

Řešení teoretických úloh celostátního kola 36. ročníku FO

- 1.a) Nejprve určíme koeficient restituce jako poměr velikostí rychlosti před dopadem na podlahu a po odrazu od podlahy po volném pádu z výšky h_0 :

$$k = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h}{h_0}} = 0,810. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Označme:

v_0 velikost počáteční rychlosti vrhu,
 v_1 velikost rychlosti před prvním dopadem na podlahu,
 v_2 velikost rychlosti po prvním odrazu od podlahy,
 v_3 velikost rychlosti před dopadem na strop,
 v_4 velikost rychlosti po odrazu od stropu,
 v_5 velikost rychlosti před druhým dopadem na podlahu,
 v_6 velikost rychlosti po druhém odrazu od podlahy,
 v_7 velikost rychlosti po třetím odrazu od podlahy.

Ze zákona zachování energie a užitím koeficientu restituce odvodíme:

$$\begin{aligned}
 v_6 &= \sqrt{2gh_1} = 6,26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, & v_5 &= \frac{v_6}{k} = 7,73 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \\
 v_4 &= \sqrt{v_5^2 - 2gH} = 3,28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, & v_3 &= \frac{v_4}{k} = 4,04 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \\
 v_2 &= \sqrt{v_3^2 + 2gH} = 8,08 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, & v_1 &= \frac{v_2}{k} = 9,98 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \\
 v_0 &= \sqrt{v_1^2 - 2gh_0} = 8,26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, & v_7 &= k \cdot v_6 = 5,07 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.
 \end{aligned}$$

2 body

Pohyby mezi podlahou a stropem probíhaly jako rovnoměrně zrychlené a rovnoměrně zpomalené se zrychlením o velikosti g . Z toho pro jednotlivé doby plyne:

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{g} = 0,176 \text{ s}, \quad t_2 = \frac{v_2 - v_3}{g} = 0,412 \text{ s}, \quad t_3 = \frac{v_5 - v_4}{g} = 0,454 \text{ s}.$$

Po druhém odrazu od podlahy probíhá pohyb jako série svislých vrhů vzhůru, z nichž první má počáteční rychlost v_6 a dobu $\tau_1 = 2v_6/g = 1,278 \text{ s}$ a každý další má počáteční rychlost a dobu k -krát menší. V grafu použijeme ještě hodnotu $\tau_2 = 1,034 \text{ s}$.

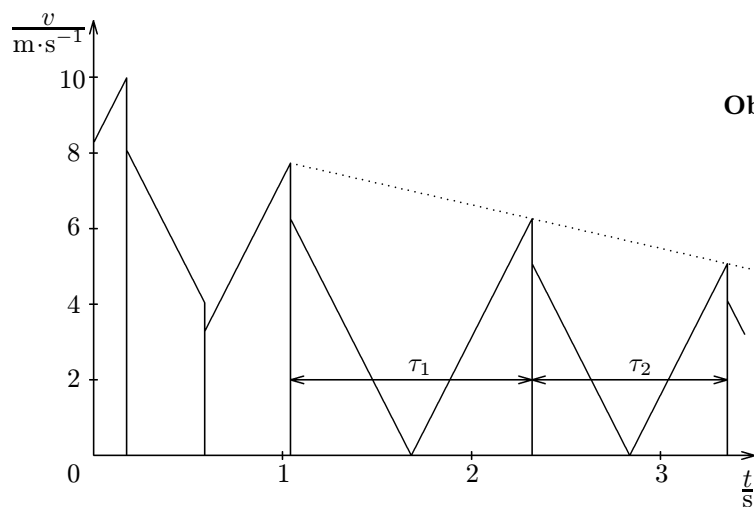
2 body

b) Graf závislosti velikosti rychlosti na čase je na obr. RA-1. Během deformace při odrazech klesá velikost rychlosti až na nulu. Dobu trvání deformace zanedbáváme. **2 body**

c) Celkovou dobu pohybu od druhého odrazu míčku od podlahy až do zastavení určíme jako součet nekonečné geometrické řady:

$$\tau = \frac{\tau_1}{1 - k} = 6,73 \text{ s.}$$

2 body



Obr. RA-1

2. Za dobu $d\tau$ vydá zdroj elektrickou energii dE_e , která je rovna přírůstku dU vnitřní energie vinutí. Platí

$$dE_e = \frac{U_e^2}{R} d\tau = \frac{U_e^2}{R_0(1 + \alpha t)} d\tau = dU = mc dt,$$

$$(1 + \alpha t) dt = \frac{U_e^2}{R_0 mc} d\tau = \frac{U_e^2(1 + \alpha t_1)}{R_1 mc} d\tau. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Integrací v mezích od t_1 do t a od 0 s do τ a úpravami dostaneme kvadratickou rovnici:

$$\int_{t_1}^t (1 + \alpha t) dt = \int_0^\tau \frac{U_e^2(1 + \alpha t_1)}{R_1 mc} d\tau, \quad \left[t + \frac{\alpha t^2}{2} \right]_{t_1}^t = \left[\frac{U_e^2(1 + \alpha t_1)}{R_1 mc} \tau \right]_0^\tau,$$

$$t + \frac{\alpha t^2}{2} - t_1 - \frac{\alpha t_1^2}{2} = \frac{U_e^2(1 + \alpha t_1)}{R_1 mc} \tau,$$

$$t^2 + \frac{2}{\alpha} t - \left(\frac{2U_e^2(1 + \alpha t_1)}{\alpha R_1 mc} \tau + \frac{2t_1}{\alpha} + t_1^2 \right) = 0. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Úloze vyhovuje kořen

$$t = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2t_1}{\alpha} + t_1^2 + \frac{2U_e^2(1 + \alpha t_1)}{\alpha R_1 mc} \tau},$$

$$t = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha} + t_1 \right)^2 + \frac{2U_e^2(1 + \alpha t_1)}{\alpha R_1 mc} \tau}.$$

Grafem této závislosti je úsek paraboly.

2 body

Pro dané hodnoty dostáváme závislost číselné hodnoty teploty na číselné hodnotě doby průchodu elektrického proudu ve tvaru

$$\{t\} = -250 + \sqrt{72900 + 262.5\{\tau\}}, \quad \tau \geq 0 \text{ s},$$

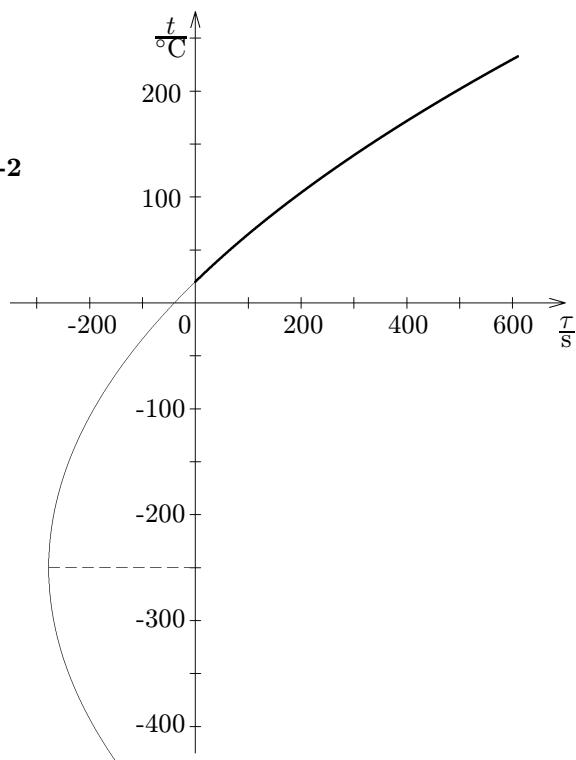
tabulku

τ/s	0	100	200	300	400	500	600
$t/^\circ\text{C}$	20	65	104	139	172	202	230

2 body

a graf

Obr. RA-2



2 body

3.a) Pro adiabatický děj 1 – 2 platí:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \varepsilon^{\kappa-1},$$

$$\boxed{T_2 = T_1 \varepsilon^{\kappa-1}, \quad p_2 = p_1 \varepsilon^\kappa.}$$

Pro izobarický děj 2 – 3 platí:

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \varphi,$$

$$\boxed{T_3 = T_2 \varphi = T_1 \varepsilon^{\kappa-1} \varphi, \quad p_3 = p_2 = p_1 \varepsilon^\kappa.}$$

Pro adiabatický děj 3 – 4 platí:

$$p_3 V_3^\kappa = p_4 V_4^\kappa, \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} = \varphi^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}},$$

$$T_4 = T_3 \varphi^{\kappa-1} \varepsilon^{1-\kappa}, \quad \boxed{T_4 = T_1 \varphi^\kappa},$$

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\kappa = p_3 \left(\frac{V_3}{V_2} \frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa = p_1 \varepsilon^\kappa \varphi^\kappa \varepsilon^{-\kappa}, \quad \boxed{p_4 = p_1 \varphi^\kappa.}$$

3 body

Pro dané hodnoty:

$$\begin{aligned} T_1 &= 300 \text{ K}, \quad T_2 = 994 \text{ K}, \quad T_3 = 1790 \text{ K}, \quad T_4 = 683 \text{ K}, \\ (t_1 &= 27^\circ \text{C}, \quad t_2 = 721^\circ \text{C}, \quad t_3 = 1517^\circ \text{C}, \quad t_4 = 410^\circ \text{C}), \\ p_1 &= 0,100 \text{ MPa}, \quad p_2 = 6,63 \text{ MPa}, \quad p_3 = 6,63 \text{ MPa}, \quad p_4 = 0,23 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

2 body

b) Hmotnost vzduchu, který projde pracovním prostorem válce během jednoho cyklu, můžeme vyjádřit pomocí stavové rovnice:

$$m = \frac{p_1 V_1 M_m}{R_m T_1}. \quad \text{Z toho plyne: } mc_V = 2,5 \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Během hoření paliva při ději 2 – 3 přijme pracovní látka teplo

$$Q_1 = mc_p(T_3 - T_2) = m\kappa c_V(T_3 - T_2) = 2,5\kappa \frac{p_1 V_1}{T_1}(T_3 - T_2).$$

Při izochorickém ději 4 – 1 odevzdá pracovní látka teplo

$$Q_2' = mc_V(T_4 - T_1) = 2,5 \frac{p_1 V_1}{T_1}(T_4 - T_1).$$

Ostatní děje jsou adiabatické, tedy bez tepelné výměny. Motor pracuje s teoretickou účinností

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Pro dané hodnoty:

$$Q_1 = 1860 \text{ J}, \quad Q_2' = 640 \text{ J}, \quad \eta = 66 \text{ \%}.$$

3 body

c) Do vztahu pro účinnost odvozeného v úloze b) dosadíme vztahy mezi teplotami odvozené v části a):

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\varphi^\kappa - 1}{\varepsilon^{\kappa-1} \varphi - \varepsilon^{\kappa-1}} = \\ &= 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\varphi^\kappa - 1}{\varphi - 1}, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

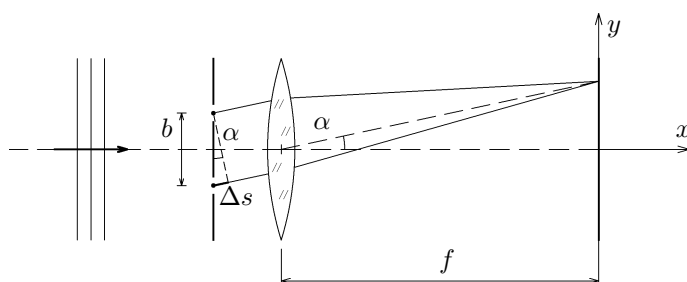
2 body

- 4.a) Otvory difrakční překážky jsou koherentní zdroje dvou světelných vlnění. Dráhový rozdíl, se kterým se setkávají tato vlnění v bodě stínítka o souřadnici y určíme podle obr. RA-3:

$$\Delta s = b \cdot \sin \alpha \doteq b \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{b y}{f}.$$

Interferenční maxima (světlé proužky) vznikají v místech, kde

$$\Delta s = k \cdot \lambda, \quad y \doteq k \frac{\lambda f}{b}, \quad k \dots \text{celé}.$$



Obr. RA-3

Nulté hlavní maximum leží uprostřed stínítka. Interferenční minima (tmavé proužky) vznikají v místech, kde

$$\Delta s = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad y \doteq (2k + 1) \frac{\lambda f}{2b}.$$

Vzdálenost mezi středem prvního tmavého proužku a nultého světlého proužku je tedy

$$\delta y = \frac{\lambda f}{2b}.$$

Prakticky stejná je vzdálenost středu světlého proužku a středu sousedního tmavého proužku v celém interferenčním jevu. **2,5 bodu**

- b) Přichází-li světelné vlnění ze směru odchýleného od optické osy o úhel $\vartheta/2$, odchýlí se o stejný úhel i poloha nultého interferenčního maxima. Interferenční proužky se posunou ve směru osy y o

$$\Delta y = f \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \doteq \frac{f \vartheta}{2}. \quad \mathbf{1,5 \text{ bodu}}$$

c) Dva samostatné zdroje světla nejsou koherentní a jejich vlnění proto vytvářejí na stínítku dvě samostatné soustavy proužků posunuté o

$$\Delta y = 2f \frac{\vartheta}{2} \doteq f \vartheta.$$

Osvětlení se sčítají. Jestliže světlé proužky vytvořené jedním zdrojem splývají s tmavými proužky vytvořenými druhým zdrojem, interferenční jev zmizí. Nejmenší posunutí, při kterém k tomu dojde je

$$\Delta y = \delta y = \frac{\lambda f}{2b}.$$

Tomu odpovídá úhlová odchylka světelných zdrojů

$$\vartheta = \frac{\lambda}{2b}.$$

2 body

d) Slunce je plošný světelný zdroj složený z velkého počtu nezávislých bodových zdrojů, které jsou od optické osy odchýleny o různé úhly. Jimi vytvořené interferenční proužky jsou na stínítku různě posunuty a interference je nejlépe pozorovatelná, jen když toto posunutí je menší než délka δy vypočítaná v a). Můžeme-li Slunce nahradit dvěma bodovými zdroji o úhlové vzdálenosti $\vartheta = 0,38''$ a vlnové délce λ , zmizí interferenční proužky poprvé, když

$$b = \frac{\lambda}{2\vartheta}.$$

Pro dané hodnoty

$$b = \frac{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2 \cdot 729''} \cdot 206\,265'' = 0,078 \text{ mm}.$$

Tedy pro $b < \frac{1}{20} \text{ mm} = 0,05 \text{ mm}$ lze získat dobře viditelné interferenční proužky.

2 body

e) Úhlový průměr hvězdy α *Herculis* určíme ze vztahu

$$d = \frac{\vartheta}{0,38} = \frac{\lambda}{0,38 \cdot 2b} = \frac{\lambda}{0,76b}.$$

Pro dané hodnoty:

$$d = \frac{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{0,76 \cdot 4,90 \text{ m}} \cdot 206\,265'' = 0,028''.$$

2 body

Poznámka: Moderní interferometry umožňují měřit úhlový průměr hvězd až do hodnot $d \approx 0,002''$; pro *Vegu* (α *Lyr*) je $d = 0,003''$.

Autoři úloh: V. Houdek (2), M. Ouhrabka (4) a I. Volf (1 a 3).