

Řešení úloh 1. kola 35. ročníku FO, kat. A

1. úloha

Bez újmy na všeobecnosti budeme předpokládat, že kvapalina procházející vnitřní rourkou svou teplotu snižuje, t.j. $T_{i2} > T_{k2}$, tedy $T_{i1} < T_{k1}$. Obsah S průřezu toku kvapaliny v obou trubiciích je rovnaký. Rovnaké sú aj veľkosti rýchlosti prúdenia kvapalín, preto spád teploty (zmenšenie) v 2. rúrke od jej začiatku smerom ku koncu je rovnaký ako spád teploty v 1. rúrke výmeníka. Z toho vyplýva, že rozdiel teplôt medzi kvapalinami pozdĺž celého výmeníka je rovnaký

$$\Delta T = T_{i2} - T_{k1} = T_{k2} - T_{i1}. \quad (1)$$

2 body

Potom aj tepelný tok medzi kvapalinami v oboch rúrkach je stály a má hodnotu

$$q = kS_0(T_{i2} - T_{k1}), \quad (2)$$

2 body

kde S_0 je obsah plochy vnitřní rourky, na které dochází k tepelné výměně; $S_0 = 2\pi R d$, R je polomer vnitřní rourky $R = \sqrt{S/\pi}$. Tepelný tok sa využíva na zohrievanie kvapaliny prechádzajúcej vonkajšou rúrkou, t.j. kvapaliny s hmotnostným tokom $Q_m = \rho v S$, ktorej teplota sa zvýši z T_{i1} na T_{k1} . Preto

$$q = \rho v S c (T_{k1} - T_{i1}). \quad (3)$$

Z (2) a (3) úpravou máme

2 body

$$k2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}d(T_{i2} - T_{k1}) = \rho v S c (T_{k1} - T_{i1}).$$

Z tejto rovnice možno určiť T_{k1} a potom použitím vzťahu (1) aj T_{k2} :

$$T_{k1} = \frac{T_{i1}\rho v c \sqrt{S} + T_{i2}2kd\sqrt{\pi}}{\rho v c \sqrt{S} + 2kd\sqrt{\pi}}, \quad 2 \text{ body}$$

$$T_{k2} = \frac{T_{i2}\rho v c \sqrt{S} + T_{i1}2kd\sqrt{\pi}}{\rho v c \sqrt{S} + 2kd\sqrt{\pi}}, \quad 2 \text{ body}$$

2. úloha

- a) Při pohledu na kapku rosy směrem "proti Slunci" přicházejí do oka dva paprsky - paprsek odražený od povrchu kapky a jen málo zeslabený paprsek, který kapkou prochází a dvakrát se přitom láme (obr. RA1). Při pohledu směrem "od Slunce" vidíme jen paprsky odražené (obr. RA2). Odrazivost při kolmém odrazu je mnohem menší než při úhlu odrazu blízkém 90° . 2 body

- b) Vyděme z obr. RA1. Paprsek odražený od povrchu kapky do objektivu leží v rovině určené směrem "od Slunce" a osou objektivu. Úhel dopadu je $90^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Vzdálenost odraženého paprsku od středu kapky je $d_1 = R \cos \frac{\varphi}{2}$.
Pro $\varphi = 30^\circ$ dostáváme $d_1 = 0,966R$. 2 body

Paprsek, který se přes kapku láme do objektivu, splňuje vztahy

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\varphi}{2} = \alpha - \beta, \quad d_2 = R \sin \alpha,$$

kde α je úhel dopadu, β úhel lomu a d_2 vzdálenost lomeného paprsku od středu kapky. Úpravou dostaneme

$$\sin \alpha = n \sin \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) = n \sin \alpha \cos \frac{\varphi}{2} - n \cos \alpha \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n \sin \frac{\varphi}{2}}{n \cos \frac{\varphi}{2} - 1}.$$

Aby úloha měla řešení, musí platit $\cos \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{n}$; v případě vodní kapky $\varphi < 83^\circ$. Jestliže $\varphi = 30^\circ$, dostáváme pro červený konec spektra

$$\alpha_{\text{č}} = 50,5^\circ, \quad d_{2\text{č}} = 0,771R$$

a pro fialový konec spektra

$$\alpha_{\text{f}} = 49,5^\circ, \quad d_{2\text{f}} = 0,760R.$$

Disperze světla v důsledku různého indexu lomu je malá a na snímku se prakticky neprojeví. 4 body

Vzhled snímku znázorňuje obr. RA3. Na levé straně kapky září paprsek odražený v těsné blízkosti obrysu. Na pravé straně září paprsek lomený vzdálený od středu kapky přibližně tři čtvrtiny poloměru. 2 body

3. úloha

- a) Úhlová rychlost Venuše vzhledem k Zemi je $\omega_{\text{syn}} = \omega_v - \omega_z$, z čehož po substituci $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a úpravě dostaneme

$$T_v = \frac{T_{\text{syn}} T_z}{T_{\text{syn}} + T_z} = 0,6152 \text{ roku} = 224,7 \text{ d.} \quad 1 \text{ bod}$$

- b) Vzdálenost r_v Venuše od Slunce určíme z trojúhelníku SZV na obr. RA4:

$$r_v = r_z \sin \alpha = 0,7234 \text{ AU} = 108,2 \cdot 10^6 \text{ km.} \quad 1 \text{ bod}$$

- c) Průměrnou rychlost obou planet určíme z jejich oběžných dob:

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad v_v = 35,0 \text{ km.s}^{-1}, \quad v_z = 29,8 \text{ km.s}^{-1}. \quad 1 \text{ bod}$$

- d) Pro dostředivou sílu působící na planetu platí:

$$F_d = \frac{4\pi^2 r m}{T^2} = \kappa \frac{M m}{r^2}.$$

Z toho úpravou dostaneme pro obě planety:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2} \doteq 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg.} \quad 1 \text{ bod}$$

- e) Platnost 3. Keplerova zákona ověříme porovnáním:

$$\frac{r_v^3}{T_v^2} = \frac{r_z^3}{T_z^2} \doteq 3,4 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^2 \quad 1 \text{ bod}$$

f) Velká poloosa eliptické dráhy sondy má délku

$$a = \frac{r_v + r_z}{2} = 126,9 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Z 3. Keplerova zákona odvodíme:

$$T_{\text{sondy}} = T_z \sqrt{\frac{a^3}{r_z^3}} = 292 \text{ d}$$

a doba přiblížení sondy k Venuši je

$$t = \frac{T_{\text{sondy}}}{2} = 146 \text{ d}.$$

2 body

g) Zorné úhly Slunce vzhledem k Zemi a vzhledem k Venuši jsou

$$\alpha_z = \frac{2R}{r_z}, \quad \alpha_v = \frac{2R}{r_v}.$$

Po úpravě

$$\alpha_v = \alpha_z \frac{r_z}{r_v} = 44,2'.$$

1 bod

h) Solární konstantu můžeme určit pomocí vřahu $K = \frac{L}{4\pi r^2}$, kde L je zářivý výkon Slunce.

Solární konstanty Venuše a Země jsou v poměru $\frac{K_v}{K_z} = \frac{r_z^2}{r_v^2}$. Z toho $K_v = 2600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Mezi zářením dopadajícím ze Slunce na polovinu povrchu sondy a zářením vysílaným celým povrchem sondy je rovnováha. Z toho určíme průměrnou teplotu sondy:

$$K_v \pi R^2 = \sigma 4\pi R^2 T^4; \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4},$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{K_v}{4\sigma}} = 327 \text{ K} \sim 54^\circ \text{C}.$$

V důsledku skleníkového efektu je teplota povrchu Venuše vyšší asi o 430 K. 2 body

4. úloha

a) Mřížka sodíka je prostorovo stredená (obr. RA5). Do jednej elementárnej bunky patria $n = 2$ atómy. Pre dĺžku hrany a elementárnej bunky máme

$$a = \frac{4R_{Na}}{\sqrt{3}}.$$

Súčiniteľ zaplnenia mriežky sodíka potom je

$$f = \frac{n 4\pi R_{Na}^3}{3a^3} = \frac{\pi \sqrt{3}}{8} = 0,680. \quad 1,5 \text{ bodu}$$

b) Pre plošne stredenú kubickú mriežku striebra (obr. RA6) máme

$$a = \frac{4R_{Ag}}{\sqrt{2}},$$

do jednej elementárnej bunky však patria $n = 4$ atómy. Súčiniteľ zaplnenia mriežky striebra je

$$f = \frac{n 4\pi R_{Ag}^3}{3a^3} = \frac{\pi \sqrt{2}}{6} = 0,740. \quad 1,5 \text{ bodu}$$

- c) Pre hexagonálnu mriežku s najhustejším usporiadaním, v ktorej kryštalizuje horčík, máme

$$a = 2R_{Mg}, c = 4R_{Mg}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Objem elementárnej bunky je $V_0 = 24R_{Mg}^3 \cdot \sqrt{2}$. Do jednej elementárnej bunky patrí $n = 6$ atómov. Súčiniteľ zaplnenia mriežky horčíka je

$$f = \frac{6 \cdot 4\pi R_{Mg}^3}{3 \cdot 24R_{Mg}^3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,740. \quad 3 \text{ body}$$

Zaplnenie mriežky sodíka je najmenšie (68 %), zaplnenie mriežky striebra je rovnaké ako zaplnenie mriežky horčíka (74 %).

- d) Pre hustotu každého z uvedených kovov platí

$$\rho = \frac{nM_m}{N_A V_0},$$

kde n je počet atómov v jednej bunke, M_m je molová hmotnosť kovu, N_A je Avogadrova konštanta a V_0 je objem elementárnej bunky.

$$\rho_{Na} = \frac{3\sqrt{3}M_m N_A}{32N_A R_{Na}^3}. \quad 1 \text{ bod}$$

$$\rho_{Ag} = \frac{\sqrt{2}M_m A_g}{8N_A R_{Ag}^3}. \quad 1 \text{ bod}$$

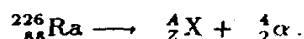
$$\rho_{Mg} = \frac{M_m M_g}{4\sqrt{2}N_A R_{Mg}^3}. \quad 1 \text{ bod}$$

Pre dané hodnoty máme $\rho_{Na} = 970 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{Ag} = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{Mg} = 1750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

- e) Pre fyzikálne interpretácie majú uvedené predstavy zmysel. Potvrdzuje to napr. skutočnosť, že polomery atómov vypočítané pre tzv. αFe /prostorovo stredená kubická štruktúra kovu pri teplotách do 910°C , $a = 0,286 \text{ nm}$) vedú u tzv. γFe (plošne stredená štruktúra, na ktorú sa premení αFe pri zohriatí nad teplotu 910°C) k hodnote mriežkovej konštanty $a = 0,357 \text{ nm}$. Uvedenú mriežkovú konštantu pri daných teplotách Fe skutočne možno namerať. Tento fenomén možno sledovať a využiť u všetkých kovov, ktorých štruktúra je závislá od teploty. 1 bod

5. úloha

- a) Štruktúrne vyjadrenie rozpadovej reakcie je



Z rovníc $226 = A + 4$, $88 = Z + 2$ dostaneme $A = 222$, $Z = 86$. Ide o nuklid radón ${}_{86}^{222}\text{Rn}$, ktorý sa dostáva do základného stavu, teda k emisii gama – fotónu nedochádza. (Pri menšej energii častice α je tento rozpad doprevádzaný aj emisiou gama – kvanta.)

2 body

- b) Pokojová energia častice α

$$E_0 = m_0 c^2 = 4,003 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ J} \approx 6,0 \cdot 10^{-10} \text{ J} \approx 3700 \text{ MeV}$$

je skoro tisíc raz väčšia ako energia kinetická. Môžeme preto pracovať so vzťahmi platnými v klasickej mechanike. 2 body

c) Pre kinetickú energiu častice α platí

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Po úprave z týchto vzťahov máme

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,52 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad p = \sqrt{2mE} = 10,3 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad 3 \text{ body}$$

d) Hybnosť nuklidu radónu má rovnakú veľkosť ako hybnosť častice α , avšak opačný smer. Preto platí

$$E_{Rn} = \frac{p^2}{2m_{Rn}} = 0,09 \text{ MeV}, \quad v_{Rn} = v \frac{m}{m_{Rn}} = 2,74 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad 2 \text{ body}$$

e) Celková energia uvoľnená pri tomto rozpade je rovná súčtu kinetických energií častice α a jadra atomu:

$$E_c = E + E_{Rn} = 4,87 \text{ MeV}. \quad 1 \text{ bod}$$

7. úloha

Pro uzel u invertujúceho vstupu OZ platí podľa prvého Kirchhoffova zákona $i_2 = -i_1$. Preto i fázory obou proudů jsou opačné:

$$i_2 = -i_1, \quad \frac{U_o}{Z_2} = -\frac{U_i}{Z_1}$$

Z toho odvodíme

$$A_u = \frac{U_o}{U_i} = -\frac{\frac{nR}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{n}{1 + j\omega nRC} \quad 2 \text{ body}$$

Zavedením mezní úhlové frekvence $\omega_m = \frac{1}{nRC}$ a mezní frekvence $f_m = \frac{1}{2\pi nRC}$ dostaneme

$$A_u = -\frac{n}{1 + j\frac{f}{f_m}} \quad (4)$$

Absolutní hodnotu napětového přenosu a fázové posunutí určíme ze vztahů

$$A_u = \frac{n}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}}, \quad \text{tg } \varphi = -\frac{f}{f_m}, \quad \varphi = 180^\circ - \text{arctg } \frac{f}{f_m} \quad (5)$$

3 body

Diskuse:

a) Při nízkých frekvencích $f \ll f_m$ platí

$$A_u \approx n, \quad \text{tg } \varphi \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 180^\circ$$

Výstupní napětí má n krát větší amplitudu než napětí vstupní a opačnou fázi.

b) Při mezní frekvenci f_m platí

$$A_u = \frac{n}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -1, \quad \varphi = 135^\circ.$$

c) Pro vysoké frekvence $f \gg f_m$ platí

$$A_u \doteq j \frac{n f_m}{f}, \quad A_u \doteq \frac{n f_m}{f}, \quad \varphi \rightarrow 90^\circ, \quad a = 20 \log n + 20 \log f_m - 20 \log f.$$

Napěťový přenos s rostoucí frekvencí klesá o 20 dB na dekádu, výstupní napětí předbíhá před vstupním přibližně o 1/4 periody 2 body

Výsledkům diskuse odpovídá průběh frekvenčních charakteristik na obr. RA7. Aktivní filtr se chová jako dolní propust s mezní frekvencí f_m . Signály o frekvenci nižší než f_m jsou n krát zesíleny. Komplexní frekvenční charakteristika je půlkružnice v 2. kvadrantu Gaussovy roviny.

Pro dané hodnoty dostáváme $f_m = 320 \text{ Hz}$, $a_0 = 14 \text{ dB}$.

1 bod

RA7

