Řešení úloh 1. kola 35. ročníku FO, kat. C

1. úloha

a) Při pohybu nahoru vykonává míč vrh svislý vzhůru, po odrazu vrh svislý dolů. **1 bod**

b) Minimální rychlost určíme ze zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_{0min}^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{0min} = \sqrt{2gh} = 9,8\ \mathrm{m.s^{-1}} \qquad \mathbf{2\ body}$$

c) Nejdříve určíme ze zákona zachování energie rychlost v_1 míče před srážkou se stropem:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad v_1^2 = v_0^2 - 2gh\,.$$

Ztratí-li míč při srážce se stropem 30% kinetické energie, platí pro rychlost po odrazu

$$\frac{1}{2}mv_1'^2 = 0,7\frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1'^2 = 0,7v_1^2\,.$$

Dále se míč pohybuje vrhem svislým dolů. Pro rychlost v_2 při dopadu platí

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_1'^2 \qquad v_2^2 = v_1'^2 + 2gh = 0,7\left(v_0^2 - 2gh\right) + 2gh = 0,7v_0^2 + 0,6gh\,.$$

3 body

Pro $v_0 = 1,5v_{0min}$, $h = 4,9$ m dostaneme

$$v_2 = \sqrt{3,75gh} \doteq 13\ \mathrm{m.s^{-1}}\,. \qquad \mathbf{1\ bod}$$

d) Pro pohyb vzhůru platí

$$v_1 = v_0 - gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g}\,.$$

Pro pohyb dolů platí

$$v_2 = v_1' + gt_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_2 - v_1'}{g}\,.$$

Celkový čas pohybu míče je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh} + \sqrt{0,7v_0^2 + 0,6gh} - \sqrt{0,7\left(v_0^2 - 2gh\right)}}{g}\,. \qquad \mathbf{2\ body}$$

Pro $v_0 = 1,5v_{0min}$, $h = 4,9$ m dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}}\left(\sqrt{4,5} - \sqrt{2,5} + \sqrt{3,75} - \sqrt{1,75}\right) = 0,82\ \mathrm{s}\,. \qquad \mathbf{1\ bod}$$

2. úloha Objem rtuti i nádoby při teplotě t_0 označíme V_0. Objem nádoby při teplotě t_1 označíme V. Pro objem V platí

$$V = V_0\left[1 + \beta\left(t_1 - t_0\right)\right]\,. \qquad \mathbf{1\ bod}$$

Objem rtuti při teplotě t_1 označíme V_1. Pro objem V_1 platí

$$V_1 = V_0\left[1 + \beta_1\left(t_1 - t_0\right)\right]\,. \qquad \mathbf{1\ bod}$$

Objem V' rtuti, který z nádoby vyteče, je

$$V' = V_1 - V = V_0 (t_1 - t_0)(\beta_1 - \beta) . \qquad (1)$$

1 bod

Lze určit hmotnost m' rtuti, která z nádoby vytekla

$$m' = m_1 - m_2 ;$$ **1 bod**

rovněž lze určit hustotu rtuti při teplotě t_2

$$\rho = \frac{m_2 - m_0}{V} .$$ **1 bod**

Potom lze objem V' určit ze vztahu

$$V' = \frac{m'}{\rho} = V \frac{m_1 - m_2}{m_2 - m_0} = V_0 \frac{(m_1 - m_2)[1 + \beta (t_1 - t_0)]}{m_2 - m_0} \qquad (2)$$

1 bod

Porovnáme vztahy (1) a (2):

$$V_0 (t_1 - t_0)(\beta_1 - \beta) = V_0 \frac{(m_1 - m_2)[1 + \beta (t_1 - t_0)]}{m_2 - m_0} .$$ **1 bod**

Úpravou tohoto vztahu dostaneme:

$$\beta = \frac{m_2 - m_1 + \beta_1 (t_1 - t_0)(m_2 - m_0)}{(t_1 - t_0)(m_1 - m_0)} =$$

$$= \frac{-0,008 + 0,180 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 1,323}{40 \cdot 1,331} \mathrm{K}^{-1} = \frac{-0,008 + 0,0095}{53} \mathrm{K}^{-1} = 3 \cdot 10^{-5} \mathrm{K}^{-1} .$$

3 body

3. úloha

a) Aby se kvádr začal pohybovat, musí být v počáteční poloze pohybová složka tíhové síly větší než smykové tření

$$mg \sin\alpha > mg f_0 \cos\alpha , \qquad f_0 < \mathrm{tg}\,\alpha .$$ **1 bod**

Je-li tato podmínka splněna, kvádr sklouzne dolů a při protažení pružiny na délku l_1 se zastaví působením síly pružiny a třecí síly. V okamžiku zastavení je úbytek původní tíhové potenciální energie kvádru roven součtu práce spotřebované třecí silou a elastické potenciální energie pružiny. Z toho dostaneme

$$mg (l_1 - l_0) \sin\alpha = mgf (l_1 - l_0) \cos\alpha + \frac{1}{2} k (l_1 - l_0)^2 ,$$

$$l_1 = l_0 + \frac{2mg(\sin\alpha - f \cos\alpha)}{k} . \qquad (1)$$

2 body

b) Konečná poloha kvádru není velikostí součinitele tření jednoznačně určena. Určitě však leží v intervalu, kde maximální velikost statické třecí síly je větší nebo rovna velikosti výslednice síly pružiny a pohybové složky tíhové síly. Pak platí nerovnost

$$mg f_0 \cos\alpha > k (l_k - l_0) - mg \sin\alpha > -mg f_0 \cos\alpha ,$$

$$l_0 + \frac{mg (\sin\alpha + f_0 \cos\alpha)}{k} > l_k > l_0 + \frac{mg (\sin\alpha - f_0 \cos\alpha)}{k} . \qquad (2)$$

3 body

Mohou nastat dvě možnosti:

b1) Je-li v okamžiku prvního zastavení kvádru splněna nerovnost (2), pohyb dále nepokračuje. V tomto případě $l_1 = l_k$.

b2) Je-li kvádr v okamžiku prvního zastavení níže, než určuje nerovnost (2), začne se pohybovat nahoru. V takovém případě $l_k < l_1$. Při dalším zastavení kvádru má pružina délku l_2, kterou opět určíme užitím zákona zachování energie. Úbytek elastické potenciální energie pružiny se spotřebuje na práci spotřebovanou třecí silou a zvětšení tíhové potenciální energie kvádru. Platí

$$\frac{1}{2}k\left(l_1 - l_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(l_2 - l_0\right)^2 = mg\sin\alpha\left(l_1 - l_2\right) + mgf\cos\alpha\left(l_1 - l_2\right),$$

$$\frac{1}{2}k\left(l_1 - l_2\right)\left(l_1 + l_2 - 2l_0\right) = mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)\left(l_1 - l_2\right),$$

$$l_2 = 2l_0 - l_1 + \frac{2mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{k}. \qquad (3)$$

Opakováním předchozích úvah dojdeme ke vztahům

$$l_3 = 2l_0 - l_2 + \frac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{k}. \qquad (4)$$

$$l_4 = 2l_0 - l_3 + \frac{2mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{k}. \qquad (5)$$

$$\vdots$$

Pokračujeme, dokud není splněna nerovnost (2). **3 body**

Po dosazení číselných hodnot dostáváme:

$$l_1 = 1,00\ \mathrm{m}, \quad 0,74\ \mathrm{m} < l_k < 0,82\ \mathrm{m},$$

$$l_2 = 0,63\ \mathrm{m}, \quad l_3 = 0,87\ \mathrm{m}, \quad l_4 = 0,76\ \mathrm{m} = l_k. \qquad \textbf{1 bod}$$

4. úloha

a) Zvolíme souřadnicový systém dle obr. RC1. Obě tělesa mají stejnou hmotnost, těžiště leží v počátku soustavy souřadnic. **1 bod**

b) Souřadnice těžišť těles nyní jsou:

$$x_{T(m+m_1)} = r, \quad y_{T(m+m_1)} = 0,$$

$$x_{T(m-m_1)} = -r, \quad y_{T(m-m_1)} = 0,$$

Souřadnice těžiště soustavy určíme ze vztahu:

$$x_T = \frac{-r\left(m - m_1\right) + r\left(m + m_1\right)}{2m} = r\frac{m_1}{m} = 2,0.10^{-3}\ \mathrm{m}, \quad z_T = 0\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{2 body}$$

c) Pro obě tělesa napíšeme pohybovou rovnici:

$$\left(m + m_1\right)a = \left(m + m_1\right)g - T, \quad \left(m - m_1\right)a = T - \left(m - m_1\right)g,$$

kde T je tahová síla vlákna. Řešením soustavy rovnic dostaneme:

$$a = \frac{m_1}{m}g \doteq 0,39\ \mathrm{m.s^{-2}}. \qquad \textbf{3 body}$$

d) Tělesa se nepohybují ve směru osy x, tato souřadnice těžiště soustavy se nemění. Pro y - ové souřadnice těžišť obou těles platí:

$$y_{T(m+m_1)} = -\frac{1}{2}at^2, \quad y_{T(m-m_1)} = \frac{1}{2}at^2.$$

Souřadnice těžiště soustavy dostaneme ze vztahu:

$$y_T = \frac{(m-m_1)\frac{m_1}{2m}gt^2 + (m-m_1)\left(-\frac{m_1}{2m}gt^2\right)}{2m} = -\frac{m_1^2}{2m^2}gt^2. \qquad \textbf{3 body}$$

e) Ze vztahu pro polohu těžiště soustavy těles určeného v části d) lze vyjádřit velikost zrychlení těžiště a_1:

$$a_1 = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 g \doteq 0{,}016 \text{ m.s}^{-2} \qquad \textbf{1 bod}$$

5. úloha

a) Hmotnost tělesa označíme m, délku vlákna l. V krajní poloze působí na těleso tíhová síla $F_G = mg$ a tahová síla vlákna F_1. Jejich výslednice F má velikost $F = mg\sin\alpha$ (obr. RC2). Tato výslednice uděluje tělesu tečné zrychlení o velikosti $a_t = g\sin\alpha$. Normálové zrychlení je nulové. **1 bod**

V krajní poloze je kinetická energie nulová, potenciální energie tíhová je $E_p = mgh$. V rovnovážné poloze je nulová potenciální energie tíhová, kinetická energie je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Ze zákona zachování energie $E_p = E_k$ určíme

$$v^2 = 2gh, \quad \text{kde } h = l(1-\cos\alpha). \qquad \textbf{2 body}$$

Rovnovážnou polohou prochází těleso s normálovým zrychlením

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{2gh}{l} = 2g(1-\cos\alpha).$$

Tečné zrychlení je nulové. **1 bod**

Podle zadání je $a_t = a_n$, po dosazení:

$$g\sin\alpha = 2g(1-\cos\alpha), \quad \sin\alpha = 2(1-\cos\alpha).$$

Úpravou posledního vztahu dostaneme:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 53°8'. \qquad \textbf{1 bod}$$

Těleso musí být vychýleno o $53°8'$, aby tečné zrychlení v krajní poloze bylo stejně velké jako normálové zrychlení v rovnovážné poloze. **1 bod**

b) V krajních polohách je vlákno napínáno silou o velikosti $F_1 = mg\cos\alpha_1$.

Při průchodu rovnovážnou polohou je vlákno napínáno silou o velikosti

$$F_2 = m(g+a_n) = mg + 2mg(1-\cos\alpha_1) = mg(3-2\cos\alpha_1). \qquad \textbf{2 body}$$

Podle zadání platí $F_2 = 2F_1$, po dosazení

$$mg(3-2\cos\alpha_1) = 2mg\cos\alpha_1, \quad \cos\alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \alpha = 41°25'. \qquad \textbf{2 body}$$

Při vychýlení tělesa o úhel $41°25'$ bude vlákno napínáno v rovnovážné poloze silou o dvojnásobné velikosti než je velikost síly, kterou je vlákno napínáno v krajní poloze.

7. úloha

a) Ze stavové rovnice a Poissonova zákona odvodíme:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \qquad \textbf{0,5 bodu}$$

$$p_1 V_1 = nR_m T_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{nR_m T_1}{p_1} \doteq 0,025 \text{ m}^3, \qquad \textbf{1 bod}$$

$$p_2 V_1^{\kappa} = p_1 V_3^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad V_3 = V_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \doteq 0,038 \text{ m}^3, \qquad \textbf{1 bod}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_3}{T_3} \quad \Rightarrow \quad T_3 = T_1 \frac{V_3}{V_1} \doteq 455 \text{ K}. \qquad \textbf{0,5 bodu}$$

b) Energetická bilance jednotlivých částí cyklu:

Izochorický děj 1-2: Práce se nekoná; změna vnitřní energie je rovna dodanému teplu:

$$\Delta U_{12} = Q_{12} = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR_m (T_2 - T_1) \doteq 3,7 \cdot 10^3 \text{ J}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Adiabatický děj 2-3: Nedochází k tepelné výměně; vykonaná práce je rovna úbytku vnitřní energie:

$$W'_{23} = -\Delta U_{23} = \frac{3}{2} nR_m (T_2 - T_3) \doteq 1,8 \cdot 10^3 \text{ J}, \quad \Delta U_{23} = -1,8 \cdot 10^3 \text{ J}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Izobarický děj 3-1: Použijeme první termodynamický zákon ve tvaru:

$$\Delta U_{31} = W_{31} - Q'_{31}.$$

Pro změnu vnitřní energie platí:

$$\Delta U_{31} = \frac{3}{2} nR_m (T_1 - T_3) = -1,9 \cdot 10^3 \text{ J}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Práci vykonanou vnějšími silami určíme ze vztahu:

$$W_{31} = p_1 (V_3 - V_1) = nR_m (T_3 - T_1) \doteq 3,2 \cdot 10^3 \text{ J}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Pro odevzdané teplo platí:

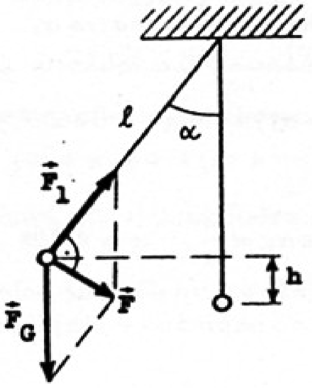
$$Q'_{31} = W_{31} - \Delta U_{31} \doteq 3,2 \cdot 10^3 \text{ J}. \qquad \textbf{1 bod}$$

) Pro výpočet účinnosti užijeme výsledky z úlohy b). Platí

$$\eta = \frac{W'_{23} - W_{31}}{Q_{12}} = \frac{\frac{3}{2} nR_m (T_2 - T_3) - nR_m (T_3 - T1)}{\frac{3}{2} nR_m (T_2 - T_1)} = \frac{T_1 + 1,5T_2 - 2,5T_3}{1,5(T_2 - T_1)} \doteq 0,14.$$

Účinnost tohoto kruhového děje je asi 14 %. **2 body**

RC2



RC1