Ústřední výbor fyzikální olympiády České republiky
sekretariát v Hradci Králové

FO – 34 – C – II – 1

Řešení

a) Síly F_D, F_E, kterými působí obě přední kola a obě zadní kola na vozovku, jsou stejně velké jako reakce vozovky. Z podmínek rovnováhy plyne

$$F_E + F_D = F_{G1} + F_{G2} ,$$

$$F_E b - F_{G1} a - F_{G2}(b + x) = 0$$

(momentová věta pro osu v bodě O). Dále požadujeme

$$F_E = 2F_D .$$ 2 body

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$x = \frac{F_{G1}(2b - 3a) - F_{G2}b}{3F_{G2}} = \frac{m_1(2b - 3a) - m_2 b}{3m_2} ,$$ 2 body

numericky $x = 1{,}5$ m. 1 bod

b) Síly F_D', F_E', kterými působí obě přední kola a obě zadní kola zatíženého autojeřábu na vozovku, jsou stejně velké jako reakce vozovky. Z podmínek rovnováhy plyne

$$F_E' + F_D' = F_{G1} + F_{G2} + F_{G3} ,$$

$$F_{G3}c - F_{G1}a - F_{G2}(b + x) + F_E'b = 0$$

(momentová věta pro osu v bodě O). Dále požadujeme

$$F_D' = 2F_E' .$$ 2 body

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$F_{G3} = \frac{(F_{G1} + F_{G2})b}{3c + b} , \quad m_3 = \frac{(m_1 + m_2)b}{3c + b} ,$$ 2 body

numericky $m_3 = 1{,}4$ t. 1 bod

Protizávaží musíme umístit za zadní nápravu do vodorovné vzdálenosti 1,5 m. Jeřáb pak může zvedat břemena do hmot-

Řešení

a) Musíme určit povrchové napětí σ kapaliny. Vystoupí-li kapalina v kapiláře do výšky h, potom platí rovnost tíhové a povrchové síly působící na sloupec kapaliny:

$$\pi \frac{d_1^2}{4} \rho g h = \pi d_1 \sigma \cos \vartheta ,$$

odtud:

$$\sigma = \frac{d_1}{4} \frac{\rho g h}{\cos \vartheta} . \qquad \text{2 body}$$

Stejnou podmínku užijeme i pro určení výšky h' v prostoru mezi kapilárou a trubicí. Tíhová síla působící na kapalinu je:

$$F_G = \frac{\pi}{4} \left[d_2^2 - (d_1 + 2x)^2 \right] \rho g h' . \qquad \text{1 bod}$$

Povrchová síla působící na kapalinu je dána vztahem:

$$F = \pi d_2 \sigma \cos \vartheta + \pi (d_1 + 2x) \sigma \cos \vartheta . \qquad \text{1 bod}$$

Z rovnosti obou sil plyne po úpravě a po dosazení za σ :

$$h' = \frac{d_1}{d_2 - d_1 - 2x} h \qquad \text{1 bod}$$

$$h = 2{,}4 . 10^{-2} \text{ m} . \qquad \text{1 bod}$$

b) Výšku h_1 v kapiláře určíme z podmínky rovnosti tíhové a povrchové síly:

$$\pi \frac{d_1^2}{4} \rho_1 g h_1 = \pi d_1 \sigma_1 \cos \vartheta_1 \text{ , odtud}$$

$$h_1 = \frac{4 \sigma_1 \cos \vartheta_1}{d_1 \rho_1 g} , \quad h_1 = 3{,}0 . 10^{-2} \text{ m} . \qquad \text{2 body}$$

Obdobným způsobem určíme i výšku h_2 mezi kapilárou a trubicí:

$$h_2 = \frac{4 \sigma_1 \cos \vartheta_1}{\rho_1 g (d_2 - d_1 - 2x)} , \quad h_2 = 6{,}0 . 10^{-2} \text{ m} . \qquad \text{2 body}$$

V prostoru mezi kapilárou a trubicí vystoupí kapalina do výšky 24 mm. Voda vystoupí v kapiláře do výšky asi 30 mm , v prostoru mezi kapilárou a trubicí do výšky asi 60 mm .

FO - 34 - C - II - 3

a) Při spojení dvou kapek tvaru koule vznikne větší kapka také tvaru koule, většího poloměru. Přitom se zmenší povrch, a tedy povrchová energie, zvětší se poloměr, tedy zvýší se těžiště. Zvětší se vnitřní energie soustavy, a tedy i teplota, zvětší objem. Předpokládáme, že některé změny jsou zanedbatelně malé. Budeme uvažovat změny vnitřní energie a změny povrchové energie.

1 bod

b) Úloha je speciálním případem úlohy d/ pro N = 2.

c) Povrchová energie se snižuje, vnitřní energie se zvyšuje, změna vnitřní energie je kladné číslo, teplota vody se nepatrně zvýší.

1 bod

d) Řešíme obecně pro N kapek. Platí zákon zachování objemu vody před a po vytvoření jedné kapky:

$$\frac{4}{3}\pi r_N^3 N = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \quad \Longrightarrow \quad r_N = r_0 N^{-\frac{1}{3}}$$ 1 bod

Využijeme zákona zachování energie - součet změn povrchové a vnitřní energie je roven nule:

$$\Delta U = m.c.\Delta T = \frac{4}{3}\rho\pi r_0^3 c\,\Delta T$$ 1 bod

$$\Delta E = 4\pi\sigma\,(r_0^2 - N r_N^2) = 4\pi\sigma\, r_0^2\,(1 - N^{\frac{1}{3}})$$ 1 bod

$\Delta U + \Delta E = 0$, odtud $$\Delta T = \frac{3\sigma(N^{\frac{1}{3}} - 1)}{r_0\rho c}$$ 3 body

Pro $N = 1{,}0.10^6$ $\Delta T = 2{,}6.10^{-3}$ K 1 bod

Pro $N = 2$ $\Delta T = 6{,}8.10^{-6}$ K 1 bod

FO - 34 - C - II - 4

Celkem: 10 bodů

Řešení

a) Práce, kterou plyn vykoná během děje AB, je číselně rovna obsahu plochy pod úsečkou AB:

$$W = 2V_0 p_0 + \frac{1}{2}\,4p_0 2V_0 = 6p_0 V_0\ , \quad W = 6{,}0.10^2\,\mathrm{J}\ .$$ 2 body

b) Podle grafu závislost tlaku na objemu je dána vztahem:

$$p = -\frac{2p_0}{V_0}\,V + 7p_0 \qquad \text{pro } V \in \langle V_0,\ 3V_0\rangle\ .$$ 1 bod

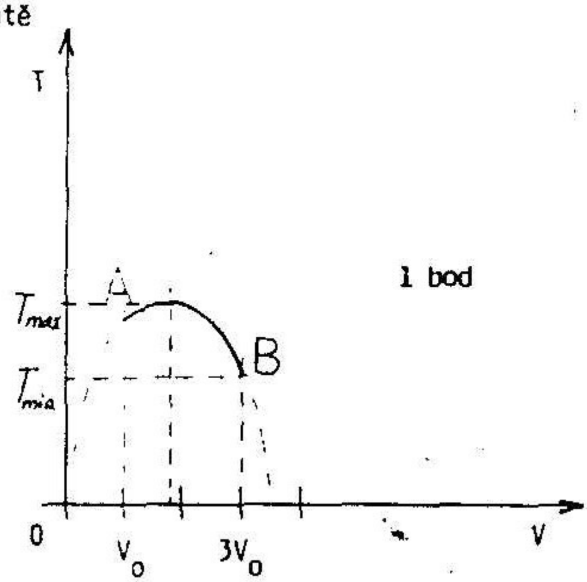
Vztah pro p dosadíme do stavové rovnice pVT^{-1} = konst., odtud

$$T = \frac{\frac{-2p_0}{V_0}V^2 + 7p_0 V}{\text{konst.}}$$ 1 bod

Grafem této závislosti je parabola /viz.obr./.

Z grafu je patrné, ža maximální teplota je pro $V_1 = 7/4.V_0$, této hodnotě odpovídá tlak $p_1 = 7/2.p_0$.

Maximální teplotu určíme ze stavové rovnice:



$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T_{max}} \text{ , odtud}$$

$$T_{max} = T_0\frac{\frac{7}{2}p_0\,\frac{7}{4}V_0}{p_0V_0} = \frac{49}{8}\,T_0 \doteq$$

$$\doteq 6{,}1T_0 \doteq 1\,800 \text{ K .}$$ 1 bod

1 bod

Z grafu rovněž určíme, že minimální teplota je ve stavu B . Potom teplotu $T_B = T_{min}$ určíme obdobně ze stavové rovnice:

$$T_{min} = T_0\,\frac{p_0 3V_0}{p_0V_0} = 3T_0 = 9{,}0.10^2\text{K .}$$ 1 bod

Teplo přijaté plynem určíme z 1. termodynamického zákona:

$$\Delta U = -\,W + Q$$ 1 bod

Za předpokladu ideálního plynu je změna vnitřní energie rovna změně kinetické energie N částic jednoatomového plynu:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\,Nk\,(T_B - T_A) \quad ;$$

součin Nk určíme ze stavové rovnice: $Nk = p_0V_0T_0^{-1}$, za teploty T_A a T_B dosadíme rovněž ze stavové rovnice. Dosazením určíme:

$$\Delta U = -\,3p_0V_0 \quad .$$

Teplo přijaté plynem potom je:

$$Q = \Delta U + W = -\,3p_0V_0 + 6p_0V_0 = 3p_0V_0 \quad .$$ 1 bod

$$Q = 3{,}0.10^2 \text{ J} \quad .$$ 1 bod

Plyn vykoná práci $6{,}0.10^2$J , přijme teplo $3{,}0.10^2$ J a vnitřní energie se sníží o $3{,}0.10^2$ J .

Celkem: 10 bodů