Ústřední výbor fyzikální olympiády české republiky

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA 35. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY. Kategorie B

1. a) Vyjdeme ze vztahů

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m_1}{k}, \quad T_2^2 = 4\pi^2 \frac{m_1 + m_2}{k}.$$

Odečtením a úpravou dostaneme

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m_2}{k}, \quad k = \frac{4\pi^2 m_2}{T_2^2 - T_1^2} = 20,2\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}. \qquad \textbf{3 body}$$

Miska má hmotnost

$$m_1 = \frac{kT_1^2}{4\pi^2} = \frac{m_2 T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} = 1,15\ \mathrm{kg}. \qquad \textbf{1 bod}$$

b) Amplituda kmitů po uvolnění závaží je stejná jako změna rovnovážné polohy vyvolaná tíhou závaží:

$$y_m = \frac{m_2 g}{k} = \frac{g\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{4\pi^2} = 0,48\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{2 body}$$

c) Na závaží působí během pohybu výslednice tíhové síly a reakce misky. Platí

$$\boldsymbol{F} = m_2 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R}.$$

Z toho určíme tíhu závaží

$$\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_G - m_2 \boldsymbol{a}.$$

Její velikost je $G = m_2 g + m_2 a = m_2(g + a)$, kde a je **souřadnice zrychlení**, která nabývá střídavě kladných a záporných hodnot. Protože pohyb začíná v horní krajní poloze, platí

$$a = -\omega^2 y = -\omega^2 y_m \cos \omega t,$$

$$G = m_2 g - m_2 \omega^2 y_m \cos \omega t = m_2 g \left(1 - \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2} \cos \frac{2\pi t}{T_2}\right). \qquad \textbf{2 body}$$

Největší a nejmenší velikost tíhy jsou v poměru

$$\frac{G_{max}}{G_{min}} = \frac{1 + \dfrac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2}}{1 - \dfrac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2}} = \frac{2T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} = 2,7.$$

2 body

2 a) Elektron se v magnetickém poli pohybuje po kruhovém oblouku, jehož středový úhel α je stejný jako odchylka vektoru rychlosti od původního směru (obr. RB1). Oblouk je souměrný podle přímky MO a přímka OP je jeho tečnou. Platí

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{r}, \qquad y = d\operatorname{tg}\alpha .$$

Trajektorie elektronu je v magnetickém poli zakřivena působením Lorentzovy síly. Pokud vektor $\boldsymbol{B}$ směřuje před nákresnu a elektron se pohybuje vpravo, směřuje výchylka elektronu nahoru. Kdybychom otočili vektor $\boldsymbol{B}$ za nákresnu, elektron by se vychýlil dolů. Poloměr oblouku r závisí na velikosti rychlosti elektronu a na velikosti magnetické indukce. Velikost rychlosti elektronu závisí na urychlovacím napětí elektronové trysky. Platí:

$$Ue = \frac{1}{2}mv^2, \qquad v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}},$$

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = Bev, \qquad r = \frac{mv}{Be}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{RBe}{mv} = RB\sqrt{\frac{e}{2mU}},$$

$$y = d\operatorname{tg}\alpha = d\operatorname{tg}\left(2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{dRB\sqrt{\frac{2e}{mU}}}{1-\frac{R^2B^2e}{2mU}}.$$

4 body

b) Jestliže $y = d$, dostáváme

$$\frac{y}{d} = \frac{RB\sqrt{\frac{2e}{mU}}}{1-\frac{R^2B^2e}{2mU}} = 1,$$

což vede ke kvadratické rovnici

$$B^2\frac{R^2e}{2mU} + BR\sqrt{\frac{2e}{mU}} - 1 = 0,$$

která má kladné řešení

$$B = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Pro dané hodnoty dostáváme $B = 0,00466$ T. **3 body**

c) Pro malé úhly α můžeme psát

$$\operatorname{tg}\alpha \doteq 2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad y = 2d\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \doteq dR\sqrt{\frac{2e}{mU}}B = KB\,.$$

Dostáváme přímou úměrnost s konstantou úměrnosti

$$K = dR\sqrt{\frac{2e}{mU}}\,. \quad \text{Pro dané hodnoty } K = 26,7\ \mathrm{m\cdot T^{-1}}.$$

3 body

Poznámka. Lze také postupovat takto:

a) $\alpha = 2\operatorname{arctg}\left(RB\sqrt{\frac{e}{2mU}}\right)$, $\quad y = d\operatorname{tg}\left[2\operatorname{arctg}\left(RB\sqrt{\frac{e}{2mU}}\right)\right]$.

b) Jestliže $y = d$, platí $\alpha = 45°$. Pak

$$RB\sqrt{\frac{e}{2mU}} = \operatorname{tg}22,5°\,, \qquad B = \frac{\operatorname{tg}22,5°}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = 0,00466\ \mathrm{T}\,.$$

3. a) Dosáhne-li lyžař maximální rychlosti v_m, je pohybová složka tíhové síly v rovnováze s odporem vzduchu a smykovým třením mezi lyžemi a sněhem. Pro úhly α_1 a α_2 dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} mg\sin\alpha_1 &= mgf\cos\alpha_1 + \tfrac{1}{2}CS\rho v_{m1}^2\,, \\ mg\sin\alpha_2 &= mgf\cos\alpha_2 + \tfrac{1}{2}CS\rho v_{m2}^2\,, \end{aligned} \tag{1}$$

ze které vyjádříme

$$C = \frac{2mg(sin\alpha_2\cos\alpha_1 - sin\alpha_1\cos\alpha_2)}{S\rho(v_{m2}^2\cos\alpha_1 - v_{m1}^2\cos\alpha_2)} = \frac{2mg\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{S\rho(v_{m2}^2\cos\alpha_1 - v_{m1}^2\cos\alpha_2)}\,.$$

Pro dané hodnoty $C = 0,42$. **4 body**

b) Řešením soustavy (1) dále dostaneme

$$f = \frac{v_{m2}^2\sin\alpha_1 - v_{m1}^2\sin\alpha_2}{v_{m2}^2\cos\alpha_1 - v_{m1}^2\cos\alpha_2}\,.$$

Pro dané hodnoty $f = 0,12$. **3 body**

c) Maximální rychlost lyžaře na svahu se sklonem α_3 určíme ze vztahu

$$v_{m3} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}(\sin\alpha_3 - f\cos\alpha_3)}\,.$$

Po dosazení $v_{m3} = 46\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **3 body**

4. Označme u^* výstupní napětí prvního operačního zesilovače, který funguje jako neinvertující zesilovač (obr. RB2). Platí tedy

$$u^* = u_{i1}\left(1 + \frac{R_1}{R}\right).$$ **2 body**

U druhého operačního zesilovače se vlivem zpětné vazby udržuje vstupní difrenciální napětí na zanedbatelné hodnotě. Napětí na invertujícím vstupu je proto prakticky stejné jako u_{i2}. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí

$$\frac{u^* - u_{i2}}{R} = \frac{u_{i2} - u_o}{R_2}.$$ **3 body**

Vyloučením u^* a úpravou dostáváme

$$u_o = \left(1 + \frac{R_2}{R}\right)u_{i2} - \left(1 + \frac{R_1}{R}\right)\frac{R_2}{R}u_{i1}.$$

Současně má platit

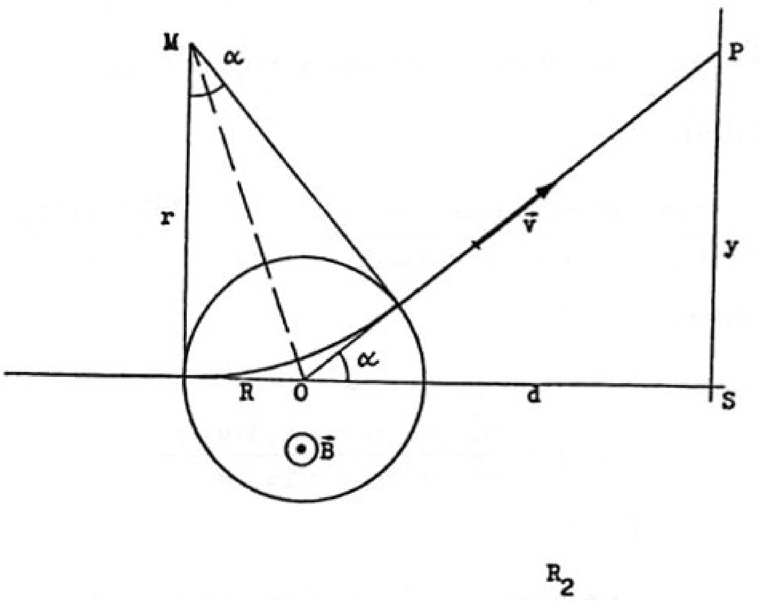
$$u_o = 10\,(u_{i2} - u_{i1}).$$ **3 body**

Porovnáním obou vztahů dostaneme

$$1 + \frac{R_2}{R} = 10, \qquad R_2 = 9R = 90\ \text{k}\Omega.$$

$$\left(1 + \frac{R_1}{R}\right)\frac{R_2}{R} = 9\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) = 10, \qquad R_1 = \frac{R}{9} = 1{,}11\ \text{k}\Omega.$$ **2 body**

RB1



RB2