Řešení úloh 1. kola 35. ročníku FO, kat. D

1. úloha. Označení veličin: $a_1 = 0,40\ \mathrm{m.s^{-2}}$; $a_2 = 0,60\ \mathrm{m.s^{-2}}$; $v_2 = 28\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $s_3 = 3,5\ \mathrm{km}$; $t_4 = 80\ \mathrm{s}$.

a) $v_1 = a_1 t_1 = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a_2} = 30\ \mathrm{s}$; $t_3 = \frac{s_3}{v_2} = 125\ \mathrm{s}$;

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 260\ \mathrm{s}.$$ **3 body**

b) $s_1 = \frac{v_1 t_1}{2} = 125\ \mathrm{m}$; $s_2 = \frac{(v_1 + v_2) t_2}{2} = 570\ \mathrm{m}$; $s_4 = \frac{v_2 t_4}{2} = 1120\ \mathrm{m}$;

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 5315\ \mathrm{m} \doteq 5,3\ \mathrm{km}.$$ **3 body**

c) Obr. RD1. **2 body**

d) $v_p = \frac{s}{t} = 20,4\ \mathrm{m.s^{-1}}$. **2 body**

2. úloha. a) Automobil Škoda 120 přijede ke křižovatce za dobu $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = 5\ \mathrm{s}$. Automobil Forman přijede ke křižovatce za dobu $t_2 = t_1 + 5\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{s}$. Za tuto dobu urazí dráhu $s_2 = v_2 t_2 = 250\ \mathrm{m}$. **4 body**

b) Vyjdeme ze vztahu mezi počáteční rychlostí, brzdnou dobou a brzdnou dráhou:

$$s_b = \frac{v_1 t_b}{2} \Rightarrow t_b = \frac{2 s_1}{v_1} = 10\ \mathrm{s}.$$

Automobil Škoda 120 by zastavil u křižovatky v okamžiku, kdy by křižovatkou projížděl automobil Forman. **6 bodů**

3. úloha. a) Vyjdeme z grafu na obr. RD2. Ze soustavy rovnic

$$v_2 = 6 v_1, \qquad s = \frac{(v_1 + v_2)\tau}{2} = 3,5 v_1 \tau$$

dostaneme:

$$v_1 = \frac{s}{3,5\tau} = 1,2\ \mathrm{m.s^{-1}}, \quad v_2 = 7,2\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$ **3 body**

c) $a_t = \frac{v_2 - v_1}{\tau} = 0,40\ \mathrm{m.s^{-2}}$. **2 body**

b) $t_1 = \frac{v_1}{a_t} = 3,0\ \mathrm{s}$; $s_1 = \frac{1}{2} a_t t^2 = 1,8\ \mathrm{m}$; $t_2 = t_1 + \tau = 18\ \mathrm{s}$. **2 body**

d) Vyjdeme z obr. RD3. Celkové zrychlení je vektorovým součtem tečného a dostředivého zrychlení, jehož velikost je $a_d = \frac{v^2}{r}$

Celkové zrychlení má velikost $a = \sqrt{a_t^2 + a_d^2}$ a svírá s vektorem okamžité rychlosti úhel $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{a_d}{a_t}$.

Na začátku měřeného úseku $a_d = 0,030\ \mathrm{m.s^{-2}}$; $a = 0,401\ \mathrm{m.s^{-2}}$; $\varphi = 4°$.

Na konci měřeného úseku $a_d = 1,04\ \mathrm{m.s^{-2}}$; $a = 1,11\ \mathrm{m.s^{-2}}$; $\varphi = 69°$. **3 body**

4. úloha. a) Označení daných veličin: $d = 6\ \mathrm{m}$; $H = 2\ \mathrm{m}$; $h = 2\ \mathrm{m}$. Určit v_1, v_d, v_o, v_2.

Po odrazu od stěny probíhá vodorovný vrh. Platí:

$$d = v_o t_2, \quad H = \frac{1}{2} g t^2, \quad v_o = \sqrt{\frac{g d^2}{2H}} = 9,4\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Velikost rychlosti dopadu určíme pomocí zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 + mgH \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_o^2 + 2gH} = 11,3\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Vektor $\boldsymbol{v}_2$ svírá s vodorovným směrem úhel $\alpha_2 = \arccos \frac{v_o}{v_2} = 34°$. **4 body**

První část pohybu je šikmý vrh vzhůru. Můžeme jej však chápat i jako „vodorovný vrh pozpátku", neboť rychlost dopadu $\boldsymbol{v}_d$ má vodorovný směr. Platí proto obdobné vztahy jako v druhé části pohybu: **4 body**

$$v_d = \sqrt{\frac{gd^2}{2(H-h)}} = 13,3\ \mathrm{m.s^{-1}}, \quad v_1 = \sqrt{v_d^2 + 2g(H-h)} = 14,0\ \mathrm{m.s^{-1}}, \quad \alpha_1 = 18^\circ .$$

b) Při odrazu od stěny ztrácí míček část své mechanické energie. $k = \frac{v_o}{v_d} = 0,71$. **2 body**

5. úloha. Označení veličin: $h = 1,5$ m; $H = 2,5$ m; $k = 0,8$; v_1 (rychlost dopadu); v_2 (rychlost odrazu). Určit v_0. Úlohu řešíme užitím zákona zachování energie:

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad v_2 = kv_1, \quad \frac{1}{2}mv_2^2 \geq mgH, \qquad \textbf{5 bodů}$$

$$\frac{1}{2}k^2\left(v_0^2 + 2gh\right) \geq gH, \quad v_0 \geq \frac{\sqrt{2g\left(H - k^2h\right)}}{k} = 6,9\ \mathrm{m.s^{-1}}. \qquad \textbf{5 bodů}$$

7. úloha. a) Platí $m_1 = m_2 = m$. Podle zákona zachování energie získá 1. koule před rázem rychlost $v_1 = \sqrt{2gl}$, kde l je délka vláken. Podle zákona zachování hybnosti $mv_1 = 2mu$. Po rázu se obě koule pohybují rychlostí $u = \frac{v_1}{2}$ a podle ZZE vystoupí do výšky $h = \frac{l}{4}$. Vlákna se vychýlí o úhel $\beta_1 = \arccos\frac{l-h}{l} = \arccos 0,75 = 41,4^\circ$. **2 body**

b) Při rázu přejde celá hybnost a energie 1. koule na 2. kouli. Platí $h = l$, $\beta_2 = 90^\circ$. **2 body**

c) Platí $m_1 = km_2$. Má-li druhá koule prolétnout bodem ve výšce $2l$, musí zde mít takovou rychlost v, aby dostředivá síla byla větší nebo rovna síle tíhové. V případě rovnosti platí

$$\frac{m_2v^2}{l} = m_2g, \quad E_k = \frac{m_2v^2}{2} = \frac{m_2gl}{2}.$$

Podle ZZE musí dále platit

$$\frac{m_2u_2^2}{2} = 2m_2gl + \frac{m_2gl}{2}, \quad u_2^2 = 5gl.$$

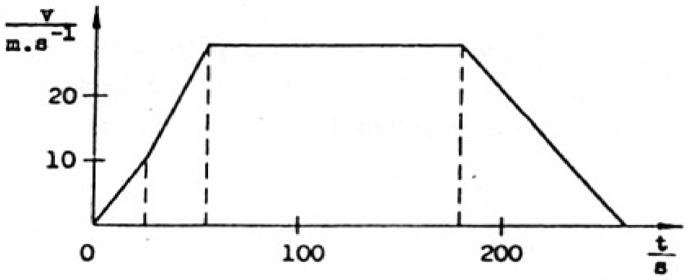
Spojením ZZE a ZZH dojdeme k soustavě rovnic

$$ku_1 + v_1\sqrt{2,5} = kv_1, \quad ku_1^2 + 2,5v_1^2 = kv_1^2. \qquad \textbf{3 body}$$

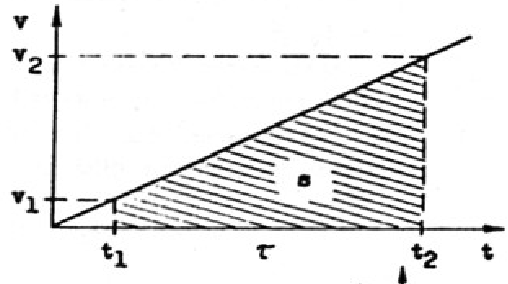
Vyjádříme z obou rovnic u_1^2 a pro minimální koeficient k dostaneme:

$$v_1^2\left(1 - \frac{\sqrt{2,5}}{k}\right)^2 = v_1^2\left(1 - \frac{2,5}{k}\right), \quad k = \frac{1}{\sqrt{1,6} - 1} \doteq 3,77. \qquad \textbf{3 body}$$

RD1



RD2



RD3