SKALÁRY, VEKTORY, ...

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Miroslava Jarešová – Ivo Volf

Obsah

Úvod

Se skaláry, vektory a tenzory se ve fyzice setkáváme v řadě matematických úvah a vztahů. Umožňují přehledné a stručné vyjadřování fyzikálních myšlenek. V tomto textu se zaměříme jednak na popis těchto veličin, dále také na operace, které je možno s těmito veličinami provádět a především pak na jejich užití ve fyzice.

Nyní se podíváme na stručnou charakteristiku těchto veličin, a pak už podrobněji na práci s těmito veličinami.

Skaláry

Jsou první veličiny, se kterými jste se ve fyzice setkali. Jsou nejjednodušším typem fyzikální veličiny. Skalár se skládá z čísla a fyzikální jednotky. Mezi skaláry patří např. termodynamická teplota (100 K), délka (10 m), objem (2 m^3), ale i hmotnost (3 kg) a řada dalších (kterých?)...

Skaláry je možno zobrazit pomocí stupnice, i vlastní slovo *skalár* je odvozeno ze slova *scale* (stupnice). Zobrazení skalárních veličin pomocí stupnic má nezanedbatelný význam především při konstrukci měřicích přístrojů. Rovněž „pouhé“ zobrazení skalárních veličin na přímce má své využití – při grafickém vynášení funkčních závislostí mezi skalárními veličinami.

Vektory

Vektory jsou fyzikální veličiny, které jsou kromě velikosti určeny také směrem. V psaném textu a obrázcích (např. při zápisu z tabule do sešitu) označujeme vektor šipkou nad příslušným písmenem. V tištěném textu se vektory nejčastěji označují polotučnou kurzívou (např. $\boldsymbol{v}$). Mezi vektorové veličiny patří např. okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$, síla $\boldsymbol{F}$, ale i řada dalších (vzpomenete si?)...

Tenzory

Patří mezi fyzikální veličiny, které mají složitější strukturu než vektory. Obecně není názorná interpretace tenzorů možná, ale je možné si ji ukázat alespoň na několika konkrétních příkladech. Mezi tenzorové veličiny patří např. tenzor napětí nebo tenzor deformace.

Tenzory byly poprvé zavedeny do fyziky při studiu napětí a deformací v pružném prostředí. S tím souvisí podobnost slova *tenzor* a *tenzio* – napětí. Dnes se tenzory používají i v dalších oblastech fyziky, ale tento popis už by přesahoval rozsah tohoto textu. Toto další využití tenzorů souvisí především se studiem vysokoškolské fyziky.

1 Skaláry ve fyzice

Jak již bylo zmíněno v úvodu, jsou skaláry nejjednodušším typem veličin ve fyzice. Jsou totiž určeny pouze hodnotou (číslem) a jednotkou. Skaláry mají mnohostranné využití, jak jste již poznali v celé řadě studijních textů. Vzhledem k tomu, že jste již v minulosti velmi často se skaláry pracovali, zmíníme se o nich jen stručně a budeme se více věnovat vektorům. Připomeňme si alespoň některá z mnoha uplatnění skalárů ve fyzice.

Napíšeme-li kalorimetrickou rovnici (bez uvažování kapacity kalorimetru) ve tvaru

$$c_1 m_1 (t - t_1) = (c_2 m_2 (t_2 - t),$$

nalezneme zde celou řadu skalárních veličin: měrnou tepelnou kapacitu c, hmotnost m, teplotu t.

Skalárem je rovněž např. průměrná rychlost v_p. V této sovislosti je třeba si připomenout, že při řešení úloh o pohybu vlastně pracujeme se dvěma rychlostmi: rychlostí okamžitou $\boldsymbol{v}$ (to je veličina vektorová, má směr tečny k trajektorii pohybu a je dána i svojí velikostí) a rychlostí průměrnou v_p, u které dokážeme určit pouze její velikost.

I v elektrostatice se vyskytuje celá řada skalárních veličin: elektrický odpor R, elektrická vodivost G, potenciál elektrického pole φ, kapacita C, indukčnost L .... Zcela jistě byste nalezli i další veličiny.

V neposlední řadě si připomeňme, že skaláry jsou také různé druhy energií: kinetická, potenciální, vnitřní, ... a též i práce, kterou je možno na energii přeměnit nebo naopak energii konáním práce spotřebovat.

Ve výčtu skalárních veličin by bylo možno dále pokračovat, my se však v této práci zaměříme spíš na úlohy, ve kterých se vyskytují veličiny složitější,což budou především vektory a okrajově si také ukážeme, jak se dají ve fyzice použít také tzv. *tenzory*.

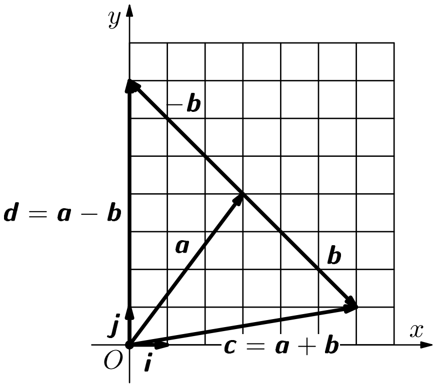
2 Vektory

2.1 Pojem vektor

Jak jsme si již dříve uvedli, je vektor veličina, která má svou velikost a směr. Obecně je možno říci, že i jakékoliv přímočaré přemístění čehokoliv má svou velikost a směr, a tedy je možno takové přemístění považovat za vektor.

Popišme si výše popsanou situaci na modelu pohybujícího se člověka. Směr pohybu bude tento člověk ukazovat např. pomocí vztyčené paže, krok bude v tomto modelu vyjadřovat jednotku délky. Člověk může své kroky konat v různých směrech. Bude-li se pohybovat na opačnou stranu, dostaneme opačný vektor, zůstane-li člověk stát na místě, bude vektor nulový. Pokud se člověk rozhodne vykonat dvojnásobný počet kroků vzhledem ke své původní poloze, než původně zamýšlel vykonat (se zachováním původního směru), dostaneme vektor dvojnásobný. Člověk se také může rozhodnout, že se do určitého místa přemístí v jednom směru a pak bude pokračovat směrem jiným. Pak je možno jeho výsledné přemístění chápat jako skládání (sčítání) vektorů.

Výše uvedený model umožňuje znázornit také další činnosti s vektory (např. by bylo možno znázornit i odčítání vektorů – promyslete si, jak). My se však nyní podíváme na práci s vektory nejprve z hlediska matematického, pak přejdeme k fyzikálním aplikacím. Vektory si budeme dále pro větší názornost kreslit pomocí čtverečkové sítě (obr. 1).



Obr. 1 Skládání vektorů

Sčítat dvě přemístění $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ znamená nejprve vykonat přemístění $\boldsymbol{a}$ a potom vycházejíc z nové polohy vykonat přemístění $\boldsymbol{b}$. Výsledné přemístění pak je $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.
Odčítat dvě přemístění $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ znamená nejprve vykonat přemístění $\boldsymbol{a}$ a potom opět vycházejíc z nové polohy vykonat přemístění opačné k $\boldsymbol{b}$, tj. přemístění $-\boldsymbol{b}$. Výsledné přemístění je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.
Tímto způsobem je možné skládat vektory graficky.

My si ještě ukážeme, jak sčítat a odčítat vektory graficky. Zůstaneme ještě u naší čtvercové sítě. Zavedeme-li si soustavu souřadnic Oxy (v rovině), pak je možno přemístění $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j},$$

kde $\boldsymbol{i}$ je jednotkový vektor (krok) ve směru osy x, $\boldsymbol{j}$ je jednotkový vektor (krok) ve směru osy y.

Poznámka

Pokud bychom uvažovali soustavu souřadnic $Oxyz$ v prostoru, pak ve směru osy z bychom zavedli jednotkový vektor (krok) $\boldsymbol{k}$.

Obecně je tedy možno napsat

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} \text{ v rovině}$$

nebo i

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \text{ v prostoru.}$$

Toto je ovšem možno také psát maticově

$$\boldsymbol{a} = (a_x; a_y) \text{ v rovině nebo } \boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z) \text{ v prostoru.}$$

Skládat vektory pak znamená sčítat (nebo odčítat) složky ve směru odpovídajících os.

Vraťme se zpět k obr. 1 a ukažme si to názorně:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) + (3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}) = (3+3)\boldsymbol{i} + (4-3)\boldsymbol{j} = 6\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}.$$

Maticově lze psát

$$\boldsymbol{c} = (3; 4) + (3; -3) = (6; 1).$$

Obdobně také

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) + (-3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = (3-3)\boldsymbol{i} + (4+3)\boldsymbol{j} = 7\boldsymbol{j},$$

neboli

$$\boldsymbol{d} = (3; 4) + (-3; 3) = (0; 7).$$

Vektory $\boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{d}$ jsou na obr. 1 znázorněny rovněž graficky, srovnáním s obr. 1 můžeme konstantovat, že výsledky našich výpočtů jsou shodné s obr. 1.

Výše uvedený postup nám naznačuje, jak s takovou veličinou jako je vektor, je možno provádět různé operace, pokud si je vhodně zavedeme, což provedeme níže.

2.2 Operace s vektory

2.2.1 Násobení vektoru skalárem

Násobíme-li libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ reálným číslem a, dostaneme opět vektor $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}a$, který je s vektorem $\boldsymbol{u}$ souhlasně rovnoběžný pro $a > 0$ a nesouhlasně rovnoběžný, je-li $a < 0$. Pro $a = 0$ dostaneme $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (nulový vektor).

Každý nenulový vektor si můžeme představit jako součin jednotkového vektoru $\boldsymbol{u}^0$, který je s vektorem $\boldsymbol{u}$ souhlasně rovnoběžný, a jeho velikosti $|\boldsymbol{u}| = u$. Pak platí

$$\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{u}^0,$$

neboli

$$\boldsymbol{u}^0 = \frac{\boldsymbol{u}}{u}.$$

2.2.2 Rozklad vektoru na složky

Rozložit vektor $\boldsymbol{u}$ na složky $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ jejichž směr je určený směrem přímek p_1, p_2, znamená nalézt takové vektory $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$, pro které platí

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,$$

přičemž $\boldsymbol{u}_1 \| p_1$, $\boldsymbol{u}_2 \| p_2$.

Poznámka

Aby šel tento rozklad provést, je nutné, aby $\boldsymbol{u}$, p_1 a p_2 ležely v téže rovině.

V obecném případě lze každý vektor rozložit na tři složky, které neleží v jedné rovině

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3.$$

V pravoúhlé soustavě souřadnic x, y, z lze libovolný vektor rozložit na tři navzájem kolmé složky tak, že

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_x + \boldsymbol{u}_y + \boldsymbol{u}_z.$$

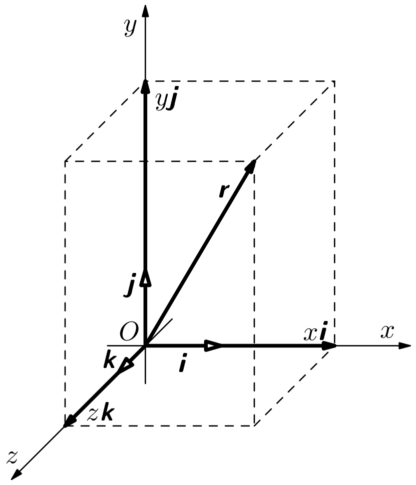
Zavedeme-li ve směru souřadnicových os x, y, z jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (pro které platí $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{k}$ a $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$), je možno psát

$$\boldsymbol{u}_x = u_x\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{u}_y = u_y\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{u}_z = u_z\boldsymbol{k}.$$

Potom

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}.$$

Veličiny u_x, u_y, u_z nazýváme souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{u}$.



Obecně lze psát

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

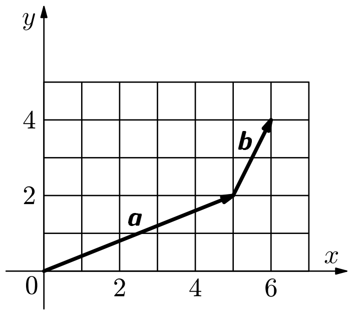
Vektor $\boldsymbol{r}$ určuje polohu bodu v prostoru, a proto ho nazýváme polohový vektor.

Obr. 2 Polohový vektor

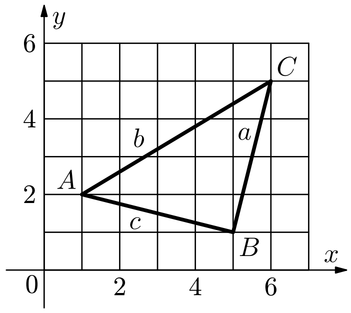
Cvičení 1

1. Vyjádřete postupně vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (obr. 3) pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ pravoúhlé souřadné soustavy. Určete součet $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ a rozdíl $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

2. Určete polohové vektory středů stran trojúhelníku ABC (obr. 4).



Obr. 3 Skládání vektorů



Obr. 4 Trojúhelník

2.2.3 Součin dvou vektorů

Ve fyzice se používají mezi dvěma vektory tyto součiny:

a) skalární $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (výsledkem je *skalár*),

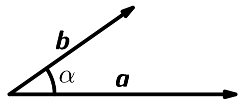
b) vektorový $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (výsledkem je *vektor*),

c) tenzorový $\boldsymbol{ab}$ (výsledkem je *tenzor 2. stupně*).

a) Skalární součin dvou vektorů

Je číslo (skalár), jehož velikost je dána součinem absolutních hodnot vektorů a kosinu úhlu mezi nimi sevřeného (obr. 5), tj.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\alpha.$$



Obr. 5 Skalární součin

Dle výše uvedeného pravidla můžeme psát: $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1$, $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1$, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$.

Příklad 1 – skalární součin I

Určete skalární součin vektorů $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$ ležících v téže rovině $z = 0$.

Řešení

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}) = a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = a_xb_x+a_yb_y$.

Obecně je tedy možno psát

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

(Ověřte sami.)

Příklad 2 – skalární součin II

Určete skalární součin vektorů $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

Řešení

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 10.$$

Příklad 3 – úhel mezi vektory

Určete úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

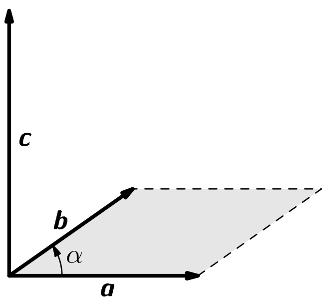
Řešení

Platí
$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{uv} = \frac{(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\cdot(2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 2 - 0\cdot 3}{\sqrt{5\cdot 13}},$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = 60°15'.$$

b) Vektorový součin dvou vektorů

Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je vektor $\boldsymbol{c}$, který

1. má velikost rovnající se plošnému obsahu rovnoběžníku sestrojeného nad vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$,
2. je kolmý na rovinu tohoto rovnoběžníku,
3. je orientovaný tak, že platí pravidlo pravé ruky: „prsty pravé ruky dáme ve směru prvního vektoru $\boldsymbol{a}$ a ztotožníme je ve směru druhého vektoru $\boldsymbol{b}$. Pak vzpřímený palec udává směr výsledného vektoru $\boldsymbol{c}$“.



Obr. 6 Vektorový součin

Zapisujeme: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.
Protože $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = ab\sin\alpha$, můžeme také psát
$$\boldsymbol{c} = ab\sin\alpha\,\boldsymbol{c}^0.$$

Vlastnosti vektorového součinu:

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$, (viz pravidlo pravé ruky)
2. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,
3. $(s\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = s(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

Za základní definice vektorového součinu můžeme psát $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$ (ověřte pomocí pravidla pravé ruky).

Nyní si ukážeme postup, jak je možno vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ počítat. Oba vektory je možno zapsat do determinantu, který má níže uvedený tvar

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Rozvineme-li tento determinant podle prvního řádku, dostaneme

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}.$$

Příklad 4 – vektorový součin

Určete vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ pomocí determinantu.

Řešení

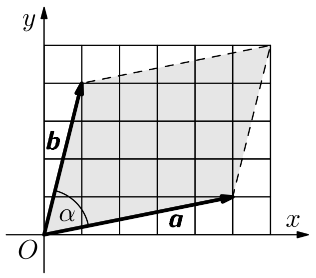
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Rozvineme-li tento determinant podle prvního řádku, dostaneme

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2))\boldsymbol{i} + (5 \cdot 1 - 3 \cdot 3)\boldsymbol{j} + (3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1)\boldsymbol{k} = 22\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}.$$

Cvičení 2

Určete plošný obsah rovnoběžníku na obr. 7 a úhel α, který svírají vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.



Obr. 7 Rovnoběžník

2.2.4 Tenzorový součin vektorů

V této části si ukážeme, jak postupovat při tenzorovém násobení dvou vektorů. Mějme dva vektory $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$. Chceme spočítat tenzorový součin $\boldsymbol{ab}$. Budeme postupovat tak, že oba vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ nejprve mezi sebou roznásobíme:

$$\boldsymbol{ab} = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{ab} = 3\cdot 1\boldsymbol{ii} + 3\cdot(-2)\boldsymbol{ij} + 3\cdot 3\boldsymbol{ik} + 4\cdot 1\boldsymbol{ji}4\cdot(-2)\boldsymbol{jj} + 4\cdot 3\boldsymbol{jk} + 5\cdot 1\boldsymbol{ki} + (-10)\boldsymbol{kj} + 15\boldsymbol{kk}.$$

Obdržený výsledek je *tenzor ve tvaru mnohočlenu*. V tomto případě se jedná o tenzor 2. stupně, který je možno též napsat ve tvaru matice

$$\boldsymbol{ab} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 4 & -8 & 12 \\ 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}.$$

Obecně lze pro vektory $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$ odvodit analogickým způsobem vztah

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} = \begin{pmatrix} a_xb_x & a_xb_y & a_xb_z \\ a_yb_x & a_yb_y & a_yb_z \\ a_zb_x & a_zb_y & a_zb_z \end{pmatrix}.$$

Ve fyzice se ale častěji setkáváme spíš s *číslicovou* symbolikou, tj.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_1 & a_3b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

3 Vektory ve fyzice

3.1 Kinematika

Polohový vektor

Polohu hmotného bodu v prostoru je možné udat pomocí polohového vektoru

$$\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

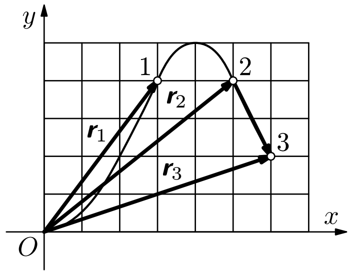
jak už bylo uvedeno dříve. Připomeňme si, že vektorová funkce je ekvivalentní se třemi skalárními funkcemi $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Příklad 5 – pohyb hmotného bodu

Hmotný bod se pohybuje po dané křivce. Určete

a) jeho polohové vektory při průchodu polohami 1, 2, 3 (obr. 8),

b) změnu polohového vektoru $\Delta\boldsymbol{r}$ při průchodu polohami 2 a 3.



Obr. 8 Polohové vektory

Řešení

a) $\boldsymbol{r}_1 = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r}_2 = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r}_3 = 6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$.

b) $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2 = (6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) - (5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$.

3.1.1 Okamžitá rychlost

Okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ je vektorová veličina a je definována jako podíl

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Připomeňme si dále vlastnosti okamžité rychlosti.

a) Vektor okamžité rychlosti má vždy směr tečny k trajektorii v daném místě.

b) Absolutní hodnota vektoru okamžité rychlosti udává dráhu tělesa za jednotku času, tj.

$$|\boldsymbol{v}| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

c) Pro vektor okamžité rychlosti platí

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}.$$

Tento zápis je opět rovnocenný složkovému zápisu

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

3.1.2 Okamžité zrychlení

Budeme-li vektor okamžité rychlosti dále derivovat, dostaneme vektor okamžitého zrychlení

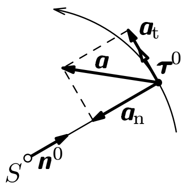
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}.$$

Vektor zrychlení je možno rozložit na normálovou a tečnou složku. Normála je kolmá na tečnu v daném bodě.

Každou křivku je možno v bezprostředním okolí jejího vybraného bodu nahradit obloukem kružnice o poloměru R – *poloměr křivosti* křivky v daném místě, nazývaného také poloměr oskulační kružnice. Můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n}.$$



Obr. 9 Zrychlení

Pro jednotlivé složky pak platí

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}^0, \qquad \boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R}(-\boldsymbol{n}^0),$$

kde $\boldsymbol{\tau}^0$ je jednotkový vektor ve směru tečny, $\boldsymbol{n}^0$ jednotkový vektor ve směru normály (obr. 9).

Potom

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}^0 + \frac{v^2}{R}(-\boldsymbol{n}^0).$$

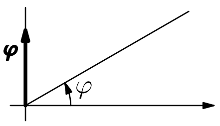
Vztahy pro $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$, $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ jsou odvozeny např. ve studijním textu *Dopravní kinematika a grafy.*

3.1.3 Otáčivý pohyb tělesa

Otáčí-li se těleso kolem pevné osy, pohybuje se každý bod, který neleží na této ose po kružnici, přičemž úhlová rychlost rotačního pohybu všech bodů je v daném okamžiku stejná.

V učivu fyziky jste se s veličinami, které popisují otáčivý pohyb, setkali ve skalárním popisu. My si ale v této části ukážeme, jak je možno otáčivý pohyb popsat také pomocí veličin vektorových.

Kromě úhlu (úhlové dráhy) jako skalární veličiny je možno (a běžně se v návaznosti na učivo střední školy používá) také psát vektorově i úhel $\boldsymbol{\varphi}$. Je to vektor, jehož absolutní hodnota se rovná velikosti příslušného úhlu v obloukové míře. Směr tohoto vektoru určíme pomocí pravidla pravé ruky:

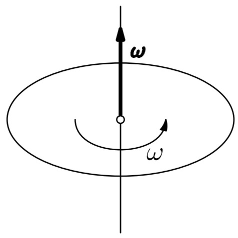


Obr. 10 Úhlová dráha

Položíme-li pravou ruku tak, že její prsty ukazují ve směru prvního ramene úhlu a zároveň prsty položíme tak, aby znázorňovaly pohyb od jednoho ramene k druhému ve směru orientace úhlu. Potom vztyčený palec ukazuje orientaci příslušného vektoru úhlu (obr. 10).

Obdobně můžeme postupovat i v případě úhlové rychlosti. Vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ definujeme vztahem

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t},$$



Obr. 11 Úhlová rychlost

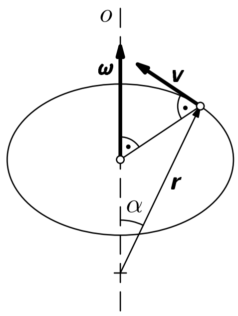
tj. vektor úhlové rychlosti je derivací vektoru úhlu podle času. Vektor $\boldsymbol{\omega}$ má směr osy rotace, přičemž jeho orientace je dána obdobně jako u vektoru $\boldsymbol{\varphi}$ pravidlem pravé ruky (obr. 11). Obdobně je také možno zavést vektor úhlového zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Nyní se podíváme, jak by se mělo dále postupovat při práci s těmito vektorovými veličinami při popisu pohybu jednotlivých bodů rotujícího tělesa. Doposud známe vztah $v = r\omega$. Nyní se pokusíme tento vztah přepsat vektorově. Platí

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

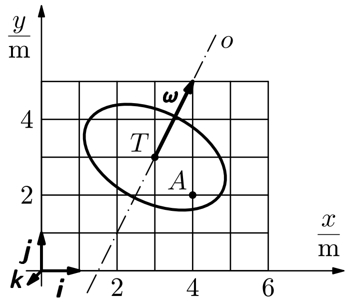
Nejprve si ukážeme, jak tento vztah použijeme při řešení nějaké konkrétní úlohy a pak se v další části pokusíme ověřit platnost tohoto vztahu.



Obr. 12 Vektorový součin – rychlost

Příklad 6 – rotační pohyb

Těleso znázorněné na obr. 13 koná rotační pohyb kolem pevné osy o. Okamžitá úhlová rychlost tělesa je $\boldsymbol{\omega}$. Určete okamžitou rychlost (vektor) bodu A.



Obr. 13 Rychlost bodu

Řešení

Platí $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor příslušného bodu tělesa vzhledem k libovolně zvolenému pevnému bodu na ose tělesa. Zvolíme-li jako vztažný bod T, pak pro bod A platí $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{TA} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$ m. Z obrázku je zřejmé, že $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\ \mathrm{s}^{-1}$. Pak

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{TA} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_A = [(2 \cdot 0 + 0 \cdot 1)\boldsymbol{i} + (0 \cdot 1 - 1 \cdot 0)\boldsymbol{j} + (-1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\boldsymbol{k}] = -3\boldsymbol{k}.$$

Pokud bychom počítali velikost rychlosti, pak by vyšla v metrech za sekundu.

Nyní dokážeme platnost vztahu $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, a to tak, že zjistíme, zda tento vztah dává správnou hodnotu výsledku a směr v obecných situacích. Co se týká velikosti, můžeme psát

$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}| = \omega r \sin \alpha,$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}$. Výraz $r \sin \alpha$ se v souladu s obr. 12 rovná poloměru R kružnice, po které obíhá rotující bod. Pro velikost vektoru rychlosti je možno psát $v = \omega R$ (což odpovídá již dříve používanému skalárnímu vyjádření). Můžeme tedy říci, že výše uvedený vztah pro velikost rychlosti v platí pro případ zjišťování velikosti vektoru.

Směr vektoru rychlosti je určen vektorovým součinem vektorů $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{r}$. Podle definice vektorového součinu musí být vektor $\boldsymbol{v}$ kolmý na $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{r}$, což je v souladu s geometrickou představou – použití pravidla pravé ruky: *uchopíme-li pravou rukou rotační osu tak, aby palec ukazoval směr vektoru* $\boldsymbol{\omega}$, *prsty ukazují orientaci rotace.*

Vztah $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ lze tedy použít k vektorovému popisu otáčivého pohybu.

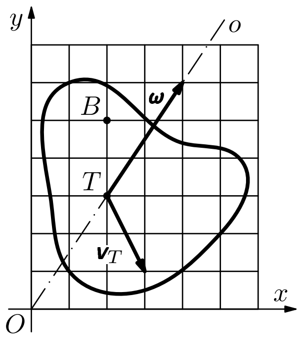
Poznámka

Libovolný pohyb tělesa je možno považovat za pohyb složený z pohybu posuvného a otáčivého. I složený pohyb lze popsat vektorově. Označíme-li $\boldsymbol{v}_A$ rychlost posuvného pohybu libovolného bodu A, $\boldsymbol{\omega}$ okamžitou úhlovou rychlost a $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r}$ polohový vektor bodu B vzhledem A, pak můžeme psát

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Příklad 7 – složený pohyb

Určete vektor okamžité rychlosti bodu B tělesa na obr. 14, které koná složený pohyb, víte-li, že těžiště T se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_\mathrm{T}$ posuvným pohybem a těleso se otáčí stálou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$.



Obr. 14 Složený pohyb

Řešení

Pro rychlost bodu B platí

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_T + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{TB},$$

kde $\boldsymbol{v}_T = (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j})\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\boldsymbol{\omega} = (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $\boldsymbol{TB} = (2\boldsymbol{j})$ m.

Po dosazení dostaneme

$$\boldsymbol{v}_B = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

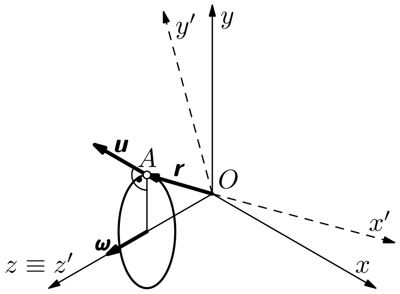
$$\boldsymbol{v}_B = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + \left(\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right)\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$

$$\boldsymbol{v}_B = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

3.1.4 Pohyb v otáčející se soustavě

Budeme uvažovat pohyb v soustavě $S' = (x', y', z')$, která má s inerciální soustavou $S(x, y, z)$ společný počátek O a osu z, kolem níž se vzhledem S otáčí úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$.

Okamžitá poloha hmotného bodu A je dána polohovým vektorem $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}'$. Změny polohového vektoru jsou ale při pohybu v různých soustavách různé. Protože soustava S' se otáčí kolem pevné osy z úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$, konají jednotlivá místa v S' kruhový pohyb unášivou rychlostí $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$.



Obr. 15 Otáčející se soustava

Podle pravidla pro skládání rychlostí pak můžeme psát

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \text{ neboli } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

kde $\mathrm{d}'\boldsymbol{r}$ je přírůstek téhož vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, ale vzhledem k otáčivé soustavě S'.

Nyní se podíváme na výpočet zrychlení. Má-li hmotný bod v časovém okamžiku t v pohybující se soustavě S' relativní rychlost $\boldsymbol{v}'$, která se v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ v této soustavě změní o $\mathrm{d}'\boldsymbol{v}'$, pak se tato změna v základní soustavě S projeví jako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}' = \mathrm{d}'\boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}')\mathrm{d}t, \text{ neboli } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}').$$

Zrychlení $\boldsymbol{a}'$ v soustavě S' je pak dáno vztahem

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}. \tag{1}$$

Podívejme se nyní na jednotlivé složky zrychlení. První člen součtu (1) vyjadřuje tečné zrychlení: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$. Druhý člen součtu (1) vyjadřuje tzv. *Eulerovo zrychlení* $\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}$, které se projevuje v případě, že rotace soustavy není rovnoměrná. Třetí člen součtu (1) je tzv. *Huygensovo* nebo také dostředivé zrychlení. Jedná se o dvojný vektorový součin, který lze upravit na tvar[1]

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\omega^2 \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{H}}.$$

Poslední člen součtu je tzv. *Coriolisovo zrychlení* $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = -2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$, které má směr kolmý na rovinu pohybu. S tímto zrychlením je možno se setkat v různých situacích, např. i u setrvačníků.

Zrychlení $\boldsymbol{a}'$ je tedy nakonec možno přepsat do tvaru součtu jednotlivých výše popsaných zrychlení

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{H}} + \boldsymbol{a}\mathrm{C}.$$

3.2 Dynamika

3.2.1 Moment síly vzhledem k bodu

Ve fyzice v 1. ročníku byl moment síly definován jako součin $M = Fr$. Tento vztah ale platil za podmínky, že síla $\boldsymbol{F}$ a rameno r síly jsou na sebe navzájem kolmé. Orientace momentu síly pak byla dána pomocí pravidla pravé ruky. Nyní, když už jsme se seznámili s pojmem vektorový součin, lze vše shrnout do jednoho vztahu

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}.$$

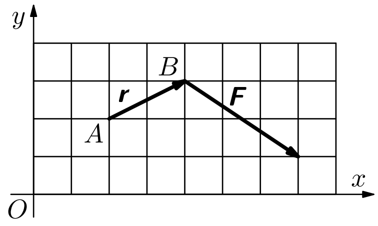
Sami můžete vyzkoušet, že takto definovaný moment síly splňuje jak dosavadní vztah pro pro výpočet velikosti momentu působící síly, tak i pravidlo pravé ruky.

Nyní si ukážeme použití vektorového součinu na konkrétním příkladu.

[1] Dvojný vektorový součin lze rozepsat na $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

Příklad 8 – moment síly

Určete moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem ke vztažnému bodu A (obr. 16).



Obr. 16 Moment síly

Řešení

V tomto případě je

$$\boldsymbol{r} = (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\ \mathrm{m},$$

$$\boldsymbol{F} = (3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j})\ \mathrm{N}.$$

Pro moment síly $\boldsymbol{M}$ vzhledem k bodu A pak platí

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\boldsymbol{M} = [1 \cdot 0 - 0 \cdot (-2)]\boldsymbol{i} + (0 \cdot 3 - 2 \cdot 0)\boldsymbol{j} + [2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3]\boldsymbol{k} = -7\boldsymbol{k}.$$

Velikost momentu síly vyjde v $\mathrm{N \cdot m}$. Je tedy $M = 7\ \mathrm{N \cdot m}$. Vektor momentu působící síly $\boldsymbol{M}$ je orientován v záporném směru osy z a je kolmý jak na polohový vektor $\boldsymbol{r}$, tak i na vektor působící síly $\boldsymbol{F}$.

3.2.2 Moment hybnosti hmotného bodu

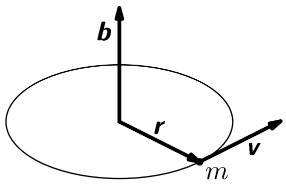
Moment hybnosti $\boldsymbol{b}$ hmotného bodu je definován jako vektorový součin polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ hmotného bodu a jeho hybnosti $\boldsymbol{p}$, tj.

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.$$

Protože $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, je možno výše uvedený vztah rozepsat na tvar

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}.$$

Formální výpočet a práce s momentem hybnosti $\boldsymbol{b}$ jsou analogické jako výpočet momentu síly $\boldsymbol{M}$, ale veličiny $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou navíc mezi sebou spojeny II. impulsovou větou, kterou si dále uvedeme a odvodíme.



Obr. 17 Moment hybnosti

Druhá impulsová věta se dá matematicky vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t},$$

kde $\boldsymbol{M}$ je součet momentů všech vnějších sil působících na soustavu a $\boldsymbol{b}$ je součet momentů hybnosti všech hmotných bodů soustavy.

Ukažme si nyní, jak by bylo možno tuto 2. impulsovou větu odvodit pro jeden bod. Vyjdeme z 2. Newtonova pohybového zákona $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, který přepíšeme do obecnějšího tvaru

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Tuto rovnici nyní zleva vektorově vynásobíme polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$, který určuje polohu působiště síly vzhledem k nějakému vztažnému bodu. Pak dostaneme

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Výraz na levé straně představuje moment působící síly $\boldsymbol{M}$, výraz na pravé straně budeme ještě dále upravovat[2], tj.

$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}.$$

Dostali jsme tedy

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t},$$

což je 2. impulsová věta pro jeden hmotný bod.

Setrvačník

Jeden z případů, kdy se můžeme setkat s užitím II. impulsové věty, je setrvačník.

Setrvačník je těleso, které je souměrné podle osy a které má vzhledem k svojí ose značně velký moment setrvačnosti. My si nyní popíšeme tzv. *těžký setrvačník*, tj. setrvačník upevněný v některém bodě své osy. Tyto setrvačníky se používají na udržování rovnoměrného chodu strojů. Mezi tyto setrvačníky můžeme zařadit také tzv. *gyroskopický kompas*, který má tu význačnou vlastnost, že rotační osa setrvačníku, pokus na ni nepůsobí vnější síly, zachovává v prostoru svůj směr. Toto vyplývá ze vztahu

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t},$$

[2] Při úpravách použijeme vztah $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

je-li $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$. Pak můžeme psát, že $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{konst}$., z toho vyplývá, že také $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{konst}$. (protože $\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{\omega}$). Vektor $\boldsymbol{\omega}$ má ale směr rotační osy. Rotační osa tedy zachovává svůj směr, což se u gyroskopických kompasů v nemalé míře využívá.

3.2.3 Mechanická práce stálé síly

Doposud jsme se setkali s veličinou mechanická práce a vztahem pro výpočet mechanické práce ve tvaru

$$W = Fs\cos\alpha,$$

kde α je úhel, který svírá směr působící síly se směrem posunutí.

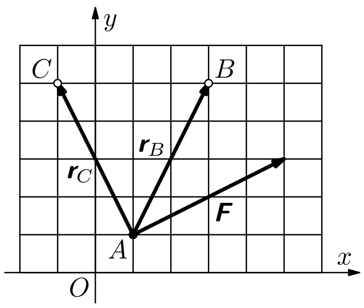
Vztah pro výpočet mechanické práce je možno také zapsat vektorově s užitím skalárního součinu, tj.

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}.$$

Ukažme si použití tohoto vztahu při výpočtu následujícího příkladu.

Příklad 9 – mechanická práce

Určete velikost mechanické práce vykonané při posunutí tělesa (hmotného bodu) z místa A do místa B a z místa A do místa C (obr. 18) působením stálé síly $\boldsymbol{F}$.



Obr. 18 Mechanická práce

Řešení

Platí

$$\boldsymbol{r}_B = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m},\ \boldsymbol{r}_C = (-2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m},$$
$$\boldsymbol{F} = (4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\ \mathrm{N}.$$

Potom práce

$$W_B = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_B = (4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{J} = (4 \cdot 2 + 2 \cdot 4)\ \mathrm{J} = 16\ \mathrm{J},$$

$$W_C = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_B = (4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot (-2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{J} = (4 \cdot 2 - 2 \cdot 4)\ \mathrm{J} = 0\ \mathrm{J}.$$

V případě posunutí do bodu C je vykonaná práce nulová – z obr. 18 je vidět, že tento výpočet je správný, protože vektor síly $\boldsymbol{F}$ a vektor posunutí $\boldsymbol{r}_C$ jsou na sebe navzájem kolmé.

3.3 Elektromagnetické pole

V této části si ukážeme, jak je možno některé vztahy (které jsou ve středoškolských učebnicích fyziky uváděny ve skalární podobě) zapsat pomocí vektorů.

3.3.1 Lorentzova síla

Lorentzova síla působí na částici s nábojem Q, která se pohybuje v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ rychlostí $\boldsymbol{v}$. Tato síla je dána vztahem

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

3.3.2 Ampérova síla

Na přímý vodič délky L, který se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ a protéká jím konstantní proud I, působí síla

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{mag}} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}.$$

Jak postupovat v případě, že vodič není přímý je popsáno např. ve studijním textu *Bohumil Vybíral: Magnetické pole ve vakuu*. Tento text je prvním dílem, na který navazují ještě díly *Magnetické pole v látce* a *Elektromagnetická indukce*, kde už je ve velké míře použit vektorový zápis veličin v elektromagnetickém poli. Tyto texty je možno stáhnout z Internetu ze stránek FO.

3.4 Intenzita a potenciál

V této části si ukážeme, jak je možno vektorově popsat gravitační pole. Snadno lze ale nahlédnout, že obdobné vztahy by platily i v poli elektrostatickém.

Vektorový popis gravitačního pole provádíme pomocí veličiny intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{K}$, naproti tomu skalární popis provádíme pomocí veličiny potenciál φ. Tyto dvě veličiny jsou navzájem svázány vztahem

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Tento vztah lze odvodit ze vztahu pro výpočet práce vykonané při přenesení hmotného bodu o hmotnosti m v gravitačním poli z místa 1 do místa 2. Musíme si ale uvědomit, že při přenášení z místa 1 do místa 2 v gravitačním poli působíme silou $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$, tj. proti směru gravitační síly. Vykonaná práce je pak dána vztahem

$$W_{12} = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int \boldsymbol{F}_{\mathrm{g}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int m\boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -m\int \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Vyjádříme-li velikost této práce pomocí potenciálu, dostaneme

$$W_{12} = m(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Porovnáním výše uvedených vztahů dostaneme

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

což je hledaný vztah. Budou-li body 1, 2 nekonečně blízko sebe, můžeme psát

$$\mathrm{d}\varphi = -\boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Poznámka

Vztah mezi intenzitou a potenciálem se zapisuje velmi často také ve tvaru

$$\boldsymbol{K} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Podívejme se na tento zápis z matematického hlediska. Ukázali jsme si, že platí $\mathrm{d}\varphi = -\boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Víme, že potenciál je funkcí souřadnic x, y, z. Pak lze $\mathrm{d}\varphi$ rozepsat jako

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

což je tzv. *totální diferenciál*. Tento vztah však lze dále upravit na tvar

$$\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (\mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}).$$

Po dosazení do vztahu $\mathrm{d}\varphi = -\boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ a úpravě dostaneme

$$\boldsymbol{K} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi,$$

což zapisujeme zkráceně ve tvaru

$$\boldsymbol{K} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Výraz grad je tedy možno chápat jako určitý operátor, použitý na funkci φ. Velmi často můžeme vidět zkrácený zápis pomocí tzv. „nabla“ operátoru ∇:

$$\boldsymbol{K} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi.$$

Operátor ∇ představuje vlastně zkrácený zápis $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$, který pak aplikujeme na danou funkci.

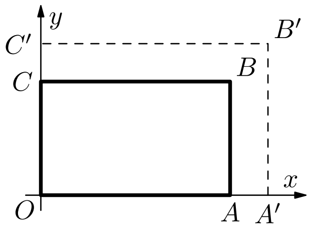
4 Tenzory ve fyzice

4.1 Tenzor deformace

Jak jsme si již dříve uvedli, slovo tenzor pochází ze slova *tenzio = napětí*. První tenzor, který byl použit, byl právě tenzor napětí. Protože napětí také úzce souvisí s deformací, ukážeme si nejprve použití tenzoru při matematickém popisu deformace, a to na příkladu natažení (nebo stlačení) pružného tělesa ve dvou na sebe kolmých směrech. Situaci si znázorníme na obr. 19.

Vezměme si rovinný útvar (obdélník) $OABC$, který přejde při takové deformaci opět do rovinného útvaru (obdélníku) $OA'B'C'$ (obr. 19).

Budeme uvažovat, že se jedná o pružnou deformaci, při které platí *Hookův zákon*, tj. že relativní změny délek stran obdélníku jsou pro příslušný směr vždy stejné. Relativní změny délek ve směru osy x budou ale obecně jiné než relativní změny délek ve směru osy y, tj. jedná se o homogenní deformaci.



Obr. 19 Deformace obdélníku

Naším cílem bude nalézt funkci $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, která bude popisovat daný typ deformace.

Budeme dále uvažovat, že původní polohový vektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ bude mít po deformaci tvar

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}, \text{ kde } x' = k_1 x,\ y' = k_2 y, \text{ tj. } \boldsymbol{r}' = k_1 x\boldsymbol{i} + k_2 y\boldsymbol{j},$$

kde k_1, k_2 jsou konstanty, které určují relativní prodloužení v jednotlivých směrech.

Pro vektor přemístění bodu bude platit vztah

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = (k_1 x - x)\boldsymbol{i} + (k_2 y - y)\boldsymbol{j} = (k_1 - 1)x\boldsymbol{i} + (k_2 - 1)y\boldsymbol{j}.$$

Získaná funkce $\boldsymbol{u}(x, y)$ je lineární. Dále tento vztah přepíšeme do maticové podoby, tj.

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (k_1 - 1)x \\ (k_2 - 1)y \end{pmatrix}.$$

Tuto matici nyní rozepíšeme do tvaru součinu dvou matic, tj.

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} k_1 - 1 & 0 \\ 0 & k_2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} k_1 - 1 & 0 \\ 0 & k_2 - 1 \end{pmatrix}$$

první matici (což je tenzor druhého stupně v rovině) a druhou matici $\boldsymbol{r}$ (což je polohový vektor daného bodu pružného prostředí), můžeme psát

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Dr}.$$

Tenzor $\boldsymbol{D}$ nazýváme *tenzor deformace*. Na tento tenzor lze nahlížet jako na operátor, který působí na vektor $\boldsymbol{r}$ a vytváří z něj *vektor přemístění* $\boldsymbol{u}$ příslušného bodu.

Poznámka

Obdobně, bude-li se jednat o prodloužení (stlačení) ve třech směrech, je možno psát

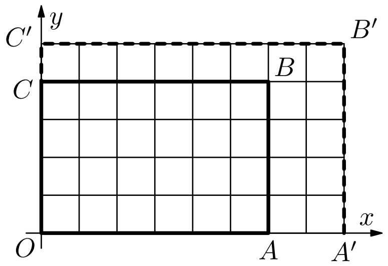
$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} k_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Vztah pro přemístění lze potom psát opět ve tvaru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Dr}$.

Ukažme si nyní, jak řešit situaci prodloužení ve dvou směrech v konkrétním případě.

Příklad 10 – tenzor deformace

Na obr. 20 je znázorněna homogenní izotropní deska $OABC$, která bude mít po deformaci tvar $OA'B'C'$. Určete tenzor deformace za předpokladu, že deska je homogenní.



Obr. 20 Deformace desky

Řešení

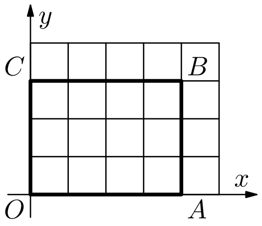
Určíme koeficienty k_1, k_2.

Z obr. 20 je zřejmé, že $k_1 = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$, $k_2 = \dfrac{5}{4}$. Tenzor deformace pak bude mít tvar

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3

Homogenní izotropní deska $OABC$ na obr. 21 bude mít po deformaci tvar $OA'B'C'$. Jsou dány koeficienty $k_1 = \dfrac{5}{4}$, $k_2 = \dfrac{2}{3}$. Nakreslete do téhož obrázku tvar desky po deformaci a určete vektor přemístění bodu B.



Obr. 21 Deformace desky

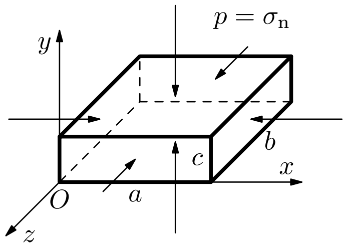
Poznámka

Formální zápis pro prodloužení nebo stlačení tělesa se neliší, přesto si ale všimněme ještě jedné věci: je-li $k > 1$, pak se jedná o deformaci tahem, je-li $k < 1$, jedná se o deformaci tlakem, což si můžete ověřit při řešení cvičení 3.

Nyní si ještě ukážeme postup, jak vyšetřit deformaci tělesa (hranolu), které bude vystaveno *kolmému všestrannému tlaku*. Tato situace může nastat např. když těleso ponoříme do kapaliny, v níž je tlak p. Ponořené těleso – hranol má před ponořením do kapaliny hrany o délkách a, b, c, po ponoření do kapaliny se délky hran změní na a', b', c' (obr. 22).

Kdybychom uvažovali, že tlak $p = \sigma_{\mathrm{n}}$ působí jen v jednom směru, např. ve směru hrany a, pak by se hranol v tomto směru zkrátil, ale v ostatních směrech prodloužil. Podle vztahu pro poměrné zkrácení ε pak platí

$$\varepsilon = \frac{a - a'}{a}, \text{ z čehož } a' = a(1 - \varepsilon).$$



Obr. 22 Deformace hranolu

Poměrné prodloužení hran b, c označíme η. Analogicky pak můžeme psát

$$\eta = \frac{b' - b}{b} \text{ nebo } \eta = \frac{c' - c}{c},$$

z čehož $b' = b(1 + \eta)$, $c' = c(1 + \eta)$.
Bude-li tlak působit také ve směru b a c, pak i v těchto směrech nastane podélné poměrné zkrácení ε a ve směrech kolmých na tento směr příčné poměrné prodloužení η, tj. můžeme psát

$$a' = a(1 - \varepsilon + 2\eta),\ b' = b(1 - \varepsilon + 2\eta),\ c' = c(1 - \varepsilon + 2\eta).$$

Původní polohový vektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ se změní na polohový vektor $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$.

Po dosazení

$$\boldsymbol{r}' = x(1 - \varepsilon + 2\eta)\boldsymbol{i} + y(1 - \varepsilon + 2\eta)\boldsymbol{j} + z(1 - \varepsilon + 2\eta)\boldsymbol{k}.$$

Pro přemístění bodu o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}$ do místa o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}'$ platí

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = x(-\varepsilon + 2\eta)\boldsymbol{i} + y(-\varepsilon + 2\eta)\boldsymbol{j} + z(-\varepsilon + 2\eta)\boldsymbol{k},$$

což lze analogicky jako v rovinném případě napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -\varepsilon + 2\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon + 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon + 2\eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tenzor deformace je tedy v tomto případě možno zapsat ve tvaru

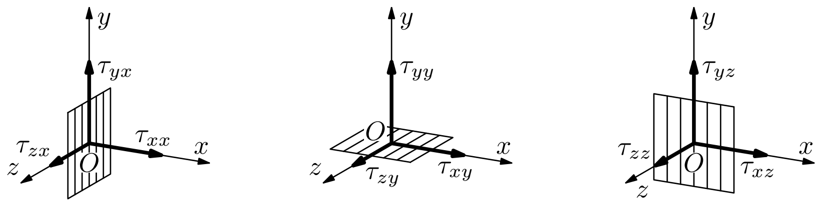
$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -\varepsilon + 2\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon + 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon + 2\eta \end{pmatrix}.$$

4.2 Tenzor napětí

Z předcházející části víme, že každé těleso mění svůj tvar, začnou-li na něj silově působit jiná tělesa. Výsledkem tohoto silového působení byla deformace. Při změně tvaru se také ale změní rovnovážné polohy částic, ze kterých je složeno těleso. Toto má za následek, že mezi částicemi vzniknou síly, které mají snahu přivodit původní rovnovážný stav. Deformace tělesa dosáhne konečného stavu, když síly mezi částicemi dokážou odolávat působení zvnějšku. Deformované těleso je v tzv. stavu *napjatosti*, který charakterizujeme pomocí veličiny *napětí*.

Pokud bychom si vytkli v napjatém tělese malou plošku, pak elementární plošná síla $\Delta\boldsymbol{F}$, připadající na tuto plošku, může být obecně orientována jinak než normála k plošce. Proto i napětí $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta S}$ jako vektor má obecně jinou orientaci než vektor normály $\boldsymbol{n}$ příslušející plošce. Pokud bychom myšlenkově rozložili vektor $\boldsymbol{\sigma}$ na dílčí napětí ve směru os souřadnic, dostaneme dílčí napětí normálová a tečná.

V dalším postupu označíme τ se dvěma indexy všechna napětí. První index bude udávat směr osy souřadnic, v němž napětí působí, druhý index pak bude udávat směr, k němuž je rovina, v níž napětí působí, kolmá (je to tedy směr normály roviny, v níž napětí působí) – obr. 23.

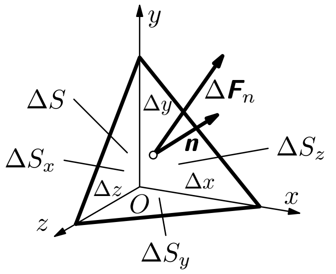


Obr. 23 Napětí

Tato napětí lze přehledně uspořádat do matice – dostaneme tzv. *tenzor napětí*

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}.$$

Nyní si ještě ukážeme, že těmito devíti číselnými údaji vztahujícími se k zvolenému bodu A v napjatém tělese, je v tomto bodě určen vektor $\boldsymbol{\sigma}$ patřící libovolně orientované plošce obsahující bod P (obr. 24).



Obr. 24 Čtyřstěn

Nechť je touto ploškou stěna malého čtyřstěnu na obr. 24, jehož další tři stěny leží v rovinách souřadnic. Plošné obsahy ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z jsou průměty plošky ΔS do rovin souřadnic. Pro průměty ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z lze psát

$$\Delta S_x = \Delta S n_x,\ \Delta S_y = \Delta S n_y,\ \Delta S_z = \Delta S n_z,$$

kde n_x, n_y, n_z jsou průměty jednotkového vektoru po řadě do směru osy x, y, z.

Na tento čtyřstěn tedy působí jednak *plošné síly* od napjatého tělesa, které jsme si právě popsali a také *objemové síly* (např. tíha, odstředivá síla), které jsou úměrné hmotnosti čtyřstěnu. Velikosti objemových sil tedy budou úměrné součinu $\Delta x \Delta y \Delta z$, zatímco plošné síly budou úměrné pouze součinu $\Delta x \Delta y$, atd. Pro velmi malý čtyřstěn je možno objemové síly (3. řádu) zanedbat oproti plošným silám (2. řádu).

Bude-li působit napjaté těleso v ploše ΔS na čtyřstěn, který je jeho součástí, tahovou silou $\boldsymbol{F}_n$, která obecně není kolmá na plochu ΔS, pak jsou v rovnovážném stavu jeho složky ve směru os souřadnic stejně velké jako součet opačně orientovaných sil, kterými v příslušném směru působí obklopující těleso na čtyřstěn v ploškách ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z. Např. ve směru osy x označíme složku síly $\Delta\boldsymbol{F}_n$ jako $F_{x\mathrm{n}}$ a platí

$$\Delta F_{x\mathrm{n}} = \tau_{xx}\Delta S_x + \tau_{xy}\Delta S_y + \tau_{xz}\Delta S_z = \tau_{xx}\Delta S n_x + \tau_{xy}\Delta S n_y + \tau_{xz}\Delta S n_z.$$

Analogicky potom i pro další osy

$$\Delta F_{y\mathrm{n}} = \tau_{yx}\Delta S n_x + \tau_{yy}\Delta S n_y + \tau_{yz}\Delta S n_z.$$

$$\Delta F_{z\mathrm{n}} = \tau_{zx}\Delta S n_x + \tau_{zy}\Delta S n_y + \tau_{zz}\Delta S n_z.$$

Připomeňme si jenom, že 1. index (jako u napětí) určuje směr, v němž složka působí, 2. index n orientaci plošky ΔS, k níž $\Delta\boldsymbol{F}_n$ není obecně kolmá.

Po vydělení těchto rovnic ΔS dostaneme

$$\begin{aligned}
\sigma_{x\mathrm{n}} &= \tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\
\sigma_{y\mathrm{n}} &= \tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z, \\
\sigma_{z\mathrm{n}} &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \tau_{zz} n_z.
\end{aligned}$$

Obecně je tedy možno napsat, že

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{n}.$$

Poznámka

V různých učebnicích se používá pro tento případ buď zápis pomocí os x, y, z nebo také i jiná symbolika, kdy osy x, y, z jsou nahrazeny čísly 1, 2, 3. Potom je možno tenzor napětí psát ve tvaru

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}.$$

Řešení cvičení

Cvičení 1

1. $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$.
   $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (5+1)\boldsymbol{i} + (2+2)\boldsymbol{j} = 6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$,
   $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (5-1)\boldsymbol{i} + (2-2)\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{i}$.

2. $\boldsymbol{s}_c = \boldsymbol{OA} + \frac{1}{2}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}(4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) = 3\boldsymbol{i} + 1{,}5\boldsymbol{j}$,

   $\boldsymbol{s}_a = \boldsymbol{OB} + \frac{1}{2}\boldsymbol{BC} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{1}{2}(1\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) = 5{,}5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$,

   $\boldsymbol{s}_b = \boldsymbol{OA} + \frac{1}{2}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}(5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = 3{,}5\boldsymbol{i} + 3{,}5\boldsymbol{j}$.

Cvičení 2

$\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0 - 0 \cdot 5)\boldsymbol{i} + (0 \cdot 1 - 5 \cdot 0)\boldsymbol{j} + (5 \cdot 5 - 1 \cdot 1)\boldsymbol{k} = 24\boldsymbol{k}.$$

Obsah plochy rovnoběžníku je $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 24$.

Úhel dvou vektorů určíme pomocí skalárního součinu

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{5 \cdot 1 + 1 \cdot 5}{\sqrt{5^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{5}{13},$$

potom $\alpha = 67°23'$.

Cvičení 3

Tenzor deformace má tvar

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

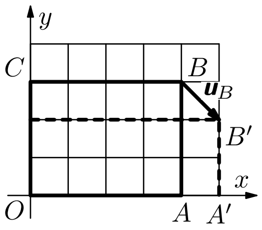
Obecně lze psát

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pro bod B můžeme psát

$$\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{D}\boldsymbol{r}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Graficky lze řešení znázornit na obr. 25.



Obr. 25 Tenzor deformace

Literatura

[1] Baník, I. – Baník, R. – Zámečník, J.: *Fyzika netradične. Mechanika.* Alfa, Bratislava 1989.

[2] Brdička, M. – Hladík, A.: *Teoretická mechanika.* Academia, Praha 1987.

[3] Horák, Z. – Krupka, F.: *Fyzika.* SNTL, Praha 1981.

[4] Obetková, V. – Mamrillová, A. – Košinárová, A.: *Teoretická mechanika.* Alfa, Bratislava 1990.