

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA 36. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY.

Kategorie A

1. a) Kdyby byl náboj prstence Q soustředěn v jediném bodě prstence, působila by na částici odpuzivá elektrická síla (obr. RA1) o velikosti

$$F = k \frac{Qq}{R^2 + h^2}, \quad \text{kde } k \doteq 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}.$$

Svislá složka elektrické síly by měla velikost

$$F_1 = F \cos \alpha = k \frac{Qqh}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tato svislá síla se nezmění, jestliže náboj Q rovnoměrně rozložíme podél prstence. Vodorovné složky elektrických sil se navzájem zruší. 4 body

Velikost síly F_1 dosáhne maxima, jestliže

$$\frac{dF_1}{dh} = kQq \frac{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{(R^2 + h^2)^3} = kQq \frac{R^2 - 2h^2}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 R.$$

3 body

- b) Ve výšce $h = R$ nastane rovnováha mezi tíhovou a elektrickou silou, jestliže

$$mg = \frac{kQq}{R^2\sqrt{8}}, \quad m = \frac{kQq}{gR^2\sqrt{8}}.$$

Rovnovážná poloha je stabilní, neboť ve výšce $h = R$ je funkce F_1 klesající. Vychýlíme-li částici vzhůru, převládne síla tíhová a při vychýlení dolů převládne síla elektrická. Při vychýlení částice do strany by vzhledem k poměrně malé výšce převládla odpuzivá elektrická síla od bližší části prstence, která by částici rovněž vrátila do rovnovážné polohy.

Po dosazení numerických hodnot $m = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg} = 0,32 \text{ g}$.

3 body

2. a) Zobrazení soustavou vzniká složením dvou samostatných zobrazení, nejprve první čočkou ($AB \rightarrow A_1B_1$; $y \rightarrow y'$) a potom druhou čočkou ($A_1B_1 \rightarrow A_2B_2$; $y' \rightarrow y''$).

Užitím čočkové rovnice dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \quad a'_1 = \frac{fa_1}{a_1 - f},$$

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a'_2} = \frac{1}{d - a'_1} + \frac{1}{a'_2} = \frac{1}{d - \frac{fa_1}{a_1 - f}} + \frac{1}{a'_2} = \frac{1}{f},$$

$$(a_1 + a'_2 + d)f^2 - (a_1d + a'_2d + 2a_1a'_2)f + a_1a'_2d = 0,$$

$$f_{1,2} = \frac{a_1d + a'_2d + 2a_1a'_2 \pm \sqrt{d^2(a_1 - a'_2)^2 + 4a_1^2a_2'^2}}{2(a_1 + a'_2 + d)}.$$

Pro dané hodnoty má úloha dvě řešení: $f = 4,3 \text{ cm}$ a $f = 1,5 \text{ cm}$.

4 body

b) Pro zvětšení obrazu vytvořeného soustavou odvodíme

$$Z = \frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y} = \frac{f}{f-a_1} \cdot \frac{f-a_2'}{f} = \frac{a_2'-f}{a_1-f}.$$

Pro dané hodnoty dostaneme v prvním případě $Z = -1,3$ a obraz je převrácený, skutečný, vysoký 13 mm. Ve druhém případě $Z = 3$ a obraz je vzpřímený, skutečný, vysoký 30 mm

3 body

c) Obr. RA2.

3 body

3. a) Vyjdeme ze schématu na obr. RA3. Obvodem prochází proud o efektivní hodnotě $I = \frac{U}{Z}$, kde Z je velikost celkové impedance

$$Z = \sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Při rezonanci platí

$$X_{L1} = X_C, \quad \omega L_1 = \frac{1}{\omega C}, \quad L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 0,158 \text{ H}.$$

1 bod

b) Při rezonanci bude obvodem procházet proud $I_{res} = \frac{U}{R_i}$ a na cívce bude napětí

$$U_{Lres} = X_{L1} I_{res} = X_C I_{res} = \frac{U}{2\pi f R_i C} = 8,0 \text{ V}.$$

1 bod

c) Napětí U_L na cívce závisí na její indukčnosti podle vztahu

$$U_L = X_L I = \frac{\omega L U}{\sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Maximum této funkce vyšetříme užitím diferenciálního počtu:

$$\begin{aligned} \frac{dU_L}{dL} &= \omega U \frac{\sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - L \frac{1}{2} \frac{2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\omega}{\sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\ &= \frac{R_i^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{L}{C}}{\left[R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Derivace je definována pro libovolné L a pro $L = L_2$ musí být nulová.

$$R_i^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{L_2}{C} = 0, \quad L_2 = C \left(R_i^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2} \right) = 0,168 \text{ H}.$$

Vyšetřením znaménka derivace v okolí L_2 dokážeme, že jde o maximum:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jmenovatel je vždy kladný} \\ \text{Pro } L < L_2 \text{ je číselník kladný} \\ \text{Pro } L > L_2 \text{ je číselník záporný} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{v } L_2 \text{ je maximum.}$$

2 body

d)

$$U_{L_{max}} = \frac{\omega UC \left(R_i^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2} \right)}{\sqrt{R_i^2 + \left[\omega C \left(R_i^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2} \right) - \frac{1}{2\pi f C} \right]^2}} = \frac{\omega UC \left(R_i^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2} \right)}{R_i \sqrt{1 + (2\pi f C R_i)^2}} = 8,2 \text{ V.}$$

2 body

e) Tabulka T1 a obr. RA4.

2 body

f)

$$U'_{L_{res}} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L_1)^2}}{R' + R_i} \frac{U}{R' + R_i} = \frac{U \sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}}}{R' + R_i} = 7,6 \text{ V.}$$

2 body

4. a) Zvolme vztažnou soustavu spojenou s rotující nádobou. Působením třecích sil je voda se i voda v nádobě uvede do otáčivého pohybu jehož úhlová rychlost je stejná jako úhlová rychlost nádoby. Hladina vody zaujme tvar rotační plochy. Její meridián má rovnici $y = y(x)$, kde x je vzdálenost od osy otáčení. V každém bodu hladiny je tečná rovina kolmá na výslednici tíhové a setrvačné odstředivé síly, které zde působí na částici (obr. RA5). S vodorovnou rovinou svírá úhel α , pro který platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dm \omega^2 x}{dm g} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Integrací dostaneme

$$y = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C. \quad (1)$$

Hladina zaujme tvar rotačního paraboloidu. Integrační konstanta $C = y(0)$ udává polohu vrcholu paraboloidu na ose.

2 body

V dalším řešení použijeme pomocnou větu, kterou si jistě sami snadno odvodíte: Objem rotačního paraboloidu o výšce v a poloměru r (obr. RA6) je

$$V = \frac{\pi r^2 v}{2}.$$

b, c) Pokud platí $f < f_1$, nastane situace podle obr. RA7. Ze vztahu (1) odvodíme

$$h = y(R) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + C, \quad h - C = \frac{\omega^2 R^2}{2g},$$

a vyjádříme objem kapaliny

$$V = \pi R^2 h_0 = \pi R^2 h - \frac{1}{2} \pi R^2 (h - C) = \pi R^2 h - \frac{1}{2} \pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Po úpravě dostaneme

$$h = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} = \frac{H}{4} + \frac{\pi^2 R^2}{g} f^2. \quad (2)$$

Závislost výšky okraje hladiny na frekvenci je kvadratická.

2 body

Hladina se dotkne dna, jestliže $C = 0$. V takovém případě

$$V = \pi R^2 h_0 = \frac{1}{2} \pi R^2 h, \quad h = 2h_0 = \frac{H}{2}, \quad f = f_1 = \frac{\sqrt{gH}}{2\pi R}. \quad 2 \text{ body}$$

d, e) Pro $f_1 < f < f_2$ nastane situace podle obr. RA8 a integrační konstanta C je záporná. Pro větší přehlednost označme $-C = D$. Hladina protíná rovinu dna v kružnici o poloměru x_0 . Platí

$$\begin{aligned} y &= \frac{\omega^2 x^2}{2g} - D, \quad h + D = \frac{\omega^2 R^2}{2g}, \quad x_0^2 = \frac{2gD}{\omega^2}, \\ V &= \pi R^2 h_0 = \pi R^2 h - \left(\frac{\pi R^2 (h + D)}{2} - \frac{\pi x_0^2 D}{2} \right) = \\ &= \pi R^2 h - \frac{\pi R^2 \omega^2}{4g} + \frac{\pi g}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2 R^2}{2g} - h \right)^2 = \frac{\pi g}{\omega^2} h^2, \\ h &= 2\pi R \sqrt{\frac{h_0}{g}} f = \pi R \sqrt{\frac{H}{g}} f. \end{aligned} \quad (3)$$

Výška okraje hladiny je přímo úměrná frekvenci. Horní podstavy válce dosáhne při frekvenci

$$f_2 = \frac{\sqrt{gH}}{\pi R} = 2f_1. \quad 2 \text{ body}$$

f) Graf závislosti výšky okraje hladiny na frekvenci sestojený na základě vztahů (2) a (3) je na obr. RA9. 2 body

5. a) Uvedeme-li hmotný bod z klidu do pohybu, je jeho hybnost rovna impulsu síly:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Ft.$$

Úpravou dostaneme hledaný vztah pro výpočet rychlosti:

$$\begin{aligned} m_0^2 v^2 &= F^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad v^2 = \frac{F^2 t^2}{m_0^2 + \frac{F^2 t^2}{c^2}}, \\ v &= \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Vztah pro výpočet dráhy dostaneme integrací:

$$s = \int_0^t \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}} dt.$$

Použijeme substituci

$$z = m_0^2 c^2 + F^2 t^2, \quad dz = 2F^2 t dt.$$

$$\int \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}} dt = \frac{c}{2F} \int \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{2F} \cdot 2z^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{F} \sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2},$$

$$s = \left[\frac{c}{F} \sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} \right]_0^t = \frac{c}{F} \sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} - \frac{c}{F} m_0 c.$$

$$s = \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right). \quad (5)$$

4 body

Jiné řešení

Vyjdeme ze známého vztahu mezi celkovou energií, klidovou energií a hybností hmotného bodu:

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2, \quad (E_0 + E_k)^2 = (E_0 + Fs)^2 = E_0^2 + F^2 t^2 c^2,$$

$$(m_0 c^2 + Fs)^2 = m_0^2 c^4 + F^2 t^2 c^2.$$

Úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici $Fs^2 + 2m_0 c^2 s - Ft^2 c^2 = 0$.

Úloze vyhovuje kořen

$$s = \frac{-m_0 c^2 + \sqrt{m_0^2 c^4 + F^2 t^2 c^2}}{F}.$$

b) Na začátku pohybu, kdy $Ft < m_0 c$, můžeme vztahy (1), (2) zjednodušit:

$$v \doteq \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2 c^2}} = \frac{F}{m_0} t = at, \quad s \doteq \frac{m_0 c^2}{F \left(1 + \frac{F^2 t^2}{2m_0^2 c^2} - 1 \right)} = \frac{Ft^2}{2m_0} = \frac{1}{2} at^2,$$

kde $a = \frac{F}{m_0}$. Dostali jsme vztahy známé z klasické fyziky.

Jestliže naopak pohyb probíhá tak dlouho, že $Ft > m_0 c$, můžeme vztahy (1), (2) upravit na:

$$v \doteq \frac{Ftc}{\sqrt{F^2 t^2}} = c, \quad s \doteq \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{\frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right) = ct - \frac{m_0 c^2}{F}.$$

Rychlost hmotného bodu se přiblíží k rychlosti světla ve vakuu a téměř se nemění; pohyb je téměř rovnoměrný. 3 body

c) Do vztahů (1), (2) dosadíme hodnoty veličin:

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad F = |E|c = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ N}$$

a dostaneme vztahy pro výpočet číselných hodnot $\{v\}$, $\{s\}$:

$$\{v\} = \frac{4,8 \cdot 10^{-5} \cdot \{t\}}{\sqrt{7,4529 \cdot 10^{-44} + 2,56 \cdot 10^{-36} \{t\}^2}},$$

$$\{s\} = 0,511875 \left(\sqrt{1 + 3,4349045 \cdot 10^{17} \{t\}^2} - 1 \right).$$

Určíme ještě, za jakou dobu t_1 proletí elektron dráhu L . Ze vztahu (1) vyjádříme

$$t = \frac{s}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_0 c^2}{Fs}}.$$

Po dosazení $s = L = 2 \text{ m}$ dostaneme $t_1 = 8,2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Tabulka vypočítaných hodnot a grafy rychlosti a dráhy jsou v příloze (tabulka T.2 a obr. RA10). 3 body

7. a) Zvolme počátek vztažné soustavy v bodu O. Pohyb bodu A je popsán vztahy:

$$x = r \sin \omega t, \quad y = -r \cos \omega t$$

Bod B se pohybuje po ose y. Jeho okamžitá poloha je určena souřadnicí

$$y = -r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}.$$

Souřadnice okamžité rychlosti je

$$v = \frac{dy}{dt} = r\omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}.$$

Souřadnice okamžitého zrychlení je

$$a = r\omega^2 \cos \omega t - \frac{r^2 \omega^2 (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t} + \frac{r^4 \omega^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}}{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}.$$

Grafické znázornění odvozených vztahů pro dané hodnoty veličin je na obr. RA11.

4 body

b) Souřadnice zrychlení a_d v dolní úvratí a a_h v horní úvratí dostaneme z obecného vztahu dosazením $\omega t = 0$ resp. $\omega t = \pi$:

$$a_d = r\omega^2 - \frac{r^2 \omega^2}{l} = r\omega^2 \frac{l-r}{l}, \quad a_h = -r\omega^2 - \frac{r^2 \omega^2}{l} = -r\omega^2 \frac{l+r}{l}.$$

Jejich velikosti jsou v poměru

$$\left| \frac{a_h}{a_d} \right| = \frac{l+r}{l-r} = 2,43.$$

2 body

c) Vzhledem k symetrii mechanismu postačí nalézt řešení úlohy v intervalu $t \in (0, \frac{T}{2})$. Rychlost dosáhne maxima v okamžiku, kdy zrychlení je nulové. Budeme tedy řešit rovnici $a(t) = 0$. Protože vztah pro výpočet zrychlení je dosti složitý, použijeme některou z metod numerického řešení rovnic a dojdeme k výsledkům, které jsme mohli přibližně vyčíst i z grafů:

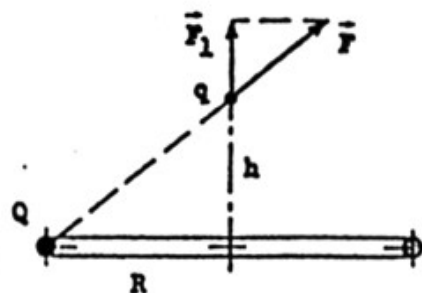
$$t = 0,0305081 \text{ s} \approx 0,0305 \text{ s} \text{ a po dosazení } v_{max} = 3,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad y = 0,127 \text{ m}.$$

Bod B se tedy pohybuje nejrychleji ve vzdálenosti 12,7 cm od bodu O. Jeho rychlost má zde velikost $3,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

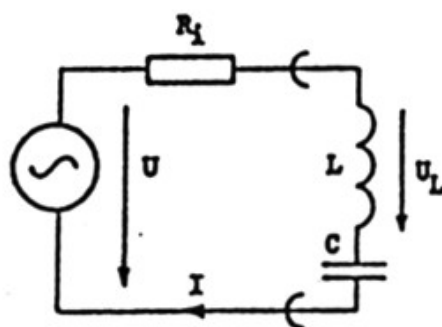
4 body

Autoři úloh: PaedDr. Přemysl Šedivý (1, 2, 4, 5, 6, 7) a RNDr. Vladimír Věcha (3).

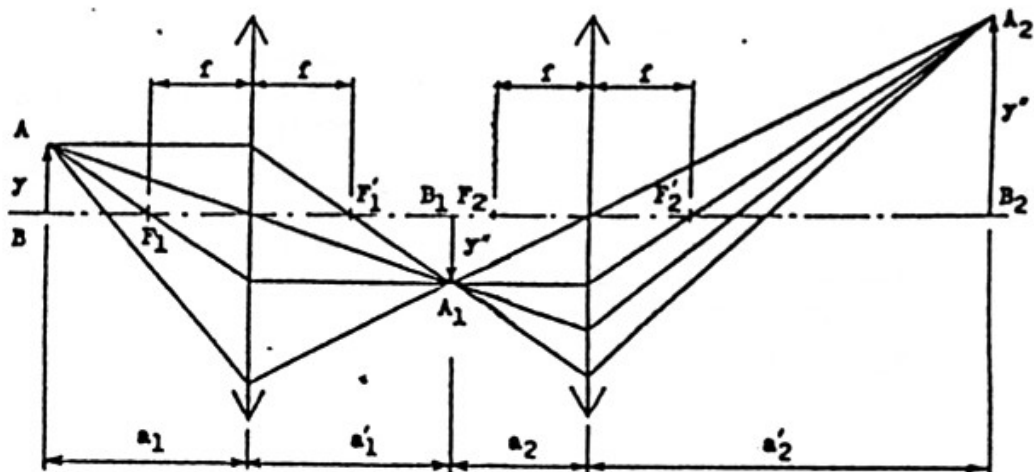
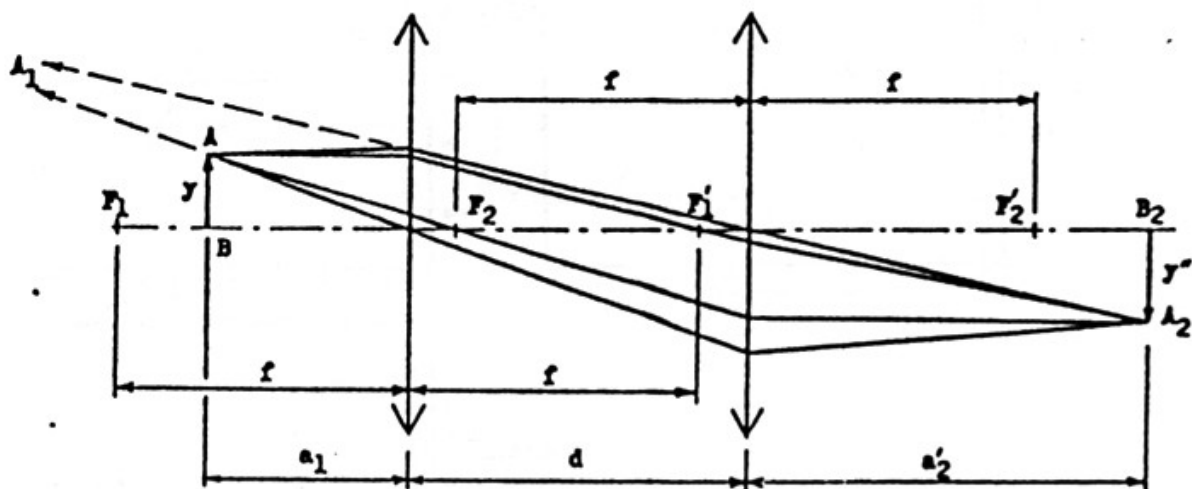
RA1



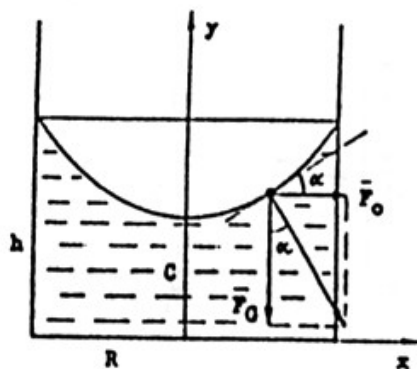
RA3



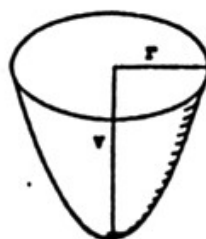
RA2



RA5



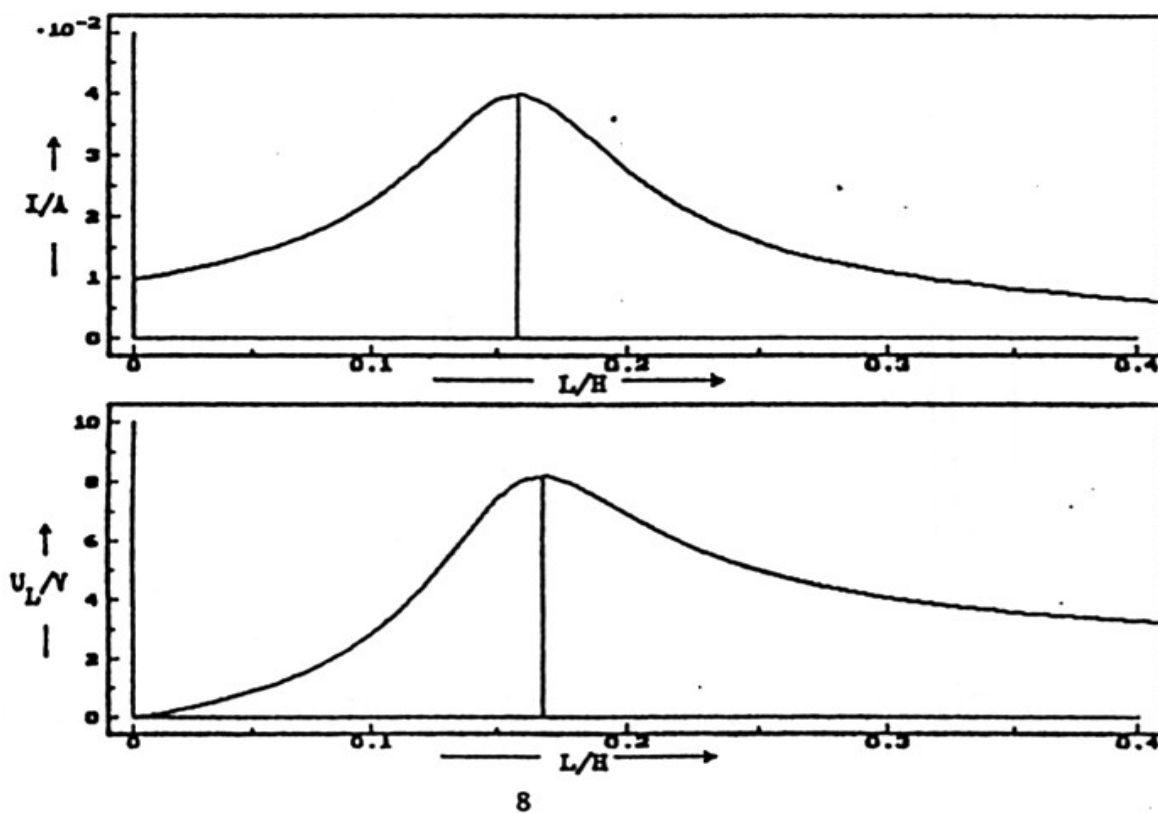
RA6



Tab. 1

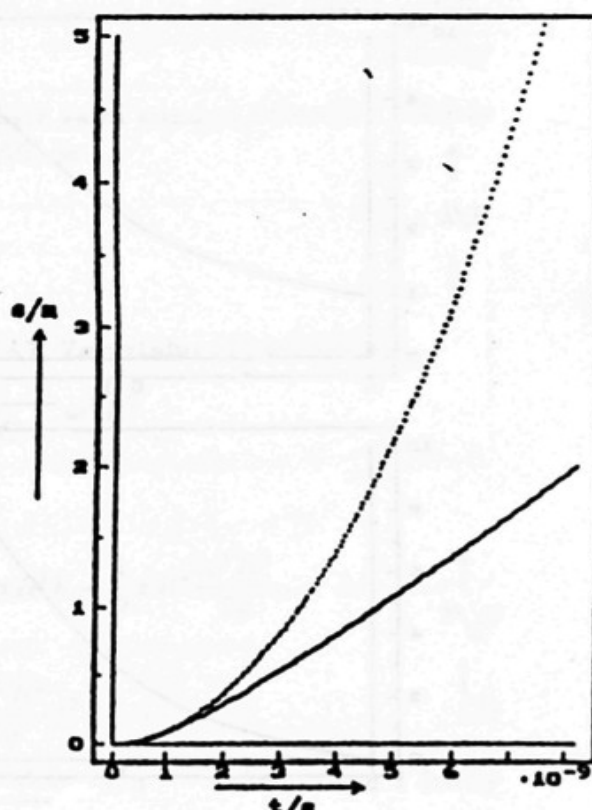
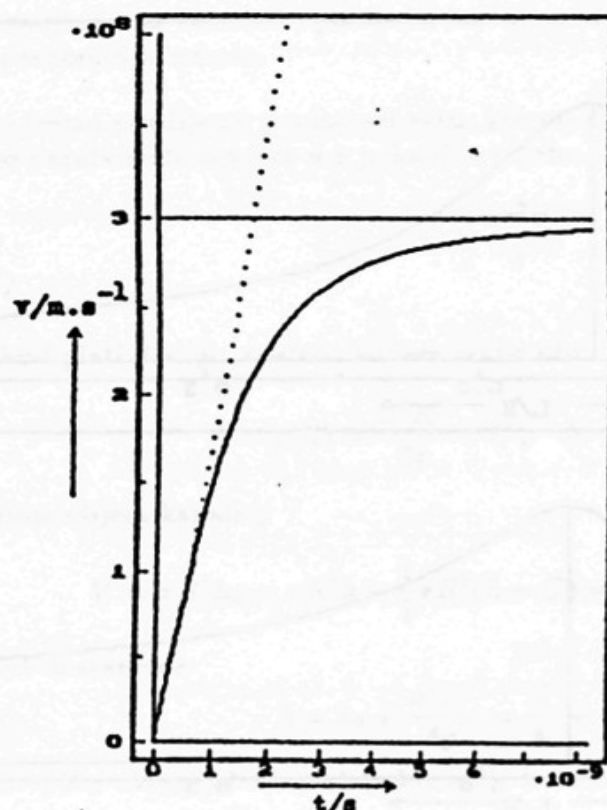
(L)	(I)	(u)
0.000	0.0007	0.00
0.010	0.0104	0.12
0.020	0.0111	0.28
0.030	0.0118	0.43
0.040	0.0128	0.64
0.050	0.0136	0.87
0.060	0.0150	1.13
0.070	0.0164	1.43
0.080	0.0181	1.82
0.090	0.0201	2.28
0.100	0.0223	2.83
0.110	0.0234	3.51
0.120	0.0250	4.34
0.130	0.0268	5.32
0.140	0.0283	6.38
0.150	0.0297	7.38
0.160	0.0308	8.64
0.170	0.0326	9.28
0.180	0.0331	7.94
0.190	0.0313	7.47
0.200	0.0278	6.94
0.210	0.0244	6.44
0.220	0.0217	5.98
0.230	0.0194	5.61
0.240	0.0173	5.28
0.250	0.0158	5.00
0.260	0.0148	4.76
0.270	0.0134	4.53
0.280	0.0124	4.37
0.290	0.0118	4.22
0.300	0.0108	4.08
0.310	0.0101	3.93
0.320	0.0096	3.84
0.330	0.0090	3.74
0.340	0.0088	3.68
0.350	0.0081	3.58
0.360	0.0077	3.50
0.370	0.0074	3.44
0.380	0.0071	3.37
0.390	0.0068	3.32
0.400	0.0063	3.27
0.410	0.0062	3.22
0.420	0.0060	3.17

RA4

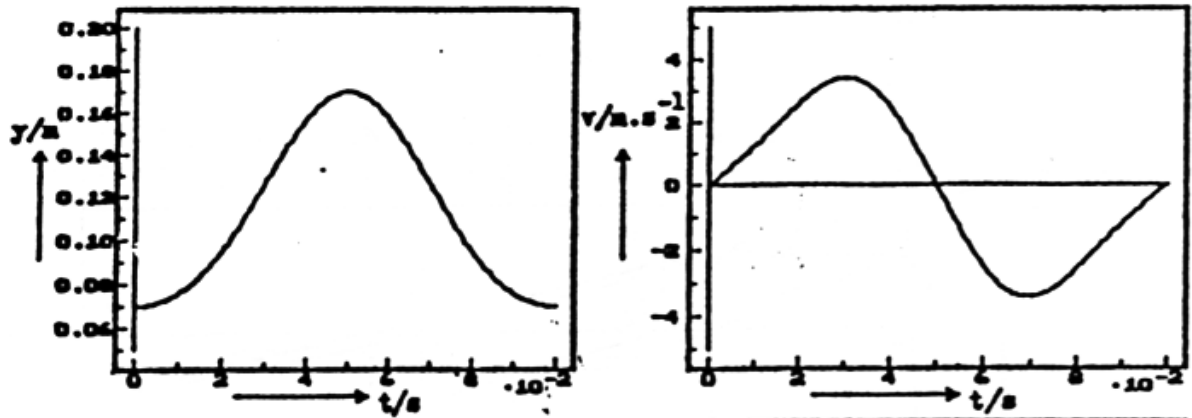


(t)	(v)	(vl)	(t)	(u)	(ul)
0.0E+0	0.00	0.00	0.0E+0	0.00	0.00
2.0E-10	2.48E+7	2.53E+7	2.0E-10	0.00	0.00
4.0E-10	6.65E+7	7.03E+7	4.0E-10	0.01	0.01
6.0E-10	9.85E+7	1.05E+8	6.0E-10	0.02	0.02
8.0E-10	1.27E+8	1.41E+8	8.0E-10	0.03	0.03
1.0E-09	1.53E+8	1.79E+8	1.0E-09	0.06	0.06
1.2E-09	1.77E+8	2.11E+8	1.2E-09	0.11	0.12
1.4E-09	1.99E+8	2.40E+8	1.4E-09	0.15	0.17
1.6E-09	2.07E+8	2.61E+8	1.6E-09	0.19	0.22
1.8E-09	2.18E+8	2.80E+8	1.8E-09	0.23	0.26
2.0E-09	2.22E+8	2.95E+8	2.0E-09	0.28	0.33
2.2E-09	2.27E+8	3.07E+8	2.2E-09	0.32	0.43
2.4E-09	2.43E+8	4.22E+8	2.4E-09	0.37	0.51
2.6E-09	2.51E+8	4.57E+8	2.6E-09	0.42	0.58
2.8E-09	2.58E+8	4.82E+8	2.8E-09	0.47	0.65
3.0E-09	2.61E+8	5.27E+8	3.0E-09	0.52	0.78
3.2E-09	2.65E+8	5.63E+8	3.2E-09	0.58	0.88
3.4E-09	2.68E+8	6.00E+8	3.4E-09	0.63	1.02
3.6E-09	2.71E+8	6.33E+8	3.6E-09	0.68	1.14
3.8E-09	2.74E+8	6.66E+8	3.8E-09	0.74	1.27
4.0E-09	2.78E+8	7.03E+8	4.0E-09	0.78	1.41
4.2E-09	2.78E+8	7.38E+8	4.2E-09	0.83	1.55
4.4E-09	2.88E+8	7.74E+8	4.4E-09	0.88	1.70
4.6E-09	2.91E+8	8.09E+8	4.6E-09	0.88	1.88
4.8E-09	2.93E+8	8.44E+8	4.8E-09	1.02	2.03
5.0E-09	2.94E+8	8.78E+8	5.0E-09	1.07	2.28
5.2E-09	2.95E+8	9.14E+8	5.2E-09	1.13	2.38
5.4E-09	2.98E+8	9.48E+8	5.4E-09	1.19	2.54
5.6E-09	2.97E+8	9.83E+8	5.6E-09	1.24	2.76
5.8E-09	2.98E+8	1.02E+9	5.8E-09	1.30	2.88
6.0E-09	2.99E+8	1.05E+9	6.0E-09	1.38	3.16
6.2E-09	2.99E+8	1.09E+9	6.2E-09	1.42	3.38
6.4E-09	2.98E+8	1.13E+9	6.4E-09	1.48	3.68
6.6E-09	2.98E+8	1.16E+9	6.6E-09	1.53	3.83
6.8E-09	2.91E+8	1.20E+9	6.8E-09	1.58	4.07
7.0E-09	2.91E+8	1.23E+9	7.0E-09	1.63	4.31
7.2E-09	2.92E+8	1.27E+9	7.2E-09	1.71	4.58
7.4E-09	2.92E+8	1.30E+9	7.4E-09	1.77	4.81
7.6E-09	2.93E+8	1.34E+9	7.6E-09	1.82	5.08
7.8E-09	2.93E+8	1.37E+9	7.8E-09	1.88	5.35
8.0E-09	2.93E+8	1.41E+9	8.0E-09	1.94	5.63
8.2E-09	2.94E+8	1.44E+9	8.2E-09	2.00	5.81

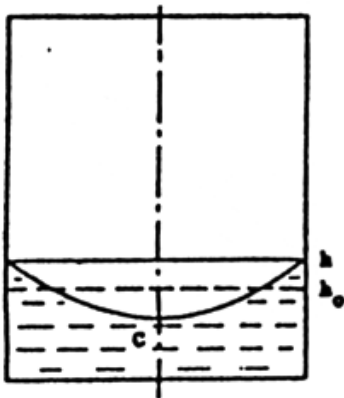
RA10



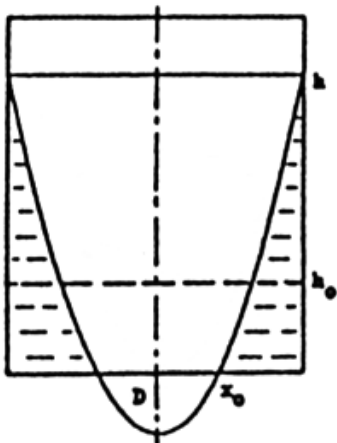
RA11



RA7



RA8



RA9

