

Řešení úloh regionálního kola 36. ročníku FO, kategorie D

1. a) Pohyb chlapce byl nejprve po dobu t_1 rovnoměrně zrychlený se zrychlením $\mathbf{a}_1$ a nulovou počáteční rychlostí. V této části dosáhl rychlosti $\mathbf{v}_1$ a projel dráhu s_1 . Pak se pohyboval po dobu t_2 rovnoměrně rychlostí $\mathbf{v}_1$ a projel dráhu s_2 . V posledním úseku se jednalo o pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí $\mathbf{v}_1$ a zrychlením $\mathbf{a}_2$ orientovaným proti směru pohybu.

Odporová síla $\mathbf{F}_o$ valivého odporu působila na kolo během celého pohybu. V prvním úseku musel chlapec šlapáním na pedály vyvinout sílu $\mathbf{F}_1$, přičemž $F_1 > F_o$. V druhém úseku musel vyvinout sílu $\mathbf{F}_2$ stejně velkou jako odporová síla. Ve třetím úseku se dynamicky uplatnila pouze odporová síla.

2 body

- b) Ve třetí části pohybu se velikost hybnosti cyklisty s kolem zmenšila z mv_1 na nulu. Z toho určíme velikost odporové síly:

$$F_o = \frac{mv_1}{t_3} = \frac{80 \text{ kg} \cdot 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{12 \text{ s}} = 50 \text{ N}.$$

2 body

- c) Výkon chlapce v druhé části pohybu byl konstantní:

$$P_2 = F_2 v_1 = F_o v_1 = 50 \text{ N} \cdot 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 375 \text{ W}.$$

1 bod

- d) V první části pohybu vyvinul chlapec stálou sílu o velikosti

$$F_1 = ma_1 + F_o = \frac{mv_1}{t_1} + F_o = \frac{80 \text{ kg} \cdot 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{8 \text{ s}} + 50 \text{ N} = 75 \text{ N} + 50 \text{ N} = 125 \text{ N}.$$

Jeho rychlost se zvětšovala a s ní i okamžitý výkon. V čase t_1 dosáhl maximální hodnoty

$$P_{max} = F_1 v_1 = 125 \text{ N} \cdot 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 940 \text{ W}.$$

2 body

- e) Celková dráha

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{v_1 t_1}{2} + v_1 t_2 + \frac{v_1 t_3}{2} = 30 \text{ m} + 112,5 \text{ m} + 45 \text{ m} = 187,5 \text{ m}.$$

1 bod

- f) Celá mechanická práce vykonaná chlapcem v první a druhé části pohybu se spotřebovala působením třecí síly na celkové dráze s :

$$W_{celk} = F_1 s_1 + F_2 s_2 = F_o s = 9400 \text{ J}.$$

2 body

2. a) Pokud je odpor vzduchu zanedbatelný, platí pro volný pohyb míčku zákon zachování celkové mechanické energie. (Při odrazech, které nejsou dokonale pružné, se ovšem mechanická energie míčku zmenšuje.) Platí:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2, \quad k^2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{h_2}{h_1}, \quad k = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

Číselně vychází $k = 0,85$.

2 body

- b) Ponechme označení v_1 pro velikost rychlosti dopadu a v_2 pro velikost rychlosti odrazu. Podle zákona zachování energie platí:

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(kv_1)^2,$$

$$mgh = k^2 \left(mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \right) = \frac{h_2}{h_1} \left(mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \right),$$

$$h = k^2 \left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right) = \frac{h_2}{h_1} \left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right).$$

Číselně vychází $h = 1,49$ m.

4 body

- c) Platí stejné vztahy jako v úloze b):

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(kv_1)^2,$$

$$h = k^2 \left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right) = \frac{h_2}{h_1} \left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right).$$

Úpravou dostaneme:

$$v_0^2 = 2g \left(\frac{h}{k^2} - h_0 \right) = 2g \left(\frac{hh_1}{h_2} - h_0 \right).$$

Číselně vychází $v_0 = 7,2$ m·s⁻¹.

4 body

3. a) Podle 3. Keplerova zákona

$$\left(\frac{r_M}{r_Z}\right)^3 = \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2, \quad r_M = r_Z \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^{\frac{2}{3}} = 227,9 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

$$v_M = \frac{2\pi r_M}{T_M} = 24,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

b) Z obr. D-1 odvodíme:

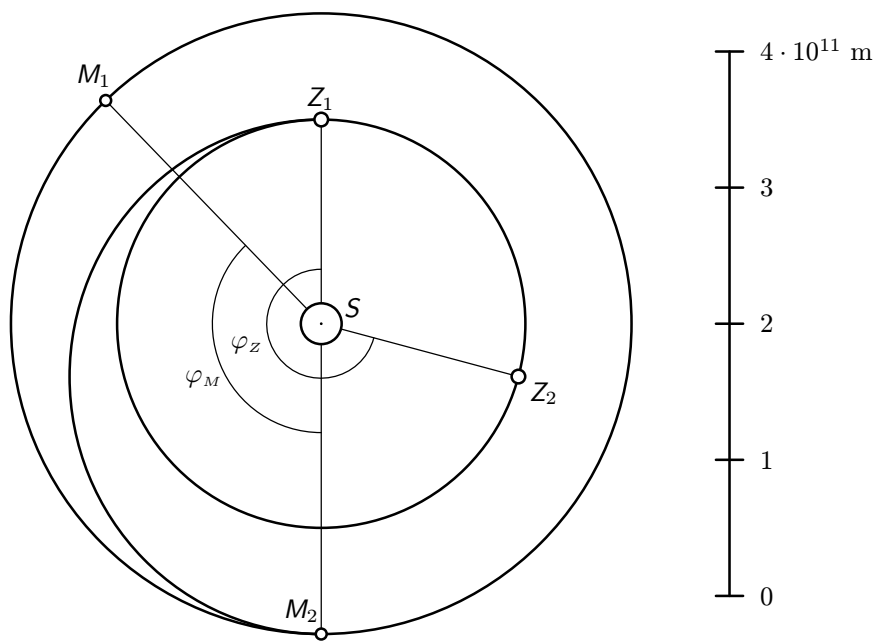
$$2a = r_Z + r_M, \quad a = \frac{r_Z + r_M}{2} = 188,8 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

1 bod

c) Dobu letu po Hohmannově trajektorii určíme z 3. Keplerova zákona jako polovinu periody pohybu po celé elipse:

$$\left(\frac{T}{T_Z}\right)^2 = \left(\frac{a}{r_Z}\right)^3 \quad t = \frac{T}{2} = \frac{T_Z}{2} \left(\frac{a}{r_Z}\right)^{\frac{3}{2}} \doteq 259 \text{ d}.$$

2 body



Obr. RD.1

d) Na obr. RD-1 jsou trajektorie Země, Marsu a kosmické lodi zobrazeny ve vyznačeném měřítku. Během letu kosmické lodi se průvodiče Země a Marsu otočí o úhlové dráhy

$$\varphi_Z = \frac{t}{T_Z} \cdot 360^\circ = 255^\circ, \quad \varphi_M = \frac{t}{T_M} \cdot 360^\circ = 136^\circ.$$

Vynesením těchto úhlů nalezneme hledané polohy Z_2 a M_1 .

4 body

4. a) Označíme-li h výšku sudu a r jeho poloměr, je hmotnost sudu

$$m = \varrho(2\pi r^2 + 2\pi r h)d.$$

S uvažáním $r = \frac{h}{2}$ pak máme $m = \frac{3}{2}\varrho\pi h^2 d$, z čehož výška sudu je

$$h = \sqrt{\frac{2m}{3\pi d\varrho}}.$$

Číselně vychází $h = 47$ cm.

3 body

b) Objem sudu je $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4}h^3$ a po dosazení výsledku úlohy a)

$$V = \sqrt{\frac{m^3}{54\pi d^3\varrho^3}}.$$

Číselně vychází $V = 83$ l.

3 body

c) Platí $m' = m + \varrho_1 V = m + \varrho_1 \sqrt{\frac{m^3}{54\pi d^3\varrho^3}}$.

Číselně vychází $m' = 133$ kg.

2 body

d) Z Archimédova zákona plyne $\varrho_0 V g > (m + m_1)g$, kde ϱ_0 je hustota vody. Z rovnice dostaneme $m_1 < \varrho_0 V - m$.

Číselně vychází $m_1 < 58$ kg.

2 body

Autoři úloh: I. Volf (1, 2, 3), J. Jírů (4).