ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 36. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY.
Kategorie C

1. Na odpojený vagon působí síla tření $F_{t1} = m_1 a_1$, pohyb je rovnoměrně zpomalený. Pro brzdnou dráhu l a brzdnou dobu t_1 platí:

$$l = \frac{v_0 t_1}{2} = \frac{v_0^2}{2a_1}, \qquad t_1 = \frac{v_0}{a_1}.$$

3 body

Před odpojením vagonu byla tažná síla lokomotivy v rovnováze se silami tření. Po odpojení vagonu se tažná síla lokomotivy nezměnila, ale tření se zmenšilo. Výsledná síla F o velikosti $F = F_{t1}$ udělí zbytku vlaku zrychlení a_2 o velikosti

$$a_2 = \frac{F}{m - m_1} = \frac{m_1 a_1}{m - m_1} = \frac{m_1 v_0^2}{2l(m - m_1)}.$$

3 body

Za dobu t_1 urazí zbytek rychlíku dráhu

$$s = v_0 t_1 + \frac{a_2 t_1^2}{2} = 2l + \frac{m_1 a_1}{2(m - m_1)} \frac{v_0^2}{a_1^2} = 2l + \frac{m_1}{(m - m_1)} \cdot \frac{v_0^2}{2a_1} = 2l + \frac{m_1}{(m - m_1)} l.$$

2 body

Hledaná vzdálenost konce zbylého vlaku od odpojeného vagonu je

$$x = s - l = l + \frac{m_1}{(m - m_1)} l = \frac{m}{(m - m_1)} l = 222 \text{ m}.$$

2 body

V okamžiku, kdy odpojený vagon zastavil, byl konec zbylého vlaku ve vzdálenosti 222 m od čela odpojeného vagonu.

2. a) Obr. RC1. Pro tahové síly platí

$$F_{Cu} + F_{oc} = F_G. \qquad (1)$$

Relativní prodloužení a obsahy průřezů obou drátů jsou stejné. Z Hookova zákona plyne:

$$\frac{F_{Cu}}{F_{oc}} = \frac{E_{Cu}}{E_{oc}}. \qquad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) určíme hledané síly:

$$F_{oc} = F_G \frac{E_{oc}}{E_{oc} + E_{Cu}} = 380 \text{ N},$$

$$F_{Cu} = F_G \frac{E_{Cu}}{E_{oc} + E_{Cu}} = 208 \text{ N}.$$

4 body

b) Tyč je v rovnovážném stavu. Vyjdeme z momentové rovnice vzhledem k levému okraji tyče:

$$F_G \frac{l}{2} = F_{oc} x.$$

$$x = \frac{l(F_{Cu} + F_{oc})}{2F_{oc}} = \frac{l}{2}\left(\frac{F_{Cu}}{F_{oc}} + 1\right) = \frac{l}{2}\left(\frac{E_{Cu}}{E_{oc}} + 1\right) = 0{,}929 \text{ m}.$$

3 body

c) Prodloužení obou drátů je stejné:

$$\Delta l = \frac{F_{oc} l_1}{E_{oc} S} = \frac{F_G l_1}{S(E_{Cu} + E_{oc})} = 1{,}74\ \text{mm}.$$

3 body

Tahová síla v ocelovém drátu má velikost 380 N, v měděném 208 N. Ocelový drát je ve vzdálenosti 0,929 m od konce tyče, kde je upevněn měděný drát. Oba dráty se protáhly o 1,74 mm.

3. Oba úkoly vyřešíme současně. Napíšeme podmínku rovnováhy vzhledem k poloze podpěry v prvním případu (váleček celý ponořen):

$$mg(l - l_1) = m_1 g\left(l_1 - \frac{l}{2}\right) + \varrho V g l_1 - \varrho_V V g l_1 .$$

2 body

Obdobně napíšeme podmínku rovnováhy vzhledem k poloze posunuté podpěry (půl válečku vynořeno):

$$mg(l + a - l_1) = m_1 g\left(l_1 - a - \frac{l}{2}\right) + \varrho V g(l_1 - a) - \varrho_V \frac{V}{2} g(l_1 - a).$$

2 body

Řešením obou rovnic dostaneme:

$$m = \frac{V \varrho_V l_1 (l_1 - a)}{2al} - \frac{m_1}{2} = 17{,}5\ \text{kg}.$$

3 body

$$\varrho = \frac{\varrho_V \left(l_1 a + l_1 l + la - l_1^2\right)}{2al} - \frac{m_1}{2V} = 1{,}26 \cdot 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

3 body

Hmotnost závaží je 17,5 kg, hustota materiálu válečku je $1{,}26 \cdot 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

4. Množství kinetické energie, která se při rázu přemění na vnitřní energii spojených koulí, je rovna teplu, které je zapotřebí k zahřátí olova na teplotu tání a k roztátí n-té části látky.

$$Q = c(m_1 + m_2)(t_t - t) + n(m_1 + m_2) l_t .$$

Po dosazení $m_1 = k\, m_2$:

$$Q = m_2(k + 1)\left[c(t_t - t) + n l_t\right] . \tag{1}$$

3 body

Při rázu platí zákon zachování hybnosti:

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) u ,$$

kde u je rychlost koulí po rázu.

$$u = \frac{v(k - 1)}{k + 1} .$$

2 body

Vyjádříme změnu celkové kinetické energie, ke které dojde při rázu:

$$-\Delta E_k = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2},$$

$$-\Delta E_k = \frac{m_2 v^2}{2}\left[(k+1) - (k+1)\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\right] = \frac{2k m_2 v^2}{k+1}. \qquad (2)$$

3 body

Porovnáním vztahů (1) a (2) určíme rychlost v:

$$v = (k+1)\sqrt{\frac{c(t_t - t) + n l_t}{2k}} = 330\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

5. a) Obr. RC2. **1 bod**

b) Práci plynu určíme ze vztahu:

$$W = p_1 (V_2 - V_1).$$

1 bod

Rozdíl teplot určíme ze vztahu pro dodané teplo:

$$Q = mc_p (T_2 - T_1) = \frac{5nR_m (T_2 - T_1)}{2}, \qquad T_2 - T_1 = \frac{2Q}{5nR_m}.$$

1 bod

Pro práci vykonanou plynem platí:

$$W = p_1 (V_2 - V_1) = nR_m (T_2 - T_1) = \frac{nR_m 2Q}{5nR_m} = \frac{2Q}{5} = 1{,}2\ \mathrm{kJ}.$$

2 body

c) Změnu vnitřní energie určíme z prvního termodynamického zákona:

$$\Delta U = Q - W = \frac{3Q}{5} = 1{,}8\ \mathrm{kJ}.$$

1 bod

d) Teplotu t_2 určíme ze vztahu pro rozdíl teplot:

$$T_2 - T_1 = t_2 - t_1 = \frac{2Q}{5nR_m} = 144\ \mathrm{K}, \quad t_2 \doteq 171\ ^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

Poměr objemů určíme ze stavové rovnice:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2Q}{5nR_m T_1} \doteq 1{,}5.$$

2 body

Práce vykonaná plynem je 1,2 kJ. Vnitřní energie plynu se zvětší o 1,8 kJ. Teplota t_2 je asi 170 °C, poměr objemů $\frac{V_2}{V_1}$ je 1,5.

7. a) V naší zeměpisné šířce je tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, na pólu $g_p = 9{,}83\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, na rovníku $g_r = 9{,}78\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Pro dobu kyvu platí:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

V tomto případě je $J = \frac{ml^2}{3}$, kde l je délka tyče a $d = \frac{l}{2}$. Dosadíme a vyjádříme délku tyče:

$$l = \frac{3\tau^2 g}{2\pi^2}.$$

Určíme dobu kyvu na pólu a na rovníku:

$$\tau_p = \tau\sqrt{\frac{g}{g_p}} = 0{,}999\ \mathrm{s}, \qquad \tau_r = \tau\sqrt{\frac{g}{g_r}} = 1{,}002\ \mathrm{s}.$$

3 body

b) Doby kyvu na pólu, v naší zeměpisné šířce a na rovníku budou stejné, jestliže:

$$\frac{l_p}{l} = \frac{g_p}{g} = 1{,}002, \qquad \frac{l_r}{l} = \frac{g_r}{g} = 0{,}997.$$

3 body

c) Změní-li se teplota o Δt, změní se délka kyvadla na $l_1 = l(1 + \alpha_m \Delta t)$. Doba kyvu potom bude

$$\tau_1 = \tau\sqrt{1 + \alpha_m \Delta t} = 1{,}00014\ \mathrm{s}.$$

2 body

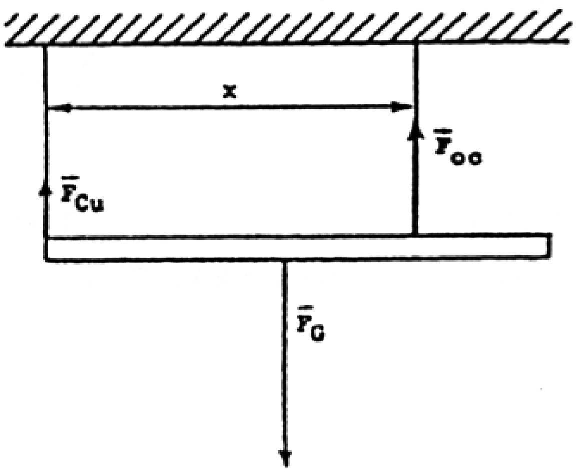
d) Při teplotě t_1 vykoná kyvadlo za den 86400 kyvů, při teplotě t_2 vykoná $n_1 = n\frac{\tau}{\tau_1} = 86388$ kyvů, opozdí se tedy o $(n - n_1)\tau = 12\ \mathrm{s}$.

2 body

Na pólu bude doba kyvu 0,999 s, na rovníku 1,002 s. Aby byla tyč sekundovým kyvadlem na pólu, je nutné ji prodloužit o 0,2 %, na rovníku musí být o 0,3 % kratší. Při teplotě 25,0 °C bude doba kyvu v naší zeměpisné šířce 1,00014 s, hodiny řízené tímto kyvadlem by se denně opožďovaly o 12 sekund.

Úlohy navrhla a za správnost řešení odpovídá RNDr. Radmila Horáková.

RC1



RC2