SOUŘADNICE VE FYZICE

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Miroslava Jarešová – Ivo Volf

Obsah

Úvod **2**

1 Popis soustav souřadnic **3**

2 Rychlost a zrychlení **6**
2.1 Rychlost a zrychlení v polárních souřadnicích 6
2.2 Rychlost a zrychlení ve sférických souřadnicích 8
Příklady 9
Příklad 1 – trajektorie pohybu hmotného bodu 9
Příklad 2 – kuželosečky 9
Příklad 3 – pohyb po povrchu Země 11
Příklad 4 – odstředivý stroj 13
Příklad 5 – eliptický pohyb 14
Cvičení 1 15

3 Vektorový popis polohy bodu v různých soustavách souřadnic **16**
Příklad 6 – pohyb kapky 17
Příklad 7 – pohyb po válci 18
Cvičení 2 – kužel 18

4 Souřadnice a komplexní čísla **19**
Příklad 8 – vektory v kartézské soustavě souřadnic 20
Příklad 9 – komplexní čísla v algebraickém tvaru 20
Příklad 10 – polární soustava souřadnic 20
Příklad 11 – komplexní čísla v goniometrickém tvaru 21

5 Těžišťová souřadnicová soustava **22**

Výsledky cvičení **24**

Literatura **24**

Úvod

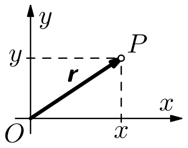
V běžném každodenním životě se často setkáváme s potřebou popsat polohu nějakého tělesa. Asi nejběžnější způsob popisu polohy tělesa v praktickém životě je popis polohy tělesa vůči nějakému jinému tělesu. Pak mluvíme o tzv. *vzájemném pohybu* těles. S tímto způsobem popisu polohy těles ale nevystačíme ve fyzice, kde ze zabýváme různými i složitějšími situacemi. Ve fyzice potřebujeme udat polohu tělesa proto, abychom pak mohli popisovat také pohyb tělesa.

Místo toho, abychom určili pohyb tělesa uvedením jeho polohy vůči nějakému jinému tělesu, postupujeme tak, že toto *referenční* (*vztažné*) *těleso* reprezentujeme *vztažnou soustavou* S. Za vztažnou soustavu volíme zpravidla soustavu pravoúhlých (kartézských) souřadnic. Ve fyzice se ale v mnoha případech jeví jako výhodné pracovat i s jinými než kartézskými souřadnicemi.

V tomto textu si ukážeme použití různých (nejčastěji používaných) soustav souřadnic k popisu konkrétních fyzikálních situací, se kterými se setkáváme v praktickém životě.

1 Popis soustav souřadnic

Jak již jsme si řekli v úvodu, každý pohyb ve fyzice popisujeme vzhledem k nějaké vztažné soustavě – tři prostorové a jedna časová souřadnice. Budeme-li např. uvažovat pohyb v rovině, můžeme v této rovině zvolit počátek O a dvě vzájemně kolmé osy *kartézských souřadnic*[1] x, y, zkráceně někdy zapisujeme soustava Oxy. Na osách x, y pak vynášíme souřadnice bodů v rovině.



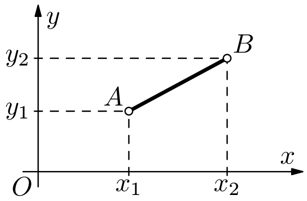
Obr. 1 Kartézská soustava souřadnic

Vzdálenost bodu P od počátku O pak bude rovna

$$r = |\boldsymbol{r}| = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

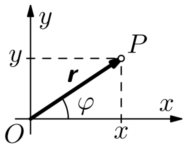
Budou-li se v kartézské soustavě souřadnic nacházet dva body $A = [x_1; y_1]$, $B = [x_2; y_2]$, pak pro vzdálenost těchto dvou bodů platí (obr. 2)

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Obr. 2 Vzdálenost dvou bodů

V celé řadě situací ovšem s těmito souřadnicemi nevystačíme a ukazuje se jako výhodné místo kartézských souřadnic používat *souřadnice polární* (obr. 3).



Obr. 3 Polární souřadnice

Polární souřadnice jsou určeny pomocí vzdálenosti bodu od počátku $r > 0$ a polárním úhlem $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$, který odčítáme od dané poloosy x vycházející z počátku proti směru hodinových ručiček.

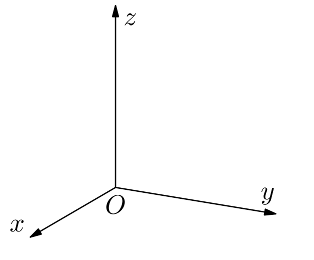
Mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí vztahy

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

[1] Název této soustavy pochází z latiny (latinsky *Cartesia*) od francouzského matematika *René Descarta*.

Od souřadnic v rovině pak můžeme také přejít k souřadnicím v prostoru. V prostoru opět zavedeme kartézské souřadnice a analogicky jako v rovině můžeme psát pro vzdálenost bodu od počátku vztah

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Obr. 4 Pravotočivá kartézská soustava souřadnic

Vzdálenost dvou bodů je pak dána vztahem

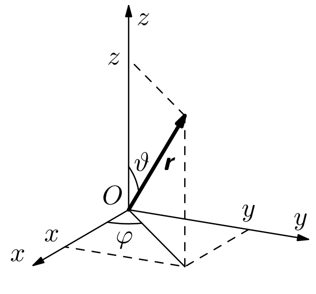
$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Obecně existují dvě kartézské soustavy souřadnic: pravotočivá a levotočivá. Ve fyzice budeme používat pouze soustavu pravotočivou, která je znázorněna na obr. 4.

Pokud bychom ve fyzice dostali situaci, kdy soustava bude vykazovat válcovou symetrii (např. elektrické pole nabitého vodiče), bude výhodnější používat válcové souřadnice R a φ v rovině kolmé na podélnou osu válce a kartézskou souřadnici z ve směru podélné osy válce. Pro válcové souřadnice platí vztahy

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z.$$

Posledním typem souřadnic, kterými se budeme zabývat, jsou souřadnice sférické r, φ, ϑ (obr. 5).



Obr. 5 Sférické souřadnice

Souřadnice $r \geq 0$ představuje vzdálenost bodu od počátku, $0 \leq \varphi < 2\pi$ je polární úhel v rovině xy měřený od osy x a $0 \leq \vartheta < \pi$ je úhel odčítaný od směru osy z (obr. 5).
Porovnáme-li tyto úhly se zeměpisnými souřadnicemi, můžeme říci, že úhel φ ve stupních určuje zeměpisnou délku odčítanou od nulového poledníku východním směrem do $360°$ a ϑ měřený ve stupních určuje zeměpisnou šířku (avšak odčítanou nikoli od rovníku, ale od severního pólu).

Chceme-li převést sférické souřadnice do souřadnic kartézských, platí

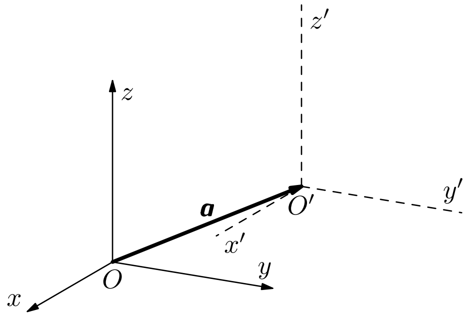
$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\vartheta,$$

jak lze snadno nahlédnout z obr. 5. Opačný převod je možno psát ve tvaru

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ve fyzice také sledujeme, jak se mění matematické vyjádření jednotlivých fyzikálních veličin při *transformacích souřadnic*.

Budeme uvažovat kartézské souřadnice v prostoru a budeme je transformovat. Přitom budeme uvažovat pouze *euklidovské transformace*, při kterých se zachovává vzdálenost mezi dvěma body a úhly mezi dvěma směry. Taková transformace může být např. *translace* – rovnoběžné posunutí všech tří os do nového počátku.



Obr. 6 Translace

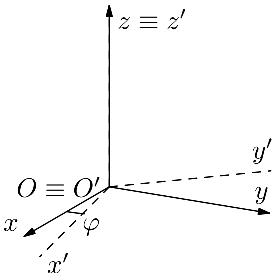
Označíme-li $\boldsymbol{a}$ vektor spojující původní počátek O s novým počátkem O', dostaneme transformační vztahy

$$x' = x - a_x,$$

$$y' = y - a_y,$$

$$z' = z - a_z.$$

Jiným důležitým případem transformace je *rotace* – pootočení jedné kartézské soustavy souřadnic vůči druhé, přičemž obě mají týž počátek $O \equiv O'$.



Obr. 7 Rotace

V tomto případě lze odvodit transformační vztahy

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

$$z' = z,$$

a opačně

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

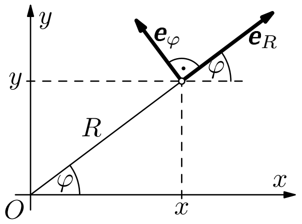
$$z = z'.$$

2 Rychlost a zrychlení

V této části si ukážeme, jak počítat rychlost a zrychlení v různých soustavách souřadnic (v kartézské soustavě souřadnic již toto umíme, a proto se více zaměříme na ostatní soustavy souřadnic).

2.1 Rychlost a zrychlení v polárních souřadnicích

V této části se zaměříme na to, abychom si ukázali, jak se určí složky rychlosti a zrychlení v polárních souřadnicích.



Obr. 8 Polární souřadnice

Vztah mezi polárními souřadnicemi R, φ a kartézskými x, y je dán rovnicemi

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi,$$

potom lze také psát

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Nejprve budeme hledat složky vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ a zrychlení $\boldsymbol{a}$ v souřadné soustavě, jejíž osy budou pro každý bod dány směrem rostoucích souřadnic R a φ. Tyto osy jsou navzájem kolmé (obr. 8).

Označme složky vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{v}$ do směru rostoucí souřadnice R jako v_R, a_R a složky do směru rostoucího φ jako v_φ, a_φ. Pro složky v_R, v_φ, a_R, a_φ vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{a}$ platí vztahy

$$v_R = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_R, \quad v_\varphi = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi, \quad a_R = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_R, \quad a_\varphi = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{1}$$

Pro kartézské složky v_x, v_y vektoru $\boldsymbol{v}$ pak můžeme psát

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\cos\varphi) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\cos\varphi - R\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \\ v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\sin\varphi) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\cos\varphi + R\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \tag{2}$$

a pro kartézské složky a_x, a_y vektoru $\boldsymbol{a}$ platí

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} - R\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\cos\varphi - \left[2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\sin\varphi, \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} - R\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\sin\varphi + \left[2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Z obr. 8 můžeme určit kartézské složky vektorů $\boldsymbol{e}_R$ a $\boldsymbol{e}_\varphi$:

$$e_{Rx} = \cos\varphi, \quad e_{Ry} = \sin\varphi, \quad e_{\varphi x} = -\sin\varphi, \quad e_{\varphi y} = \cos\varphi. \tag{4}$$

Po dosazení (3), (4) do (1) dostaneme

$$v_R = v_x e_{Rx} + v_y e_{Ry},$$

$$v_R = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\cos^2\varphi - R\sin\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\sin^2\varphi + R\sin\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t},$$

$$v_\varphi = v_x e_{\varphi x} + v_y e_{\varphi y},$$

$$v_\varphi = -\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\sin\varphi\cos\varphi + R\sin^2\varphi + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\sin\varphi\cos\varphi + R\cos^2\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Potom

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 + R^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2}.$$

Po dosazení (3) a (4) do (1) dále obdobným způsobem jako v předchozím případě dostaneme

$$a_R = \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} - R\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

$$a_\varphi = 2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right).$$

Poznámka

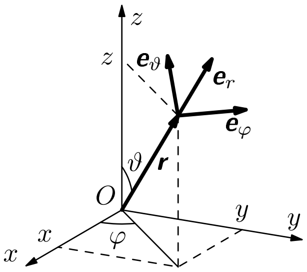
Pokud bychom od polárních souřadnic R, φ chtěli přejít k válcovým souřadnicím R, φ, z (v prostoru), platí pro v_R, v_φ, a_R, a_φ stejné výrazy jako pro polární souřadnice v rovině, a přistupují další jednoduché vztahy

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$$

2.2 Rychlost a zrychlení ve sférických souřadnicích

Vztahy mezi kartézskými souřadnicemi x, y, z a sférickými souřadnicemi r, φ, ϑ jsou dány rovnicemi (obr. 9)

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta. \tag{5}$$



Obr. 9 Sférické souřadnice

Pro sférické souřadnice lze analogickým postupem jako v případě souřadnic válcových odvodit vztahy

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\ v_\vartheta = r\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t},\ v_\varphi = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\sin\vartheta, \tag{6}$$

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left[\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\sin^2\vartheta\right],$$

$$a_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$a_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\sin^2\vartheta. \tag{7}$$

Nyní si ukážeme několik úloh, kde lze s výhodou použít výše popsané typy souřadnic.

Příklady

Příklad 1 – trajektorie pohybu hmotného bodu

Pohyb hmotného bodu je dán parametrickými rovnicemi

$$x = kt\cos\omega t, \quad y = kt\sin\omega t.$$

Určete složky rychlosti a zrychlení bodu v polárních souřadnicích. Návod: nejprve vyjádřete v polárních souřadnicích parametrické rovnice pohybu, pak rychlost a zrychlení.

Řešení

Označíme-li $R = kt$, $\varphi = \omega t$, pak můžeme psát $R = \dfrac{k}{\omega}$. Trajektorií pohybu je Archimédova spirála. Použitím vztahů (2) a (3) dostaneme

$$v_R = k, \quad a_R = \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} - R\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -kt\omega^2,$$

$$v_\varphi = kt\omega, \quad a_\varphi = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right) = 2k\omega.$$

Příklad 2 – kuželosečky

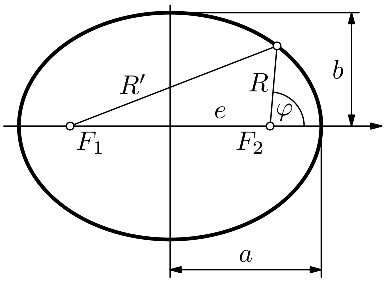
Dokažte, že rovnice

$$R = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \tag{8}$$

je rovnicí kuželoseček v polárních souřadnicích R, φ. Počátek soustavy souřadnic $R = 0$ je v ohnisku kuželoseček. Určete velikost ε pro elipsu, parabolu a hyperbolu.

Řešení

1. Pro elipsu



Obr. 10 Elipsa

Z definice elipsy dostaneme

$$R + R' = 2a.$$

Podle obr. 10 můžeme psát

$$R'^2 = (2e + R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi.$$

Po dosazení za $R' = 2a - R$ z první rovnice dostaneme

$$(R-2a)^2 = (2e + R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi,$$

po úpravě

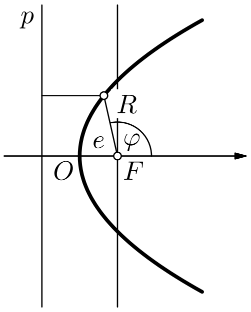
$$R(a + e\cos\varphi) = (a^2 - e^2),$$

z čehož

$$R = \frac{\frac{b^2}{a}}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{9}$$

Při úpravě na vztah (9) z předchozího výrazu jsme užili rovnosti $b^2 = a^2 - e^2$ a označili jsme $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Výraz $\frac{e}{a} < 1$, a proto je pro elipsu také $\varepsilon < 1$. Z porovnání rovnice (8) a (9) je také vidět, že $p = \frac{b^2}{a}$.

2. Pro parabolu



Obr. 11 Parabola

Z definice paraboly dostaneme

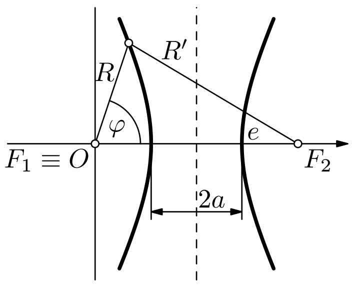
$$R = (e - R\cos\varphi) + e,$$

z čehož

$$R = \frac{2e}{1+\cos\varphi}. \tag{10}$$

Porovnáme-li rovnici (8) s rovnicí (10), dostaneme $\varepsilon = 1$, $p = 2e$.

3. Pro hyperbolu



Obr. 12 Hyperbola

Podle definice hyperboly platí

$$R' - R = 2a.$$

Dále platí také kosinová věta

$$R'^2 = (2e)^2 + R^2 - 4Re\cos\varphi.$$

Po dosazení za $R' = 2a + R$ z prvního vztahu dostaneme

$$(2a+R)^2 = 4e^2 + R^2 - 4Re\cos\varphi.$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{b^2}{a} = R\left(1 + \frac{e}{a}\cos\varphi\right),$$

z čehož

$$R = \frac{\dfrac{b^2}{a}}{1 + \dfrac{e}{a}\cos\varphi}. \tag{11}$$

Označíme-li (obdobně jako v případě elipsy) $p = \dfrac{b^2}{a}$, $\varepsilon = \dfrac{e}{a} > 1$, dostaneme rovnici (8).

Příklad 3 – pohyb po povrchu Země

Stanovte parametrické rovnice, složky rychlosti v_r, v_ϑ, v_φ a složky zrychlení a_r, a_ϑ, a_φ ve sférických souřadnicích pro pohyb hmotného bodu pohybujícího se rovnoměrně po povrchu Země (budeme předpokládat, že Země má tvar ideální koule o poloměru R) ve směru a) poledníku, b) rovnoběžky, c) severozápadním.

Řešení

Při řešení použijeme vztahy (5) a (6). Po dosazení dostaneme
a)

$$r = R, \quad v_r = 0, \quad a_r = -Rk^2 = -\frac{v^2}{R},$$

$$\vartheta = kt + v_0, \quad v_\vartheta = Rk, \quad a_\vartheta = 0,$$

$$\varphi = \varphi_0, \quad v_\varphi = 0, \quad a_\varphi = 0,$$

kde R je poloměr Země, k, ϑ_0, φ_0 jsou konstanty, v je velikost vektoru rychlosti.

b)

$$r = R, \quad v_r = 0, \quad a_r = -Rk^2\sin^2\vartheta_0 = -\frac{v^2}{R},$$

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad v_\varphi = Rk\sin\vartheta, \quad a_\varphi = 0,$$

$$\varphi = \varphi_0 + kt, \quad v_\vartheta = 0, \quad a_\vartheta = -Rk^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0,$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_\vartheta^2} = \sqrt{(-Rk^2\sin^2\vartheta_0)^2 + (-Rk^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0)^2},$$

$$|\boldsymbol{a}| = Rk^2\sin\vartheta_0 = \frac{v^2}{R\sin\vartheta_0}.$$

c) Vyjdeme z rovnic pro rychlost

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\sin\vartheta = Rk, \quad v_\vartheta = R\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = Rk.$$

Z poslední rovnice dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = k, \text{ po integraci } \vartheta = \vartheta_0 + kt.$$

Dále máme

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = k\frac{1}{\sin\vartheta} = k\frac{1}{\sin(\vartheta_0 + kt)}.$$

Po integraci dostaneme

$$\varphi = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{kt+\vartheta_0}{2}\right| + \varphi_0.$$

Ze vztahu $v_r = 0$ po integraci dostaneme $r = R$.
Zrychlení
$a_r = -2Rk^2 = -\dfrac{v^2}{R}$, $a_\varphi = k^2R\mathrm{cotg}\,(kt+\vartheta_0)$, $a_\vartheta = -Rk^2\mathrm{cotg}\,(kt+\vartheta_0)$.
Potom

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_\vartheta^2} = \sqrt{2}Rk^2\sqrt{2+\mathrm{cotg}^2\,(kt+\vartheta_0)},$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v^2}{R}\sqrt{2+\mathrm{cotg}^2\,(kt+\vartheta_0)}.$$

Pokud se $(kt+\vartheta_0) \to \pi$, pak $\varphi \to \infty$, což odpovídá spirálovitému přibližování pohybujícího se bodu k pólu. Vyšetřování pohybu je tedy nutno omezit na interval $0 < \vartheta < \pi$.

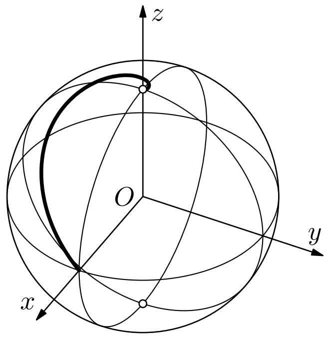
Položíme-li $\vartheta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, tj. budeme uvažovat, že pohyb začíná na rovníku a $\varphi_0 = 0$ (pohyb začíná na ose x), dostaneme vztahy

$$\vartheta = kt + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{kt}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Konstanta k představuje rychlost změny úhlu ϑ v závislosti na čase. Má-li bod dosáhnout severního pólu z rovníku např. za 1 den = 24 hod, potom ze vztahu $\vartheta = \frac{\pi}{2} + kt$ dostaneme

$$0 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 24 \Rightarrow k = -\frac{\pi}{48}\ \mathrm{hod}^{-1}.$$

Graficky lze níže uvedenou situaci znázornit na obr. 13.



Obr. 13 Pohyb po Zemi

Příklad 4 – odstředivý stroj

Vodorovný drát na odstředivém stroji se otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω. Po něm bez tření klouže kulička o hmotnosti m, jejíž vzdálenost od osy je v čase $t = 0$ s rovna r_0.

a) Jaká je trajektorie pohybu kuličky?

b) Určete kolmou tlakovou sílu, která působí při tomto pohybu kuličky na drát.

Řešení

a) Polohu kuličky popíšeme pomocí polárních souřadnic. Sílu působící na kuličku při radiálním pohybu po drátu lze vyjádřit vztahem

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = m\omega^2 r \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 r,$$

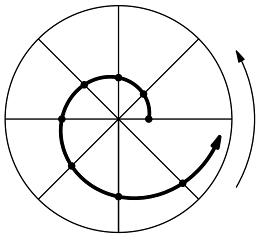
což je diferenciální rovnice 2. řádu. Řešením této rovnice je např. partikulární integrál

$$r = K\mathrm{e}^{\omega t}.$$

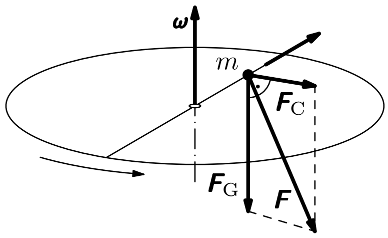
(Sami se přesvědčte, že tento partikulární integrál vyhovuje výše popsané diferenciální rovnici.) Z podmínky, že v čase $t = 0$ s je $r = r_0$ dostaneme, že $K = r_0$. Potom

$$r = r_0\mathrm{e}^{\omega t},$$

což je rovnice logaritmické spirály.



Obr. 14 Logaritmická spirála



Obr. 15 K výpočtu tlakové síly

b) Kolmá tlaková síla na drát bude jednak způsobena *Coriolisovou silou*

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{C} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v},$$

která působí v rovině proti směru otáčení – obr. 15 (viz např. text *Skaláry, vektory, ...* str. 18). Její velikost je dána vztahem

$$F_\mathrm{C} = 2m\omega \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2m\omega^2 r_0 \mathrm{e}^{\omega t}.$$

Druhou silou, která přispívá k výsledné tlakové síle působící kolmo na drát, je síla tíhová $\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = m\boldsymbol{g}$, která směřuje svisle dolů (obr. 15). Výslednicí těchto dvou sil je kolmá tlaková síla, jejíž velikost je dána vztahem

$$F = m\sqrt{g^2 + 4\omega^4 r_0^2 \mathrm{e}^{2\omega t}}.$$

Příklad 5 – eliptický pohyb

Pohyb hmotného bodu je dán parametricky rovnicemi

$$x = A \sin \omega t, \quad y = B \sin(\omega t + \alpha).$$

Napište rovnici tohoto pohybu v polárních souřadnicích a určete plošnou rychlost pohybu $v_\mathrm{P} = \frac{1}{2} R^2 \left| \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right|$.

Řešení

V polárních souřadnicích můžeme psát

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \sin^2(\omega t + \alpha)},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{B \sin(\omega t + \alpha)}{A \sin \omega t}.$$

Pro výpočet plošné rychlosti nejprve určíme

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{arctg}\,\frac{B\sin(\omega t+\alpha)}{A\sin\omega t},$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+\dfrac{B^2\sin^2(\omega t+\alpha)}{A^2\sin^2\omega t}}\,\frac{B\omega\cos(\omega t+\alpha)A\sin\omega t - BA\omega\sin(\omega t+\alpha)\cos\omega t}{A^2\sin^2\omega t},$$

po úpravě

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{AB\omega\sin\alpha}{R^2}.$$

Plošná rychlost je pak dána vztahem

$$v_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}R^2\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}AB\sin\alpha = konst.$$

Poznámka

Trajektorií tohoto pohybu je elipsa, jedná se tedy o eliptický pohyb, při němž je velikost plošné rychlosti konstantní, tj. $v_{\mathrm{P}} = konst.$. Připomeňme si, že pro tento druh pohybu platí 2. Keplerův zákon.

Cvičení 1

Hmotný bod se pohybuje konstantní úhlovou rychlostí o velikosti ω po logaritmické spirále, která má v polárních souřadnicích rovnici

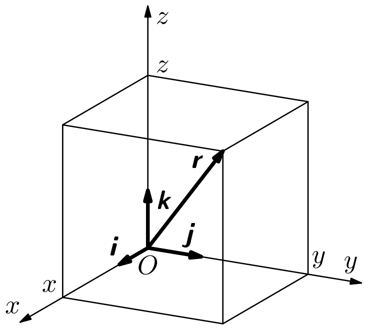
$$R = A\mathrm{e}^{b\varphi},$$

kde $A > 0$, $b > 0$ jsou konstanty. Napište závislost změny velikosti zrychlení v závislosti na R.

3 Vektorový popis polohy bodu v různých soustavách souřadnic

Doposud jsme se zabývali popisem polohy těles při pohybu ve složkových tvarech. Nyní si ukážeme, jak lze vše shrnout do jediné rovnice.

Kartézská soustava souřadnic



Obr. 16 Kartézská soustava souřadnic

V kartézské soustavě souřadnic zavádíme jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ve směru příslušných souřadnicových os x, y, z (obr. 16). Polohu hmotného bodu je pak možno popsat pomocí jediné rovnice

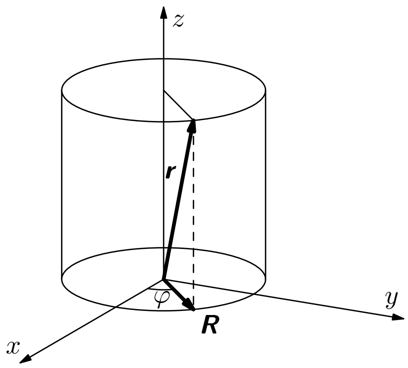
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Obdobně lze také popsat rychlost a zrychlení

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}.$$

Válcová soustava souřadnic



Obr. 17 Válcová soustava souřadnic

Přechod mezi kartézskou a válcovou soustavou souřadnic popisují vztahy

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z.$$

Pak můžeme psát

$$\boldsymbol{r} = R\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + R\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Sférická soustava souřadnic

Podle kapitoly 2.2 lze psát

$$\boldsymbol{r} = r\sin\vartheta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r\cos\vartheta\,\boldsymbol{k},$$

nebo

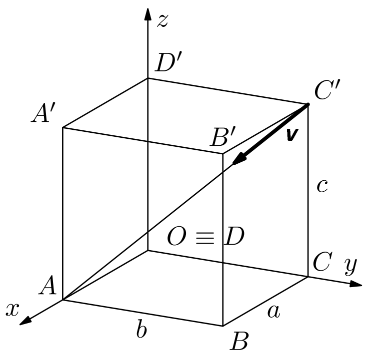
$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \vartheta\boldsymbol{e}_\vartheta.$$

Obdobným způsobem bychom postupovali v případě rychlosti a zrychlení.

Příklad 6 – pohyb kapky

Kapka stéká konstantní rychlostí velikosti $v = 0{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ po tělesové úhlopříčce kvádru o hranách $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 5$ m. V čase $t = 0$ s byla kapka v horním vrcholu C' (obr. 18) a směřovala k dolnímu vrcholu A, který leží v počátku soustavy souřadnic. Popište průběh polohy kapky pomocí $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Řešení



Obr. 18 Pohyb kapky

Velikost úhlopříčky

$$u = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 5\sqrt{2}\ \mathrm{m}.$$

Rychlost $\boldsymbol{v}$ můžeme rozložit do složek

$$v_x = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}v,$$

$$v_y = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}v,$$

$$v_z = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}v.$$

Polohový vektor kapky je pak dán vztahem

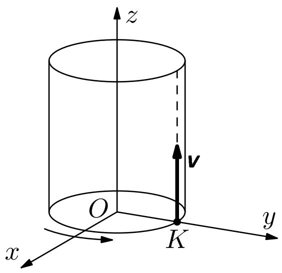
$$\boldsymbol{r} = \left(A - \frac{av}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}t\right)\boldsymbol{i} + \left(b - \frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}t\right)\boldsymbol{j} + \left(c - \frac{cv}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}t\right)\boldsymbol{k}.$$

Pro dané hodnoty je

$$\boldsymbol{r} = (3 - 0{,}03\sqrt{2}t)\boldsymbol{i} + (4 - 0{,}04\sqrt{2}t)\boldsymbol{j} + (5 - 0{,}05\sqrt{2}t)\boldsymbol{k}.$$

Příklad 7 – pohyb po válci

Bod K se pohybuje rovnoměrně rychlostí velikosti $v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ po povrchové přímce válce (obr. 19). Válec o poloměru $R = 1$ m se otáčí rovnoměrně tak, že vykoná 1 otočku za 1 sekundu. Zvolte vhodně soustavu souřadnic, pak popište polohu bodu K pomocí funkce $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Pohyb bodu K začíná na ose y.



Obr. 19 Pohyb po povrchu válce

Řešení

Úhlová rychlost otáčení válce je $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

$$\{x\} = R\sin(\omega t + \varphi_0) = 1 \cdot \sin\left(2\pi\{t\} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2\pi\{t\}).$$

$$\{y\} = R\cos(\omega t + \varphi_0) = 1 \cdot \cos\left(2\pi\{t\} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2\pi\{t\}).$$

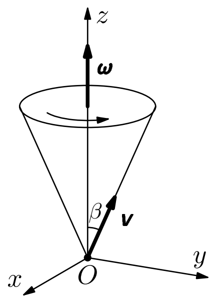
$$\{z\} = vt = \{t\}.$$

Potom

$$\boldsymbol{r} = \cos(2\pi\{t\})\boldsymbol{i} - \sin(2\pi\{t\})\boldsymbol{j} + \{t\}\boldsymbol{k}.$$

Cvičení 2 – kužel

Hmotný bod se pohybuje rovnoměrně rychlostí $\boldsymbol{v}$ po povrchové přímce kužele tak, že pohyb začíná ve vrcholu kužele. Povrchová přímka svírá s osou otáčení úhel β a kužel se otáčí kolem své osy stálou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ (obr. 20). Popište polohu hmotného bodu pomocí funkce $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v = 1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\beta = \dfrac{\pi}{6}$, $\omega = \dfrac{\pi}{2}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.



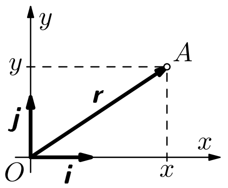
Obr. 20 Pohyb po povrchu kužele

4 Souřadnice a komplexní čísla

Kartézská soustava souřadnic v rovině a komplexní čísla

V této části si ukážeme způsob zavedení komplexních čísel přechodem z kartézské soustavy souřadnic. Na obr. 21 je znázorněna kartézská soustava souřadnic. V kartézské soustavě souřadnic je poloha bodu A určena pomocí polohového vektoru

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.$$

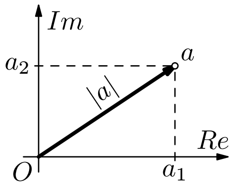


Obr. 21 Kartézská soustava souřadnic

Pokud bychom nyní kartézskou soustavu souřadnic nahradili Gaussovou rovinou pro znázornění komplexních čísel, mohli bychom analogicky psát

$$a = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot i,$$

kde jsme jednotkový vektor $\boldsymbol{i}$ nahradili 1 (tu už ale dále nebudeme psát), jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$ jsme nahradili imaginární jednotkou i.



Obr. 22 Gaussova rovina

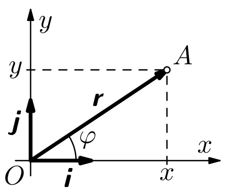
Dostali jsme tzv. *algebraický tvar* komplexního čísla. Velikost komplexního čísla pak můžeme počítat stejně jako velikost vektoru, tj.

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

S komplexními čísly je pak možno počítat stejným způsobem jako s vektory (viz studijní text *Skaláry, vektory, . . .*).

Polární soustava souřadnic v rovině a komplexní čísla

V úvodní části tohoto textu jsme si ukázali, jak je možno zavést popis polohy hmotného bodu pomocí polárních souřadnic.



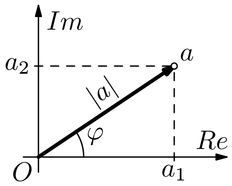
Obr. 23 Polární souřadnice

Připomeňme si, že $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$. Potom

$$\boldsymbol{r} = R\cos\varphi\boldsymbol{i} + R\sin\varphi\boldsymbol{j},$$

kde $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Obdobně jako v předchozí části nyní nahradíme kartézskou soustavu souřadnic Gaussovou rovinou, jednotkový vektor $\boldsymbol{i}$ číslem 1, jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$ imaginární jednotkou.



Obr. 24 Gaussova rovina

Pak můžeme psát

$$a = |a| \cos \varphi + i|a| \sin \varphi,$$

kde $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{a_2}{a_1}$. Dostali jsme komplexní číslo v tzv. *goniometrickém tvaru*.
S komplexními čísly pak můžeme pracovat obdobným způsobem jako s vektory.

Příklad 8 – vektory v kartézské soustavě souřadnic

Jsou dány vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$. Určete skalární součin vektorů $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$.

Řešení

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) \cdot (4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = 12\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + 16\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 24$,
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) \cdot (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) = 25$.

Příklad 9 – komplexní čísla v algebraickém tvaru

Jsou dána komplexní čísla $a = 3 + 4i$, $b = 4 + 3i$. Určete součin komplexních čísel $a \cdot b$, $a \cdot a$.

Řešení

$a \cdot b = (3 + 4i) \cdot (4 + 3i) = 12 + 9i + 16i + 12i^2 = 25i$,
$a \cdot a = (3 + 4i) \cdot (3 + 4i) = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i$.

Všimněte si, že u příkladů 8 a 9 jsme postupovali stejným způsobem, a to tak, že jsme násobili jednotlivé členy mezi sebou.

Příklad 10 – polární soustava souřadnic

Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3 \cos 30° \boldsymbol{i} + 3 \sin 30° \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 4 \cos 60° \boldsymbol{i} + 4 \sin 60° \boldsymbol{j}$. Určete skalární součin vektorů $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$.

Řešení

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (3 \cos 30° \boldsymbol{i} + 3 \sin 30° \boldsymbol{j}) \cdot (4 \cos 60° \boldsymbol{i} + 4 \sin 60° \boldsymbol{j}) = 12\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} \cos 30° \cos 60° +$
$+ 12\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} \sin 30° \sin 60° + 12\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} \sin 30° \cos 60° + 12\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} \cos 30° \sin 60° =$
$= 12\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} \cos(60° - 30°) + 12\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} \sin(30° + 60°) = 6\sqrt{3}$.
Obdobně bychom určili $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 9$.

Příklad 11 – komplexní čísla v goniometrickém tvaru

Jsou dána komplexní čísla $a = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$, $b = 4(\cos 60° + i \sin 60°)$. Určete $a \cdot b$, $a \cdot a$.

Řešení

$a \cdot b = 3(\cos 30° + i \sin 30°) \cdot 4(\cos 60° + i \sin 60°) =$
$= 12(\cos 30° \cos 60° + i^2 \sin 30° \sin 60° + i \sin 30° \cos 60° + i \sin 60° \cos 30°) =$
$= 12[\cos(60° + 30°) + i \sin(60° + 30°)] = 12(\cos 90° + i \sin 90°) = 12i.$

$a \cdot a = 3^2(\cos 30° + i \sin 60°)^2 = 9[\cos(30° + 30°) + i \sin(30° + 30°)] =$
$= 9(\cos 60° + i \sin 60°) = 9\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

Poznámka

Zobecněním příkladu 11 lze dojít ke vztahům pro násobení komplexních čísel:

$$a = |a|(\cos\alpha + i \sin\alpha), \quad b = |b|(\cos\beta + i \sin\beta).$$

Potom

$$a \cdot b = |a||b|[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)],$$

což je také základem při odvozování goniometrických součtových vzorců. Analogicky lze odvodit také vztah

$$a^n = |a|^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha),$$

což je tzv. *Moivreova věta*.

5 Těžišťová souřadnicová soustava

Při jaderných reakcích ostřelovací částice narážejí na nehybná jádra terče. V takovýchto situacích můžeme rozbor těchto srážek značně zjednodušit použitím souřadnicového systému, který se pohybuje s těžištěm soustavy těles, která na sebe vzájemně působí při srážce.

V jaderné fyzice se často setkáváme se situací, kdy částice o hmotnosti m_1, která se pohybuje v kladném směru osy x narazí do částice o hmotnosti m_2, která byla původně v klidu.

Je-li částice 1 na ose x v místě o souřadnici x_1 a částice 2 rovněž na ose x v místě o souřadnici x_2, pak je poloha těžiště obou částic dána vztahem

$$(m_1 + m_2)x = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

Budeme se zabývat situací, kdy se částice pohybují malými rychlostmi, tj. nebudeme uvažovat relativistické efekty. Zderivujeme-li výše uvedenou rovnici podle času, dostaneme

$$(m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m_1 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}.$$

Označíme-li $v_1 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$, $v_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 0$, $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, můžeme pro velikost rychlosti pohybu v těžiště napsat vztah

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Pohyb částic budeme dále vyšetřovat z hlediska pozorovatele umístěného v těžišti a pohybujícího se společně s těžištěm. Tento pozorovatel vidí částici 1, jak se k němu přibližuje rychlostí $(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v})$, kdežto částice zleva se k němu přibližuje rychlostí $\boldsymbol{v}$. V těžišťové soustavě pro celkovou hybnost můžeme psát

$$m_1(v_1 - v) - m_2 v = m_1 v_1 - m_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 - m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Soustava je izolovaná, a proto v ní platí zákon zachování hybnosti, tj. je-li celková hybnost soustavy před srážkou rovna nule, musí být rovna nule i po srážce. Proto se po interakci v těžišťové soustavě musí obě částice pohybovat od sebe se stejně velkými hybnostmi, ale s opačnou orientací.

V těžišťové soustavě má i kinetická energie jinou velikost než v soustavě laboratorní. Pro těžišťovou soustavu můžeme psát

$$E'_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1(v_1 - v)^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - m_1 v_1 v + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - m_1 \frac{m_1 + m_2}{m_1} v^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2.$$

Naproti tomu v laboratorní soustavě je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2.$$

Můžeme tedy psát, že

$$E_\mathrm{k}' = E_\mathrm{k} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2.$$

Mezi oběma soustavami tedy platí, že celková kinetická energie částice v těžišťové soustavě je rovna celkové kinetické energii částic v laboratorní soustavě zmenšené o hodnotu $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$. Proto se často považuje kinetická energie E_k' za energii relativního pohybu částic. Poměr

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = 1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1}\frac{v^2}{v_1^2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Podívejme se dále, jak by vypadal v těžišťové soustavě popis dokonale pružné srážky. Při dokonale pružné srážce nedochází ke ztrátě kinetické energie. Označme čárkovaně rychlosti pohybu částic po srážce. Po srážce tedy můžeme psát

$$m_1 v_1' = m_2 v_2',$$

$$\frac{1}{2}m_1(v_1 - v)^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_1(v_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2')^2.$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$v_1' = v_1 - v,\ v_2' = v.$$

Částice se tedy v těžišťové soustavě od sebe vzdalují stejně velkou rychlostí, jakou přiletěly.

Při nepružné srážce se část kinetické energie rozptyluje (např. ve formě tepla).

Při dokonale nepružné srážce opět platí zákon zachování hybnosti a tedy můžeme v těžišťové soustavě psát

$$m_1 v_1' = m_2 v_2' = 0,$$

z čehož $v_1' = v_2' = 0$.

V tomto případě už ale neplatí zákon zachování mechanické energie. Obě částice ztratí veškerou svou kinetickou energii vzhledem k těžišti. V tomto případě dochází k maximálnímu poklesu kinetické energie. Kinetická energie soustavy po srážce je vzhledem k těžišťové soustavě rovna nule. Maximální pokles kinetické energie E_k' při srážce je pak dán vztahem

$$E_\mathrm{k}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}E_\mathrm{k}.$$

Výsledky cvičení

Cvičení 1

$v_R = Ab\omega e^{b\omega t}$, $v_\varphi = A\omega e^{b\omega t}$, $a_R = A\omega^2 e^{b\omega t}(b^2 - 1)$, $a_\varphi = 2Ab\omega^2 e^{b\omega t}$.
$a = \sqrt{a_R^2 + a_\varphi^2} = A\omega^2(b+1)e^{b\omega t} = \omega^2 R(b+1)$.

Cvičení 2

$x = vt \sin\varepsilon \sin\omega t$, $y = vt \sin\varepsilon \cos\omega t$, $z = vt\cos\varepsilon$.
$\boldsymbol{r} = vt \sin\varepsilon \sin\omega t\, \boldsymbol{i} + vt\sin\varepsilon\cos\omega t\, \boldsymbol{j} + vt\cos\varepsilon\, \boldsymbol{k}$.
Pro dané hodnoty:
$\boldsymbol{r} = \{t\} \sin\frac{\pi}{6} \sin\frac{\pi}{2}\{t\}\boldsymbol{i} + \{t\}\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}\{t\}\boldsymbol{j} + \{t\}\cos\frac{\pi}{6}\boldsymbol{k}$,
$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\{t\}\sin\frac{\pi}{2}\{t\}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\{t\}\cos\frac{\pi}{2}\{t\}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\{t\}\boldsymbol{k}$.

Literatura

[1] Beiser, A.: *Úvod do moderní fyziky.* Academia, Praha 1975.

[2] Brdička, M., Hladík, A.: *Teoretická mechanika.* Academia, Praha 1987.

[3] Havránek, A.: *Příklady z mechaniky.* SPN, Praha 1976.

[4] Vojtěch, J.: *Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1959.