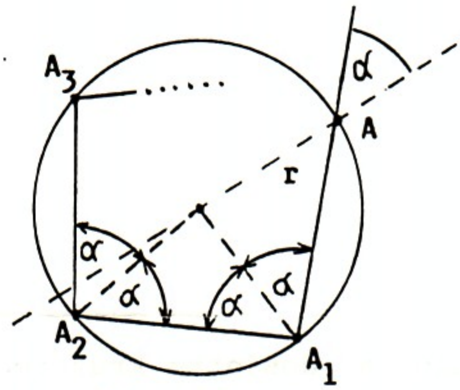
Riešenie úloh FO-34-A2

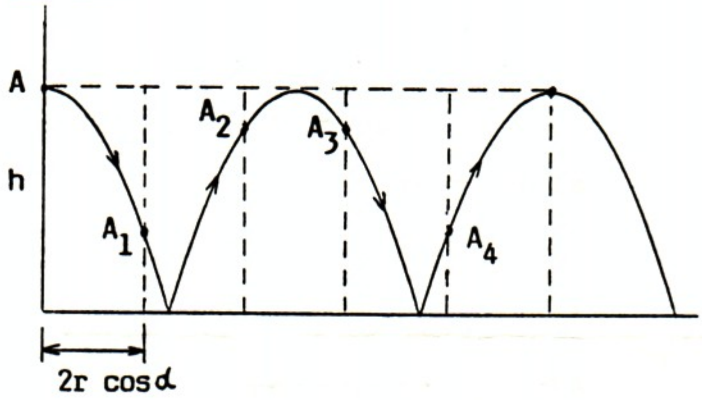
1. úloha

a) Guľôčka po prejdení bodom A bude konať pohyb zhodný s vodorovným vrhom, pričom horizontálna zložka rýchlosti má veľkosť v. Predpokladáme, že steny, dno nádoby i gulôčka sú dokonale pružné. Valivý pohyb guľôčky neuvažujeme.

Zo zákona zachovania hybnosti vyplýva, že guľôčka počas svojho pohybu si zachová veľkosť v horizontálnej zložky rýchlosti. Pri odrazoch na stene i dne nádoby sa zachová pri každom odraze aj veľkosť vertikálnej zložky rýchlosti. Pravda, vertikálna zložka rýchlosti medzi odrazmi rastie alebo klesá priamo úmerne s časom podľa toho, či guľôčka padá do valca, alebo stúpa po odraze od dna.



Obr. RA - 1



Obr. RA - 2

Označme body odrazu guľôčky so stenou nádoby A_1, A_2, A_3,... Pri pohľade z vrchu sa pohyb deje tak, ako je to znázornené na obr. RA - 1. Vzdialenosti $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = $ $= \ldots$, čo platí pred odrazom i po odraze od dna. Ak tento pohyb rozvinieme do jednej roviny, možno si ho predstaviť ako pružný odraz od dna nádoby s vertikálnou zložkou rýchlosti $v_1 = \sqrt{(2gh)}$ a horizontálnou v. Takto rozvinutá trajektória má tvar paraboly s najvyšším bodom v ústi nádoby, obr. RA - 2. Po každom odraze od dna a odrazoch na stenách dosiahne guľôčka výšku h. Vyskočiť z nádoby má však šancu len vtedy, ak dosiahne najvyšší bod trajektórie na kružnicovom okraji ústia nádoby. Fyzikálna podmienka vzniku takejto situácie je nasledovná: celistvý násobok n doby t_1 medzi dvoma po sebe idúcimi odrazmi od steny nádoby musí byť rovný celistvému násobku k doby t_2, za ktorú guľôčka prejde na dno a vráti sa k ústiu nádoby. /3b/

b) Ako vyplýva z predchádzajúceho, doba t_1 medzi každými dvomi po sebe idúcimi odrazmi guľôčky od steny je

$$t_1 = 2\ r \cos \alpha\ /\ v, \qquad /2b/$$

doba t_2, za ktorú padne guľôčka na dno a vráti sa k ústiu nádoby

$$t_2 = 2 \sqrt{(2h/g)}. \qquad /2b/$$

Aby guľôčka mohla z nádoby vyskočiť (práve dosiahne okraj ústia nádoby) musí byť splnená podmienka

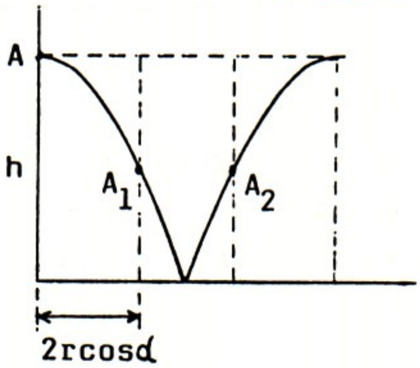
$$n\ t_1 = k\ t_2,$$

kde n a k sú celé čísla, t.j.

$$n\ r \cos \alpha\ /v = k \sqrt{(2h/g)}$$

alebo tiež

$$n/k = \frac{v \sqrt{(2h/g)}}{r \cos \alpha}\ . \qquad /2b/\ (1)$$



Obr. RA - 3

Guľôčka dosiahne kružnicový okraj ústia nádoby po odrazoch vyjadrených najmenšími celými číslami n, k splňujúcimi podmienku (1).

c) Dosadením hodnôt máme n/k ≈ 1,5 = 3/2. Guľôčka vykoná dva (n - 1) odrazy od steny a dva (k) odrazy od dna, aby splnila uvedenú podmienku, obr. RA - 3. /1b/

2. úloha

a) Predpokladajme, že vo výške h nad povrchom planéty je tlak atmosféry p a hustota atmosféry s. Zmene výšky dh zodpovedá zmena tlaku dp

$$dp = - s\, g\, dh. \qquad /1b/ \ (1)$$

Zo stavovej rovnice možno vyjadriť tlak atmosféry

$$p = \frac{s}{M_m} R\, T, \qquad /1b/ \ (2)$$

kde R je všeobecná plynová konštanta.

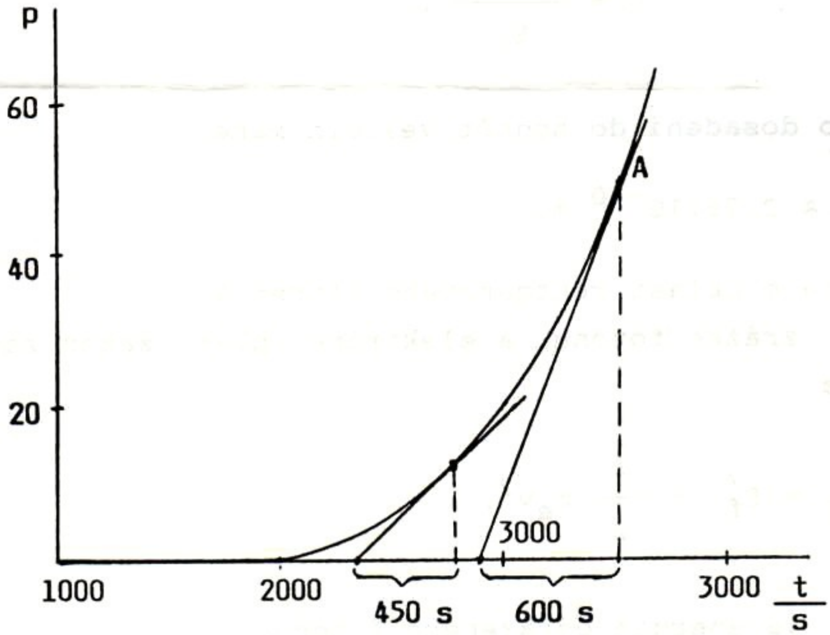
Z výrazov (1) a (2), po vylúčení hustoty s, máme

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g\, M_m\, dh}{R\, T}.$$

Ak však zoberieme do úvahy dh = - v dt, potom po dosadení a úprave ostatného výrazu dostaneme

$$v = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \frac{R\, T}{M_m\, g}. \qquad /4b/ \ (3)$$

Z informácií, ktoré získala sonda na povrchu planéty a hodnôt získaných z bodu A grafu $dp/(p\, dt) \approx 1/600\ s^{-1}$ máme $v \approx 22\ m.s^{-1}$, obr. RA - 4. /1b/



Obr. RA - 4

b) Teplotu atmosféry vo výške h_1 = 15 km určíme z výrazu (3), lebo už poznáme veľkosť v rýchlosti pohybu sondy. Celková doba pohybu sondy činila (obr. RA -4) $t_0 \approx 3\ 500$ s, vo výške h_1 = 15 km bola sonda v čase $t \approx t_0 - t_1$, kde $t_1 = h_1/v \approx 700$ s. Potom $t \approx 2\ 800$ s. Z grafu na obr. RA - 4 určíme veličinu p dt/dp ≈ 450 s pre čas t. Spolu s ostatnými veličinami ju dosadíme do vzťahu

$$T = g \left(p \frac{dt}{dp}\right) \frac{M_m v}{R}, \qquad /2b/$$

dostaneme výsledok T ≈ 520 K. /1b/

Pozn.: Zá správny výsledok pre dané hodnoty považujeme výsledok určený na dve platné číslice, pričom môže byť rozdiel o jednotku v najnižšom ráde veličiny.

3. úloha

a/ Pre energiu E_f dopadajúceho fotónu platí

$$E_f = h \nu = \frac{h c}{\lambda}$$

z toho vlnová dĺžka fotónu

$$\lambda = \frac{h c}{E_f} .$$

Po dosadení do hodnôt veličín máme

$\lambda \approx 2{,}76.10^{-10}$ m. /1b/

Ide o oblasť röntgenového žiarenia.

b/ Pri zrážke fotónu a elektrónu platí zákon zachovania energie

$$E_f = E_f' + \frac{1}{2} m_e v^2, \qquad /2b/\ (1)$$

kde E_f' je energia odrazeného fotónu.

Nakoľko hybnosť fotónu pred zrážkou s elektrónom je

$$p = m c = \frac{E_f}{c}$$

zo zákona zachovania hybnosti vyplýva

$$\frac{E_f}{c} = m_e v - \frac{E_f'}{c}, \qquad /2b/ \ (2)$$

kde $-E_f'/c$ je hybnosť fotónu po zrážke s elektrónom.
Zo vzťahov (1), (2) dostaneme

$$\frac{E_f}{c} = m_e v - \frac{1}{c}\left(E_f - \frac{1}{2} m_e v^2\right).$$

Za predpokladu, že $v \ll c$ z posledného výrazu pre rýchlosť elektrónu máme

$$v \approx \frac{2 E_f}{m_e c}. \qquad /1b/ \ (3)$$

Pre dané hodnoty veličín máme

$$v \approx 5{,}27.10^6 \ m.s^{-1}.$$

Energia E elektrónu

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{2 E_f^2}{m_e c^2}, \quad E \approx 1{,}26.10^{-17} J. \qquad /1b/ \ (4)$$

c/ Relatívna zmena vlnovej dĺžky fotónu

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{E_f - E_f'}{E_f} = \frac{2 E_f}{m_e c^2 - 2 E_f}. \qquad /1b/ \ (5)$$

Po dosadení hodnôt veličín máme

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 1{,}79.10^{-2}, \text{ t.j. } 1{,}79 \ \%.$$

Nakoľko $v = 5{,}28.10^6.m.s^{-1}$ je skutočne oveľa menšie ako c, nebolo potrebné použiť relativistické vzťahy. /1b/

Úloha je špeciálnym prípadom Comptonovho rozptylu. Pre určenie relatívnej zmeny vlnovej dĺžky možno použiť priamo výraz

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\,h}{m_e\,c}, \qquad /1b/$$

ak uvážime, že fotón sa odrazil pod uhlom 180 ^{0}. V tomto prípade pre dané hodnoty dostaneme $\Delta\lambda/\lambda \approx 1{,}76$ %.

V prípade väčšej energie fotónu je potrebné vzťahy (1) a (2) prepísať do relativistického tvaru

$$h\,\nu + m_e\,c^2 = h\,\nu' + \frac{m_e\,c^2}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}, \qquad (1a)$$

$$\frac{h\,\nu}{c} = \frac{m_e\,v}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}} - \frac{h\,\nu'}{c}. \qquad (2a)$$

Ich riešením dospejeme k výsledku

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\,h}{m_e\,c}. \qquad (5a)$$

Ak vychádzame z tohto výsledku pre dané hodnoty máme $\Delta\lambda/\lambda \approx 1{,}76$ %.

Pri relativistickom výpočte dostaneme pre rýchlosť v elektrónu po zrážke

$$v = \frac{2\,E_f}{\sqrt{[m_e(2\,E_f + m_e\,c^2)]}} \qquad (3a)$$

a energiu E elektrónu výsledok

$$E = \frac{2\,E_f{}^2}{2\,E_f + m_e\,c^2}. \qquad (4a)$$

Dosadením do týchto výrazov máme $v \approx 5{,}22.10^6$ m.s^{-1}, $E \approx 1{,}24.10^{-17}$ J, čo sú výsledky približne zhodné s výsledkami dosiahnutými klasickým výpočtom. Výsledky (3a), (4a) v prípade $m_e\,c^2 \gg 2\,E_f$ sa redukujú na výsledky (3), (4).

Pozn. k hodnoteniu: pri relativistickom výpočte a požadovaných výsledkoch (3a) až (5a) získava riešiteľ plný počet bodov. Pri klasickom postupe vyžadujeme po výpočte rýchlosti v konštatovanie v « c, čo oprávňuje takýto postup.

4. úloha

a) Obvod funguje jako napěťový delič - lineární dvojbran s napěťovým přenosem

$$\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_1} = \left[1 + \frac{L_r}{L_1} + \frac{R_1}{R_z} + j\left(\frac{\omega L_r}{R_z} - \frac{R_1}{\omega L_1}\right)\right]^{-1}. \qquad /1b/$$

Napěťový přenos je reálny (fázové posunutí ϕ_s je nulové) a má maximální absolutní hodnotu, jestliže

$$\frac{\omega_s L_r}{R_z} - \frac{R_1}{\omega_s L_1} = 0.$$

Z toho

$$\omega_s = \sqrt{\left(\frac{R_1 R_z}{L_1 L_r}\right)}. \qquad /1b/$$

Pro dané hodnoty $\omega_s \approx 3230\ s^{-1}$, $f_s \approx 514$ Hz.

Na zatěžovacím odporu bude přitom napětí

$$U_{2m} \approx \frac{U_1}{1 + \frac{L_r}{L_1} + \frac{R_1}{R_z}}. \qquad /1b/$$

Pro dané hodnoty $U_{2m} \approx 19{,}9$ V.

b), c) Napětí U_2 se pro mezní úhlovou frekvenci zmenší na $U_{2m}/\sqrt{2}$, jestliže komplexní výraz ve jmenovateli a), d) má stejně velkou reálnou a imaginární část

$$\left|1 + \frac{L_r}{L_1} + \frac{R_1}{R_z}\right| = \left|\frac{\omega L_r}{R_z} - \frac{R_1}{\omega L_1}\right|.$$

Z toho dostaneme dvě rovnice.

$$1 + \frac{L_r}{L_1} + \frac{R_1}{R_z} = \pm\left(\frac{\omega L_r}{R_z} - \frac{R_1}{\omega L_1}\right) \qquad /1b/$$

Úpravou první

$$1 + \frac{L_r}{L_1} + \frac{R_1}{R_z} = \frac{\omega L_r}{R_z} - \frac{R_1}{\omega L_1}$$

dostaneme kvadratickou rovnici pro ω a výpočtem

$$\omega_d = \frac{-L_1R_z - L_rR_z - L_1R_1 + \sqrt{[L_1R_z + L_rR_z + L_1R_1)^2 + 4R_1R_zL_rL_1]}}{2\ L_1L_r} \qquad /1b/$$

Úpravou druhé rovnice

$$1 + \frac{L_r}{L_1} + \frac{R_1}{R_z} = -\left(\frac{\omega L_r}{R_z} - \frac{R_1}{\omega L_1}\right)$$

dostaneme rovněž kvadratickou rovnici pro ω a její řešením

$$\omega_d = \frac{L_1R_z + L_rR_z + L_1R_1 + \sqrt{[L_1R_z + L_rR_z + L_1R_1)^2 + 4R_1R_zL_rL_1]}}{2\ L_1L_r} \qquad /1b/$$

Pro dané hodnoty

$\omega_d \approx 138\ s^{-1}$, $f_d \approx 22$ Hz, $\phi_d \approx 45\ ^0$, $\omega_h \approx 75\ 500\ s^{-1}$, $f_h \approx$ $\approx 12\ 000$ Hz, $\phi_h \approx -45\ ^0$.

d) Při nízkých frekvencích $f \ll f_s$ můžeme zanedbat vliv rozptylové indukčnosti L_r a použít schéma podle obr. RA - 5. Pak platí

$$\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_1} \approx \left(1 + \frac{R_1}{R_z} - j\,\frac{R_1}{\omega L_1}\right)^{-1}. \qquad /1b/$$

Pro dolní mezní frekvenci z toho platí

$$\omega_d \approx \frac{1}{L_1}\,\frac{R_1\ R_z}{R_1 + R_z}\ . \qquad /1b/$$

Pro dané hodnoty $\omega_d \approx 139\ s^{-1}$, $f_d \approx 22$ Hz, $\phi_d \approx 45\ ^0$.

e) Při vysokých frekvencích $f \gg f_s$ můžeme zanedbát vliv indukčnosti L_1 a použít schéma podle obr. RA - 6. Pak platí

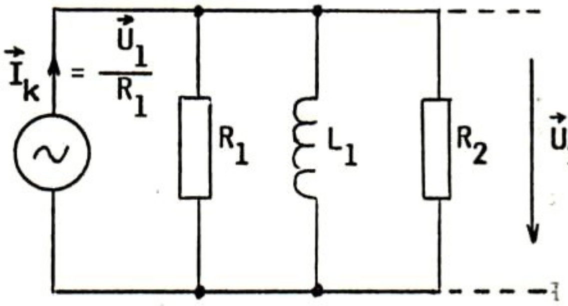
$$\frac{\vec{U}_2}{\vec{U}_1} \approx \frac{R_z}{R_z + R_1 + j\,\omega\, L_r} . \qquad /1b/$$

Pro horní mezní frekvenci z toho platí

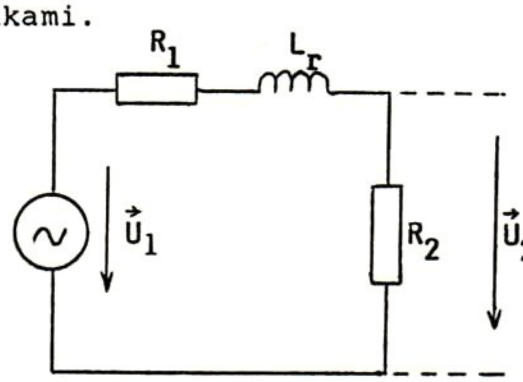
$$\omega_h \approx \frac{R_1 + R_z}{L_r} . \qquad /1b/$$

Pro dané hodnoty $\omega_h \approx 75\,000\ s^{-1}$, $f_h \approx 11\,900$ Hz, $\phi_h \approx -45^0$.

Výsledky získané přibližným výpočtem v d) a e) se dobře shodují s předcházejícími výsledkami.



Obr. RA - 5



Obr. RA - 6

Podmienkou pridelenia 1 bodu v časti d) a 1 bodu v časti e) je nakreslenie náhradnej (zjednodušenej) schémy - obr. RA - 5, obr. RA - 6.

Inštruktážne riešenia vydal ÚV FO ČSFR v decembri 1992 vo vydavateľstve PROTON v Nitre.

Úlohy navrhli: RNDr. Přemysl Šedivý, doc.RNDr.Arpád Kecskés, CSc., doc.RNDr.Ing.Daniel Kluvanec, CSc.

Za správnosť inštruktážnych riešení zodpovedá: doc.RNDr.Ing.Daniel Kluvanec, CSc.

Recenzia riešení: doc.RNDr.Ivo Volf, CSc., RNDr.Karel Sandler, CSc., doc.RNDr.Arpád Kecskés, CSc., RNDr.Ľubomír Zelenický.