

Ústřední výbor fyzikální olympiády české republiky
ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA 35. ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY. Kategorie A

1. a) Počet elektronů, které dopadnou za 1 s na anodu rentgenky, je

$$N_e = \frac{I_a}{e} = 1,25 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}, \quad \frac{N_e}{N} = 25.$$

Na 25 elektronů, které dopadnou na anodu rentgenky, připadá jeden vyzářený foton rentgenového záření.

1 bod

b) Energie fotonů rentgenového záření je

$$E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{po dosazení } E_f = 1,99 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 12,4 \text{ keV}.$$

Hmotnost m_f fotonů určíme na základě Einsteinova vztahu ekvivalence hmotnosti a energie:

$$m_f c^2 = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{z toho } m_f = \frac{h}{\lambda c}, \quad \text{po dosazení } m_f = 2,21 \cdot 10^{-32} \text{ kg}.$$

Kinetická energie elektronů dopadajících na anodu rentgenky je rovna elektrické práci. Hmotnost urychleného elektronu je větší než klidová hmotnost o ekvivalent kinetické energie. Platí

$$E_k = Ue, \quad m_e = m_{e0} + \frac{E_k}{c^2},$$

po dosazení

$$E_k = 50 \text{ keV} = 8,0 \cdot 10^{-15} \text{ J}, \quad m_e = (9,11 + 0,89) \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 1,00 \cdot 10^{-30} \text{ kg},$$

$$\frac{E_k}{E_f} = 4,0, \quad \frac{m_e}{m_f} = 45,2.$$

Kinetická energie elektronů dopadajících na anodu je čtyřikrát větší než hmotnost fotonů rentgenového záření, hmotnost elektronů je asi 45 krát větší než hmotnost fotonů.

4 body

c) Vyjdeme z relativistického vztahu pro setrvačnou hmotnost. Platí

$$m_r = \frac{m_{r0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v = c \sqrt{1 - \frac{m_{r0}^2}{m_r^2}},$$

po dosazení $v = 0,415c = 1,24 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, **2 body**

d) Zářivý výkon rentgenky a elektrický příkon rentgenky jsou

$$P = N \frac{hc}{\lambda}, \quad P_0 = U_a I_a.$$

Z toho určíme účinnost rentgenky

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{Nhc}{\lambda U_a I_a}, \quad \text{po dosazení } \eta = 0,00994 = 0,994 \, \%.$$

Účinnost rentgenové trubice je velmi nízká. Značná část energie se mění na anodě na teplo.

2 body

e) Wilhelm Conrad Röntgen byl prvním nositelem Nobelovy ceny za fyziku. Obdržel ji r. 1901.

1 bod

2. a) Z parametrických rovnic šikmého vrhu

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

vyjádříme

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (1)$$

a přejdeme k neparametrické rovnici

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Dosazením souřadnic cíle a úpravou dostáváme

$$b = a \tan \alpha - \frac{g a^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

$$v_0^2 = \frac{g a^2}{2 \cos^2 \alpha (a \tan \alpha - b)}, \quad v_0 = \frac{a}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(a \tan \alpha - b)}}. \quad (2)$$

2 body

Počáteční rychlost bude mít minimální velikost, jestliže hodnota výrazu

$$\cos^2 \alpha (a \operatorname{tg} \alpha - b) = a \sin \alpha \cos \alpha - b \cos^2 \alpha$$

bude maximální. Proto

$$\frac{d(a \sin \alpha \cos \alpha - b \cos^2 \alpha)}{d\alpha} = a(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2b \cos \alpha \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

2 body

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici

$$a \operatorname{tg}^2 \alpha - 2b \operatorname{tg} \alpha - a = 0.$$

Úloze vyhovuje kořen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b + \sqrt{b^2 + a^2}}{a}. \quad (4)$$

Pro dané hodnoty $\alpha = 58,6^\circ$.

2 body

Vztahu (4) odpovídá obr. RA1. Z něj je patrné, že vektor počáteční rychlosti leží v ose úhlu φ , který svírá svislice v počátku vrhu a spojnice počátku vrhu s cílem.

2 body

b) Po dosazení do (2) za použití vztahu

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

dostaneme

$$v_0^2 = \frac{ga^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2(a \operatorname{tg} \alpha - b)}, \quad v_0 = \sqrt{g \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 + a^2} + a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}}$$

Z (1) a (2) dostaneme

$$t^2 = \frac{a^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{2(a \operatorname{tg} \alpha - b)}{g}, \quad t = \sqrt{\frac{2\sqrt{b^2 + a^2}}{g}}.$$

Pro dané hodnoty $v_0 = 15,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $t = 1,9 \text{ s}$.

2 body

Jiné řešení

Úpravou vztahu (3) dostaneme

$$a \cos 2\alpha - b \sin 2\alpha = 0, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{a}{b}.$$

Z obr. RA2 je zřejmé, že platí

$$2\alpha = 180^\circ - \varphi, \quad \alpha = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

Velikost počáteční rychlosti a dobu letu můžeme také vypočítat dosazením hodnoty α do (2) a pak dosazením hodnot v_0 a α do (1).

3. Označme napětí diody, při kterém, je-li zapojena v propustném směru, jí začne procházet proud $U_0 = 0,5 \text{ V}$.

a) Schéma zapojení reálného obvodu je na obr. RA3.

0,5 bodu

b) Schéma náhradního obvodu je na obr. RA4. Odpor rezistoru, který nahrazuje odpor diody v propustném směru je $R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I}$. Jak vyplývá z charakteristiky, $R_d = 5 \Omega$.

1,5 bodu

c) Graf funkce $i = i(t)$ je na obr. RA5. K určení stupnice na osách je třeba zjistit amplitudu proudu v obvodu a okamžiky, kdy je proud velmi blízko nulové hodnoty. Určíme je takto: celkové napětí v obvodu v kladné půlperiodě je $U_m \sin \omega t - (U_0 + U_e)$, celkový odpor je $R_d + r$. Proud v obvodu je určen vztahem

$$i(t) = \frac{U_m \sin \omega t - (U_0 + U_e)}{R_d + r} = I_m \sin \omega t - I_0 \geq 0. \quad (5)$$

Pro dané hodnoty $\{i(t)\} = 0,32 \sin \omega t - 0,16 \geq 0$, největší hodnota proudu je $0,16 \text{ A}$.

Jak vyplývá z oboru funkčních hodnot, definiční obor funkce vyjádřený celkovou fází proudu ωt je

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \omega t \leq (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

vyjádřený časem t je

$$1,67 \cdot 10^{-3} \text{ s} + 2k \cdot 10,0 \cdot 10^{-3} \text{ s} \leq t \leq (2k+1) \cdot 10,0 \cdot 10^{-3} \text{ s} - 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Proud je velmi blízko nulové hodnoty v okamžicích vyjádřených celkovou fází

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ a } (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$$

nebo časem

$$1,67 \cdot 10^{-3} \text{ s} + 2k \cdot 10,0 \cdot 10^{-3} \text{ s} \text{ a } (2k+1) \cdot 10,0 \cdot 10^{-3} \text{ s} - 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ s} .$$

(Kompletní, správný graf $i(t)$ nebo $i(\varphi)$)

3 body

d) Doba Δt , během které v každé periodě prochází obvodem proud vyplývá z rovnosti

$$\omega \Delta t = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{2\pi}{3} .$$

z toho

$$\Delta t = \frac{2\pi}{3\omega} \quad \text{pro dané hodnoty} \quad \Delta t = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ s} .$$

1 bod

e) Okamžik t_0 , jak se můžeme přesvědčit, náleží definičnímu oboru funkce proudu, neboť

$$0,32 \sin(100\pi \cdot 0,805) - 0,16 = 0,16 \geq 0 .$$

Proud v okamžiku t_0 dosahuje největší hodnoty 0,16 A. Napětí mezi svorkami diody, jestliže jí prochází proud, je $U_d = U_0 + R_d i(t)$. Dosazením výrazu (1) za $i(t)$ a úpravou dostaneme

$$U_d = \frac{R_d U_m \sin \omega t - (R_d U_e - r U_0)}{R_d + r} .$$

Pro dané hodnoty $U_d(0,805 \text{ s}) = 1,3 \text{ V}$, což je amplituda napětí na diodě.

1 bod

f) Střední hodnotu proudu procházejícího obvodem určíme integrací

$$I_s = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} i(\varphi) d\varphi .$$

Dosazením a výpočtem dostaneme

$$I_s = \frac{1}{2\pi} [-I_m \cos \varphi - I_0 \varphi]_{\pi/6}^{5\pi/6} = 0,0349 \text{ A} .$$

3 body

4. a) Aktivní filtr se skládá z pasivního dvojbranu RC, který se chová jako dolní propust, a operačního zesilovače zapojeného jako neinvertující zesilovač, který se vyznačuje velkým vstupním odporem a dolní propust prakticky nezatěžuje. Dvojbran a zesilovač jsou zapojeny do kaskády.

Napěťový přenos dvojbranu RC je

$$A_{u1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_m}},$$

kde $f_m = \frac{1}{2\pi RC}$ je mezní frekvence.

Napěťový přenos neinvertujícího zesilovače je

$$A_{u2} = 1 + \frac{nR}{R} = n + 1.$$

Výsledný napěťový přenos celého filtru je

$$A_u = A_{u1} A_{u2} = \frac{n + 1}{1 + j\frac{f}{f_m}}.$$

Pro absolutní hodnotu napěťového přenosu a pro fázové posunutí dostáváme

$$A_u = \frac{n + 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{f}{f_m}. \quad 4 \text{ body}$$

Diskuse:

(a) Pro $f \ll f_m$

$$A_u \doteq n + 1, \quad a \doteq 20 \log(n + 1), \quad \varphi \rightarrow 0.$$

(b) Pro $f = f_m$

$$A_u = \frac{n + 1}{\sqrt{2}}, \quad a = 20 \log(n + 1) - 3, \quad \varphi = -45^\circ.$$

(c) Pro $f \gg f_m$

$$A_u = \frac{(n + 1)f_m}{f} \rightarrow 0, \quad a = 20 \log[(n + 1)f_m] - 20 \log f, \quad \varphi \rightarrow -90^\circ.$$

S rostoucí frekvencí klesá napěťový přenos o 20 dB/dek.

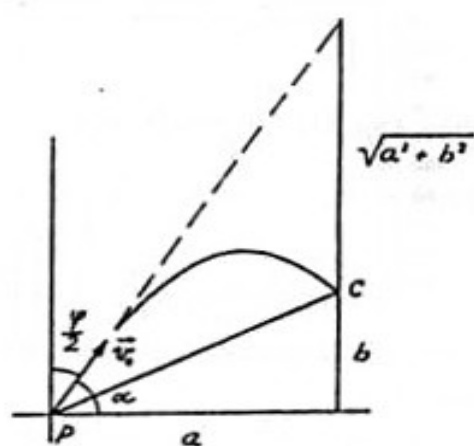
3 body

b) Pro dané hodnoty $f_m = 637 \text{ Hz}$. Při této frekvenci $A_u = 3,5$, $a = 11 \text{ dB}$.

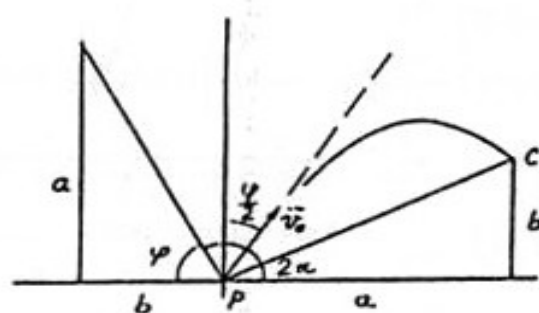
Absolutní hodnota napěťového přenosu, přenos v dB a fázové posunutí pro různé frekvence jsou v tabulce. Frekvenční charakteristiky jsou na obr. RA6. (Pro úplnost je uvedena i komplexní frekvenční charakteristika.)

3 body

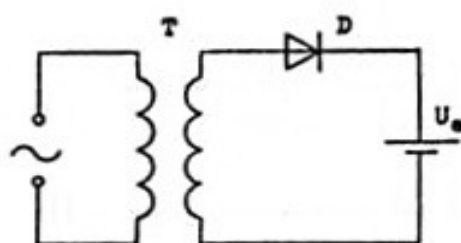
RA1



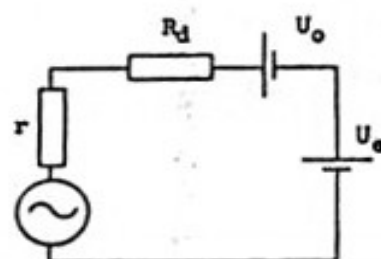
RA2



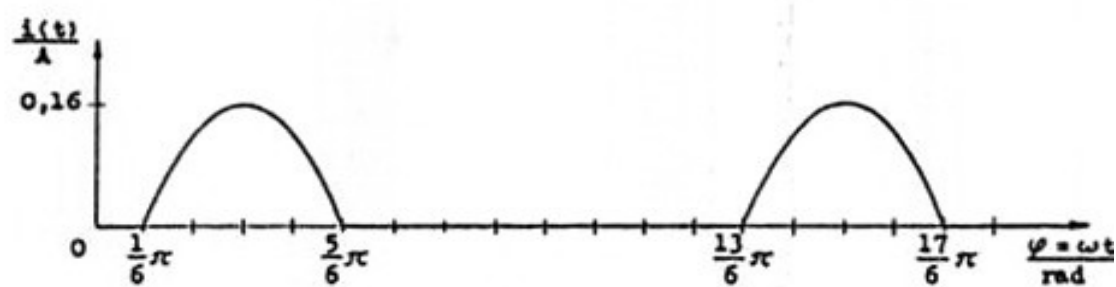
RA3



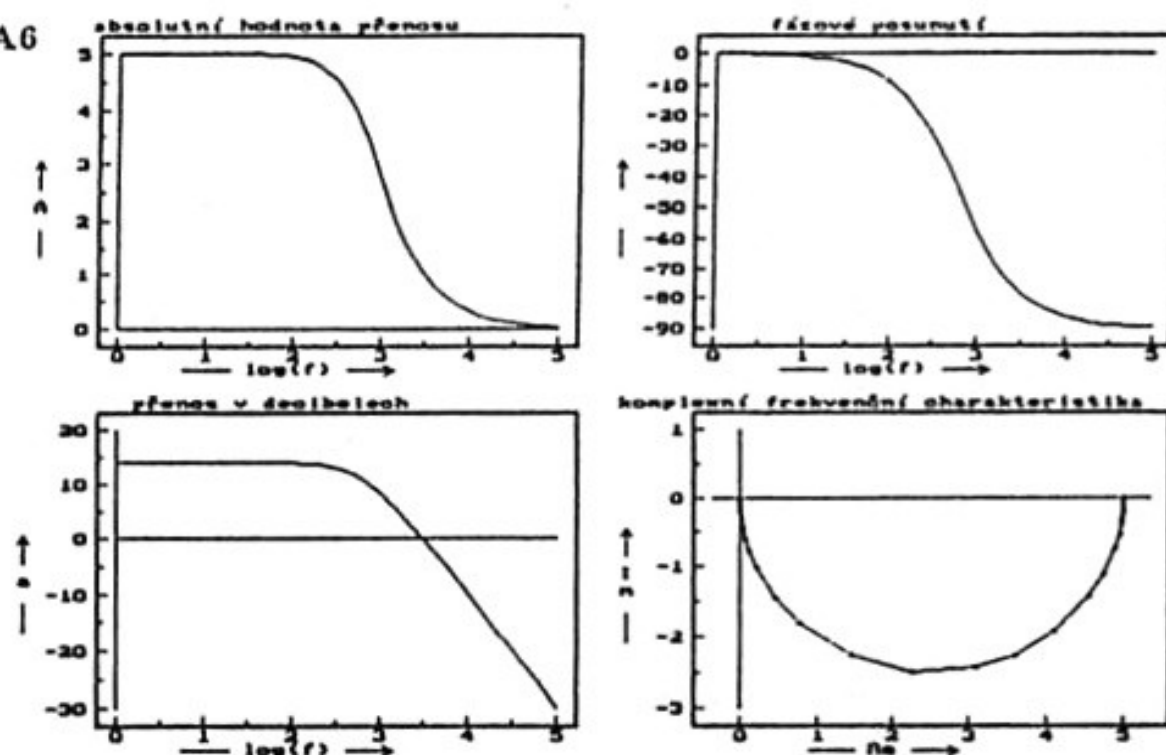
RA4



RA5



LA6



f	A	a	ϕ
1.0E+0	5.000E+0	1.380E+1	-9.9E-2
1.0E+0	5.000E+0	1.380E+1	-1.3E-1
2.0E+0	5.000E+0	1.380E+1	-1.0E-1
3.0E+0	5.000E+0	1.380E+1	-2.7E-1
4.0E+0	5.000E+0	1.380E+1	-9.6E-1
5.0E+0	5.000E+0	1.380E+1	-4.5E-1
7.0E+0	5.000E+0	1.380E+1	-6.3E-1
1.0E+1	4.800E+0	1.380E+1	-9.9E-1
1.5E+1	4.800E+0	1.380E+1	-9.9E-1
2.0E+1	4.800E+0	1.380E+1	-1.3E+0
3.0E+1	4.804E+0	1.387E+1	-1.0E+0
4.0E+1	4.809E+0	1.397E+1	-2.7E+0
5.0E+1	4.803E+0	1.396E+1	-3.6E+0
7.0E+1	4.879E+0	1.395E+1	-4.5E+0
1.0E+2	4.830E+0	1.393E+1	-6.3E+0
1.5E+2	4.867E+0	1.387E+1	-9.9E+0
2.0E+2	4.779E+0	1.374E+1	-1.3E+1
3.0E+2	4.523E+0	1.357E+1	-1.7E+1
4.0E+2	4.234E+0	1.311E+1	-2.5E+1
5.0E+2	3.832E+0	1.253E+1	-3.2E+1
7.0E+2	3.364E+0	1.109E+1	-9.9E+1
1.0E+3	2.865E+0	1.854E+1	-4.0E+1
1.5E+3	1.803E+0	8.370E+0	-5.9E+1
2.0E+3	1.317E+0	5.818E+0	-8.7E+1
3.0E+3	1.039E+0	3.817E+0	-7.2E+1
4.0E+3	7.859E-1	2.239E-1	-7.9E+1
5.0E+3	6.315E-1	-2.882E+0	-8.1E+1
7.0E+3	4.520E-1	-9.882E+0	-8.3E+1
1.0E+4	3.177E-1	-9.901E+0	-8.5E+1
1.5E+4	2.128E-1	-1.347E+1	-8.8E+1
2.0E+4	1.581E-1	-1.587E+1	-9.0E+1
3.0E+4	1.081E-1	-1.848E+1	-9.0E+1
4.0E+4	7.857E-2	-2.189E+1	-9.0E+1
5.0E+4	6.366E-2	-2.392E+1	-9.0E+1
7.0E+4	4.547E-2	-2.885E+1	-9.0E+1
1.0E+5	3.163E-2	-2.884E+1	-9.0E+1