## Řešení úloh 1. kola 35. ročníku FO, kat. B

**1. úloha**

a) Nezatížená konstrukce je osově souměrná podle svislé přímky procházející bodem C (obr. RB1). Síly $F_{C0}$ a $-F_{C0}$ vzájemného působení nosníků v bodě C jsou proto vodorovné. Jejich velikost určíme z momentové věty pro osu v bodě A:

$$F_{C0} d \sin\varphi - F_G \frac{d}{2} \cos\varphi = 0\,, \qquad F_{C0} = \frac{F_G}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi} = 158\ \mathrm{N}\,.$$

Síly $F_{A0}$, $F_G$ a $F_{C0}$ jsou v rovnováze. Tvoří uzavřený trojúhelník, ze kterého určíme velikost a směr síly $F_{A0}$:

$$F_{A0} = \sqrt{F_G^2 + \left(\frac{F_G}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^2} = mg\sqrt{1 + \frac{1}{4\,\mathrm{tg}^2\varphi}} = 216\ \mathrm{N}\,,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{F_G}{\frac{F_G}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}} = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,; \quad \alpha_0 = 43{,}0°\,.$$

Vzhledem k symetrii $F_{B0} = F_{A0}$, $\beta_0 = \alpha_0$. **3 body**

b) U zatížené konstrukce působí síly $F_{C0}$ a $-F_{C0}$ šikmo pod úhly $\pm\gamma$ (obr. RB2). Z podmínek rovnováhy odvodíme soustavu rovnic:

$$F_A \cos\alpha = F_C \cos\gamma = F_B \cos\beta$$

$$F_A \sin\alpha + F_C \sin\gamma = (m + m_1)g$$

$$F_B \sin\alpha - F_C \sin\gamma = mg$$

$$F_C \cos\gamma \cdot d\sin\varphi + F_C \sin\gamma \cdot d\cos\varphi - (m + m_1)g \cdot \frac{d}{2}\cos\varphi = 0$$

$$-F_C \cos\gamma \cdot d\sin\varphi + F_C \sin\gamma \cdot d\cos\varphi + mg \cdot \frac{d}{2}\cos\varphi = 0$$

Poslední dvě rovnice byly získány pomocí momentové věty pro levý nosník a osu v bodě A a z momentové věty pro pravý nosník a osu v bodě B. **4 body**

Řešením soustavy dostaneme:

$$F_C \cos\gamma = \frac{(2m + m_1)g}{4\,\mathrm{tg}\,\varphi}\,, \qquad F_C \sin\gamma = \frac{mg}{4}\,,$$

$$F_C = \frac{g}{4}\sqrt{\left(\frac{2m + m_1}{\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^2 + m_1^2} = 841\ \mathrm{N}\,.$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{m_1}{2m + m_1}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,, \quad \gamma = 20{,}5°\,.$$

$$F_A \cos\alpha = \frac{(2m + m_1)g}{4\,\mathrm{tg}\,\varphi}\,, \qquad F_A \sin\alpha = \frac{(4m + 3m_1)g}{4}\,,$$

$$F_A = \frac{g}{4}\sqrt{\left(\frac{2m + m_1}{\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^2 + (4m + 3m_1)^2} = 1300\ \mathrm{N}\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4m + 3m_1}{2m + m_1}\operatorname{tg}\varphi\,, \quad \alpha = 52{,}6^\circ\,,$$

$$F_B\cos\beta = \frac{(2m + m_1)g}{4\operatorname{tg}\varphi}\,, \qquad F_B\sin\beta = \frac{(4m + m_1)g}{4}\,,$$

$$F_B = \frac{g}{4}\sqrt{\left(\frac{2m + m_1}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2 + (4m + m_1)^2} = 903\ \mathrm{N}\,,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4m + m_1}{2m + m_1}\operatorname{tg}\varphi\,, \quad \beta = 29{,}2^\circ\,.$$ **3 body**

**2. úloha**

Elektrická práce topné spirály $W = \frac{U^2\tau}{R}$ se spotřebuje na teplo potřebné k ohřátí ledu na teplotu tání

$$Q_1 = (K + mc_1)(0\,^\circ\mathrm{C} - t_1) = 14700\ \mathrm{J}\,;$$

skupenské teplo tání ledu

$$L_t = ml_t = 2{,}82 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$$

a teplo potřebné k ohřátí vody na výslednou teplotu

$$Q_2 = (K + mc_2)(t_2 - 0\,^\circ\mathrm{C}) = 9{,}06 \cdot 10^4\ \mathrm{J}\,.$$ **4 body**

Příkon topného tělíska je

$$P = \frac{Q_1 + L_t + Q_2}{\tau} = 143\ \mathrm{W}$$

a napětí zdroje $U = \sqrt{PR} = 29\ \mathrm{V}$. **2 body**

Doby trvání jednotlivých částí děje jsou

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{P} = 100\ \mathrm{s}, \qquad \tau_2 = \frac{L_t}{P} = 1970\ \mathrm{s}, \qquad \tau_3 = \frac{Q_2}{P} = 630\ \mathrm{s}.$$ **2 body**

Časový průběh celého děje zobrazuje graf na obr. RB3. **2 body**

**3.úloha**

Celý děj se skládá z jednoho volného pádu a řady svislých vrhů vzhůru. Označme:

- $\tau_0$ ... doba volného pádu,
- $\tau_i$ ... doba výstupu po $i$-tém odrazu,
- $v_0$ ... rychlost dopadu při volném pádu,
- $v_i$ ... rychlost na počátku a na konci $i$-tého vrhu,
- $h_0$ ... počáteční výška kuličky,
- $h_i$ ... výška $i$-tého vrhu,
- $t_i$ ... doba od počátku děje do $i$-tého odrazu,
- $t_i^*$ ... doba od počátku děje do $i$-tého výstupu.

a) Můžeme-li zanedbat odpor vzduchu, platí

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,, \qquad v_0 = \sqrt{2gh_0}\,, \qquad v_1 = kv_0\,, \qquad h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = k^2h_0\,,$$

$$v_i = k^iv_0\,, \qquad h_i = \frac{v_i^2}{2g} = k^{2i}h_0\,,$$

$$\tau_1 = \frac{2v_1}{g} = 2k\tau_0\,, \qquad \tau_i = \frac{2v_i}{g} = 2k^i\tau_0\,.$$

Celkovou dobu pohybu můžeme vyjádřit pomocí součtu nekonečné geometrické řady:

$$t = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \cdots = \tau_0 \left[-1 + 2\left(1 + k + k^2 + \cdots\right)\right] = \tau_0 \left(-1 + \frac{2}{1-k}\right),$$

$$t = \tau_0 \frac{1+k}{1-k}, \qquad k = \frac{t - \tau_0}{t + \tau_0}.$$

Pro dané hodnoty $\tau_0 = 0,452$ s, $k = 0,893$. **3 body**

b) Při každém odrazu se zmenší mechanická energie kuličky v poměru

$$E_i : E_{i+1} = \frac{1}{2} m v_i^2 : \frac{1}{2} m v_{i+1}^2 = 1 : k^2.$$

Relativní úbytek energie je

$$\frac{E_{i+1} - E_i}{E_i} = 1 - k^2 = 0,202 = 20,2\,\%.$$ **2 body**

c) Také celkovou dráhu kuličky $s$ určíme užitím součtu nekonečné geometrické řady:

$$s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \cdots = h_0 \left[-1 + 2\left(1 + k^2 + k^4 + \cdots\right)\right],$$

$$s = h_0 \left(-1 + \frac{2}{1-k^2}\right) = h_0 \frac{1+k^2}{1-k^2}.$$

Pro dané hodnoty $s = 8,9$ m. **2 body**

d) Dobu $t_i$ od počátku děje do $i$-tého odrazu určíme užitím vztahu pro výpočet součtu prvních $i$ členů geometrické posloupnosti:

$$t_i = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_{i-1} = \tau_0 \left[-1 + \left(1 + k + k^2 + \cdots + k^{i-1}\right)\right],$$

$$t_i = \tau_0 \left(-1 + \frac{k^i - 1}{k - 1}\right) = \tau_0 \frac{2k^i - k - 1}{k - 1}.$$

Dobu $t_i^*$ od počátku děje do $i$-tého výstupu určíme pomocí vztahu

$$t_i^* = t_i + \frac{\tau_i}{2} = t_i + \tau_0 k^i.$$

Výsledky výpočtů pro dané hodnoty jsou v následující tabulce; graf závislosti okamžité výšky kuličky na čase je na obr. RB4.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau_i$/s | 0,45 | 1,26 | 1,98 | 2,62 | 3,20 | 3,72 | 4,17 | 4,58 | 4,94 | 5,27 |
| $\tau_i^*$/s | 0,86 | 1,62 | 2,30 | 2,91 | 3,45 | 3,94 | 4,37 | 4,76 | 5,11 | 5,42 |
| $h_i$/mm | 798 | 636 | 507 | 405 | 323 | 258 | 205 | 164 | 131 | 104 |

**3 body**

**. úloha**

a) Indukčnost primární cívky určíme z její induktance

$$X_L = \omega L = \frac{U}{I}, \qquad L = \frac{u}{\omega I} = \frac{U}{2\pi f I}.$$

Pro dané hodnoty $L = 6,1$ H **3 body**

b) Amplitudu $B_m$ magnetické indukce v jádře transformátoru určíme ze vztahu pro maximální indukční tok

$$\Phi_{cm} = L \cdot I_m = LI\sqrt{2} = NB_mS, \qquad B_m = \frac{LI\sqrt{2}}{NS}$$

Pro dané hodnoty $B_m = 1,05$ T. **4 body**

c) Relativní permeabilitu jádra $\mu_r$ určíme ze vztahu

$$B_m = \frac{\mu_r\mu_0 N I_m}{l}, \qquad \mu_r = \frac{B_m l}{\mu_0 N I\sqrt{2}}$$

Pro dané hodnoty $\mu_r = 2300$. **3 body**

**5. úloha**

a) Označme proudy v jednotlivých větvích podle obr. RB5. Pomocí Kirchhoffových zákonů získáme soustavu rovnic

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4,$$
$$R_1I_1 + 2R_1I_2 = U,$$
$$R_1I_1 + 4R_1I_3 = 2U,$$
$$R_1I_1 + 8R_1I_4 = 3U.$$

Řešním dostaneme $I_1 = \frac{11}{15}$ A, $I_2 = \frac{2}{15}$ A, $I_3 = \frac{19}{60}$ A, $I_4 = \frac{17}{60}$ A.

Pro dané hodnoty $I_1 = 44$ mA, $I_2 = 8$ mA, $I_3 = 19$ mA, $I_4 = 17$ mA. Na rezistoru $R_1$ je úbytek napětí $R_1I_1 = 44$ V. Stejný je i elektrický potenciál v uzlu E. **5 bodů**

b) Nemá-li rezistorem $R_2$ procházet proud, musí být v uzlu E stejný potenciál jako v uzlu B. Na rezistoru $R_1$ je v takovém případě napětí $U$ a prochází jím proud $I_1 = \frac{U}{R_1}$. Na rezistoru $R_4$ je napětí $2U$ a prochází jím proud $I_4 = \frac{2U}{8R_1} = \frac{U}{4R_1}$. Podle 1. Kirchhoffova zákona musí rezistorem $R_3$ procházet proud $I_3 = I_1 - I_4 = \frac{3U}{4R_1}$. Přitom je na něm napětí $U$. Z toho určíme $R_3 = \frac{4R}{3}$.

Pro dané hodnoty $R_3 = 1,33$ k$\Omega$, $I_1 = 60$ mA, $I_3 = 45$ mA, $I_4 = 15$ mA. **5 bodů**

**7. úloha**

Označme napětí na neinvertujícím vstupu operačního zesilovače $u^*$ (obr. RB6). Podle 1. Kirchhoffova zákona platí pro uzel u neinvertujícího vstupu

$$\frac{u^*}{R1} = \frac{u_a - u^*}{R_a} + \frac{u_b - u^*}{R_b} + \frac{u_c - u^*}{R_c},$$

Vlivem zpětné vazby se vstupní diferenciální napětí OZ udržuje na zanedbatelné hodnotě. Napětí na invertujícím vstupu je prakticky také $u^*$. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí pro uzel u invertujícího vstupu

$$\frac{u_o - u^*}{R_3} = \frac{u^*}{R_2}.$$ **3 body**

Vyloučením $u^*$ a úpravou dostaneme pro výstupní napětí OZ vztah

$$u_o = \frac{\left(\frac{u_a}{R_a} + \frac{u_b}{R_b} + \frac{u_c}{R_c}\right)(R_2 + R_3)}{\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_1}\right) R_2}.$$ **2 body**

**Současně má platit**

$$u_o = u_a + 2u_b + 4u_c .$$

**Spojením obou vztahů, dosazením za $R_2$, $R_3$ a substitucí**

$$\frac{1}{R_a} = x , \quad \frac{1}{R_b} = y , \quad \frac{1}{R_c} = z , \quad \frac{1}{R_1} = d$$

**dojdeme ke vztahu**

$$\frac{11\,(xu_a + yu_b + zu_c)}{x + y + z + d} = u_a + 2u_b + 4u_c ,$$ **2 body**

**který má být splněn pro jakékoliv hodnoty vstupních napětí. To vede k soustavě rovnic**

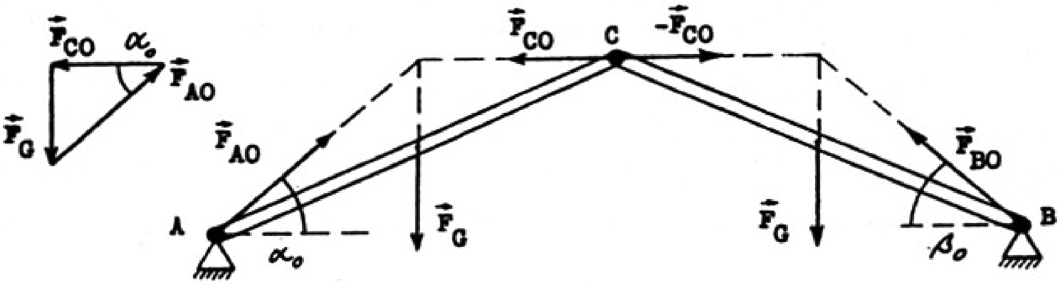
$$x + y + z + d = 11x ,$$

$$2(x + y + z + d) = 11y ,$$

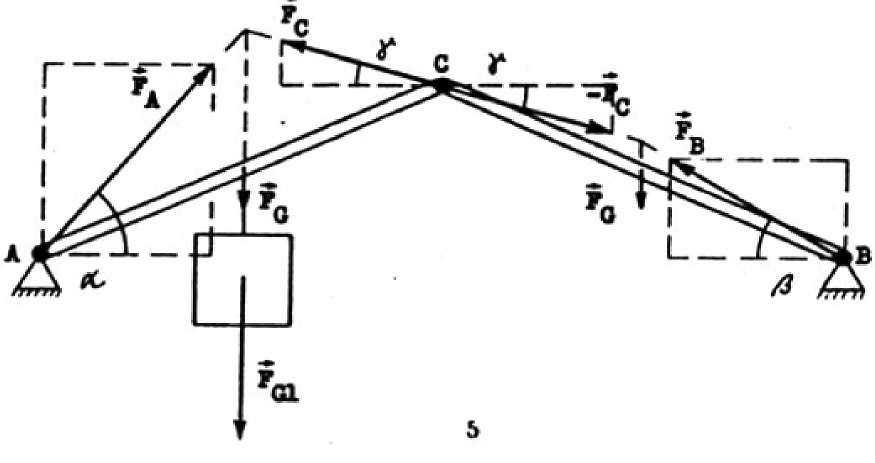
$$4(x + y + z + d) = 11z ,$$

**která má řešení $x = \frac{d}{4}$, $y = \frac{d}{2}$, $z = d$. Hledané odpory jsou**

$$R_a = 4R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega} , \quad R_b = 2R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega} , \quad R_c = R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega} .$$ **3 body**

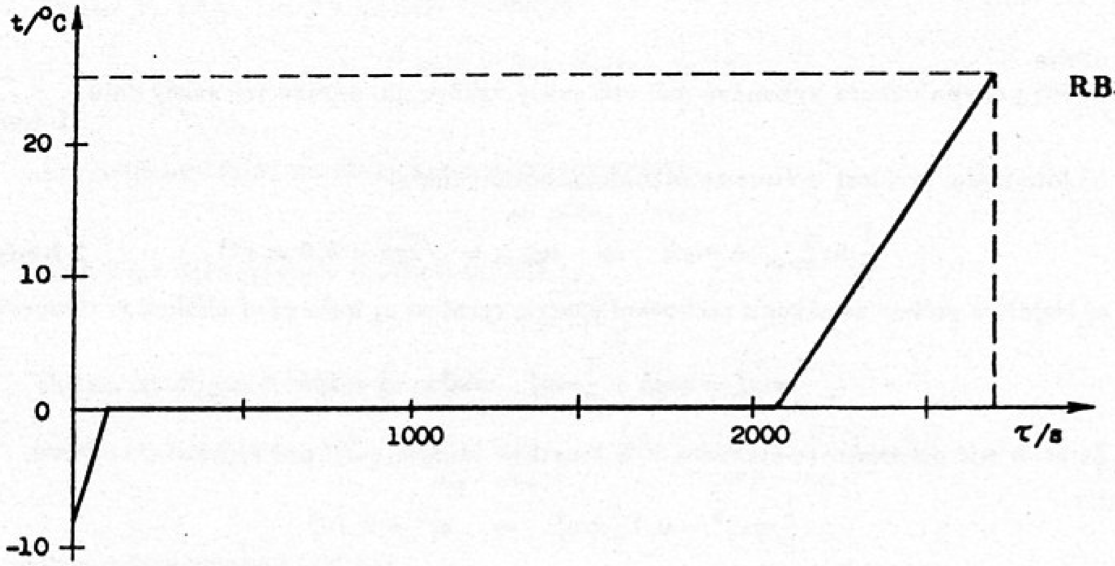



**RB1**

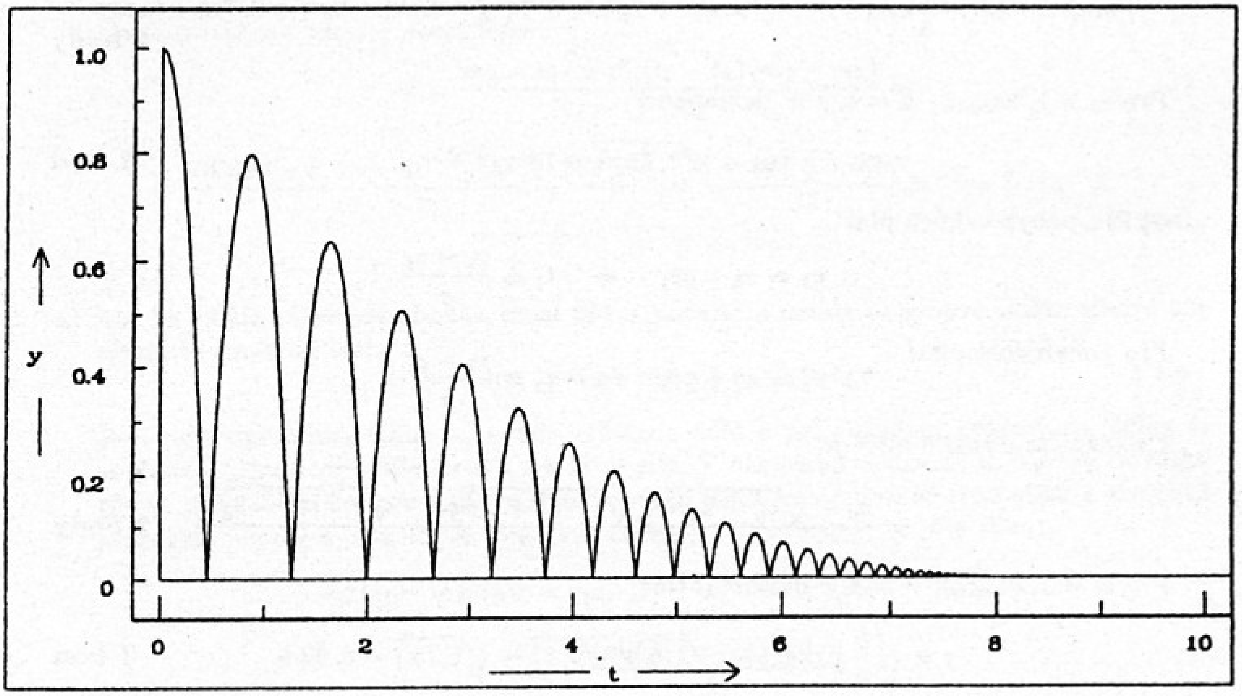



**RB2**

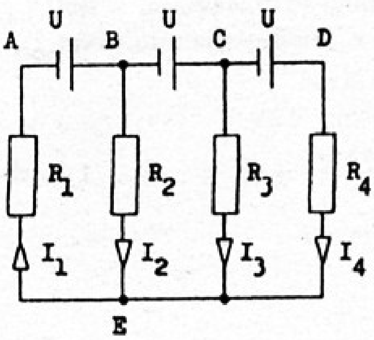
RB3




RB4




RB5




RB6