickou energií 400 MeV určíme podle relativistických vztahů:

$$m = m_0 + \frac{E_k}{c^2} = 2,38 \cdot 10^{-27} \text{ kg};$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = 0,71c = 2,1 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Z toho určíme poloměr trajektorie a frekvenci:

$$r = \frac{mv}{Be} = 2,42 \text{ m},$$

$$f = \frac{Be}{2\pi m} = \frac{Be}{2\pi m_0 \left(1 + \frac{E_k}{m_0 c^2}\right)} = \frac{f_p}{1 + \frac{E_k}{m_0 c^2}} = \frac{f_p}{1,43} = 16,0 \text{ MHz}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

d) Vyjádříme kinetickou energii protonu jako funkci frekvence:

$$1 + \frac{E_k}{m_0 c^2} = \frac{f_p}{f}, \quad E_k = m_0 c^2 \left(\frac{f_p}{f} - 1\right).$$

Zderivováním dostaneme

$$\frac{dE_k}{dt} = f E_1 = -m_0 c^2 f_p \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{df}{dt},$$

$$\frac{E_1}{m_0 c^2 f_p} dt = -\frac{1}{f^3} df.$$

Z toho integrací dojdeme k hledaným vztahům:

$$\frac{E_1}{m_0 c^2 f_p} \int_0^t dt = -\int_{f_p}^f \frac{1}{f^3} df,$$

$$\frac{E_1}{m_0 c^2 f_p} t = \frac{1}{2f^2} - \frac{1}{2f_p^2}, \quad t = \frac{m_0 c^2 f_p}{2E_1} \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{f_p^2}\right) = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Frekvence urychlovacího napětí se musí měnit v závislosti na čase podle vztahu:

$$f = \frac{f_p}{\sqrt{1 + \frac{2E_1 f_p}{m_0 c^2} t}}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Autoři úloh: J. Blažek (5), V. Havel (4), Z. Kluiber (7), P. Šedivý (1, 2 a 6), V. Vícha (3).