MATEMATIKA KŘIVEK

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Miroslava Jarešová – Ivo Volf

Obsah

Úvod - proč se zabývat křivkami

Pojem křivka je jeden z nejdůležitějších matematických pojmů. Je také zároveň jedním z těch matematických pojmů, které se nejčastěji vyskytují v aplikacích v denním životě.

Přestože je tento pojem velmi důležitý, jeho objasnění se s vývojem různých vědních oborů neustále zpřesňuje. Z hlediska fyziky je zajímavá např. charakterizace křivky jako trajektorie pohybujícího se bodu. Z hlediska této charakteristiky je tedy možno říci, že křivka je trajektorie, kterou proběhne v určitém časovém intervalu bod, který se spojitě pohybuje, neboli jinak řečeno (pojmeme-li charakteristiku křivky z hlediska matematiky jako zobrazení), že křivka je spojitým obrazem úsečky. Při používání této definice křivky se ale ukázalo (z hlediska matematiky), že tato definice je příliš široká. Italský matematik *Peano* ukázal již v roce 1890, že existuje spojité zobrazení úsečky na čtverec, jinými slovy, že dráha hmotného bodu, který se spojitě pohybuje, může vyplňovat celý čtverec. Toto spojité zobrazení ale není vzájemně jednoznačné, tj. pohybující se bod projde některými body čtverce několikrát.

Modernější (přesnější) definici křivky podal rakouský matematik *Menger* v roce 1921 a nezávisle na něm téměř současně sovětský matematik *Urysohn*. Jejich definici lze uvést asi takto: *křivka je kontinuum, jehož libovolné dva body se dají oddělit množinou neobsahující již žádné kontinuum.*

Vývoj pojmu křivka ovšem tímto zdaleka nekončí, charakteristika pojmu křivka se neustále zpřesňuje. V současné době se definice křivky provádí pomocí tzv. *variet*.

Toto byl pouhý nástin historického vývoje tohoto pojmu, jehož počátky zasahují do starověkého Řecka. Cílem tohoto textu ale není rozbor tohoto pojmu, ale zaměřit se spíš na konkrétní křivky, napsat jejich rovnice, podat stručnou informaci o historii křivek – vytvořit příručku ve smyslu „průvodce křivkami“. Vzhledem k omezenému rozsahu textu se jedná v této „papírové“ podobě pouze o matematický popis a přehled. Podstatně více k těmto křivkám je obsaženo na přiloženém CD ROMu, kde je i přehled aplikací ve fyzice i v praktickém životě, jsou zde i v podstatně větší míře řešené úlohy týkající se jednotlivých křivek, na CD ROMu jsou obsaženy i animace a možnost modelování jednotlivých křivek pro různé hodnoty parametrů pomocí předem připravených programů.

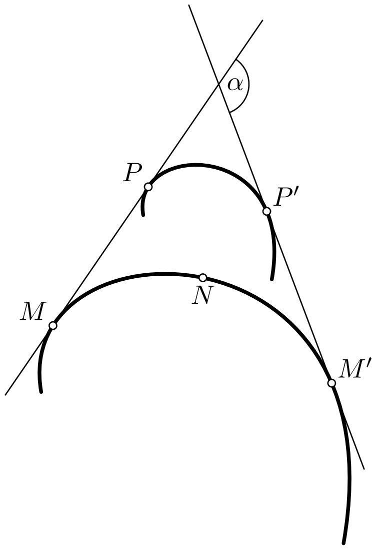
Na CD ROMu jsou také dále uvedeny další části Matematiky pro fyziku - texty Funkce, Diferenciální počet, Integrální počet, Diferenciální rovnice, Vektory, skaláry... a Souřadnice ve fyzice.

1 Základní pojmy

V této části si vymezíme základní pojmy, se kterými budeme v dalších kapitolách dále pracovat.

1.1 Křivost křivky

Křivost křivky je jedním z prvků, které charakterizují křivku. Jinak řečeno je to také zakřivení křivky v různých bodech.



Obr. 1 Zakřivení křivky

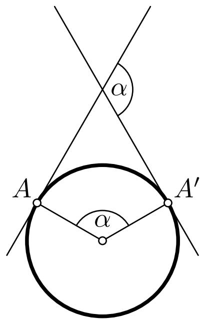
Při pohybu od jednoho bodu křivky M ke druhému M' se bude současně také měnit poloha tečny ke křivce: tečna se bude otáčet. Toto odlišuje křivku od přímky, jejíž tečna s ní splývá ve všech jejích bodech – tedy přímka a tečna mají stejný směr. Čím bude větší úhel, o který se otočí tečna při přechodu od bodu M do bodu M' křivky, tím více se také bude lišit oblouk křivky od přímky, a tím větší bude také zakřivení křivky. Zakřivení oblouku však nelze charakterizovat jen úhlem, o který se otočí tečna křivky při přechodu z jednoho krajního bodu oblouku do druhého krajního bodu. Na obr. 1 jsou nakresleny dva oblouky PP' a MM', jejichž zakřivení jsou různá, ale úhel, o který se otočí tečna, je stejný.

Z toho vyplývá, že chceme-li stanovit míru zakřivení oblouku dané křivky, je nutné uvažovat také jeho délku. Z obr. 1 je patrné, že při stejném úhlu, o který se otočí tečna, je zakřivení tím větší, čím kratší je délka oblouku.

Ukazuje se jako přirozené definovat průměrnou křivost oblouku křivky jako poměr úhlu tečen v krajních bodech oblouku k délce oblouku, neboli jako úhel, o který se otočí tečna křivky na jednotkové délce oblouku (úhel α je vždy v obloukové míře):

$$\text{průměrná křivost oblouku } MM' \text{ je } \frac{\alpha}{MM'}.$$

Ilustrujme nyní výše uvedený postup na výpočtu průměrné křivosti kružnice o poloměru R.



Obr. 2 Průměrná křivost kružnice

Pro každý oblouk kružnice je úhel α tečen ke kružnici v krajních bodech oblouku roven úhlu poloměrů v dotykových bodech (obr. 2). Délka oblouku AA' je αR, takže průměrná křivost oblouku je stejná ve všech jejích částech a je rovna

$$\frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R}.$$

Dostali jsme, že průměrná křivost kružnice je převrácená hodnota poloměru, a je tedy nepřímo úměrná poloměru kružnice.

Na základě výše uvedených úvah můžeme tedy říci, že *průměrná křivost charakterizuje celkové zakřivení oblouku.*

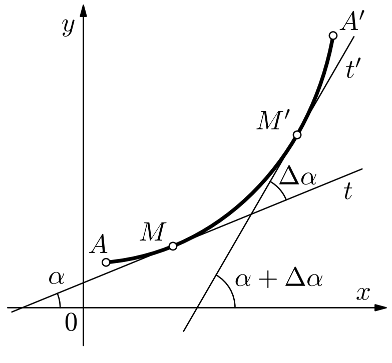
V různých částech oblouku ale může být zakřivení různé, což je vidět např. na obr. 1, kdy je část MN oblouku MM' více zakřivena než část NM'.

Můžeme tedy říci, že průměrná křivost bude tím přesněji charakterizovat zakřivení oblouku křivky v různých bodech, čím menší bude délka oblouku. Analogicky, jako se provádí ve fyzice přechod od rychlosti průměrné k rychlosti okamžité, lze provést limitní přechod od křivosti průměrné ke křivosti v bodě, tj.

$$K = \lim_{MM' \to 0} \frac{\alpha}{MM'}.$$

V dalším postupu odvodíme vzorec pro výpočet křivosti K v bodě.

Předpokládejme, že křivka je dána rovnicí $y = f(x)$. Budeme-li hledat křivost v bodě, musíme kromě rovnice křivky ještě znát souřadnice bodu této křivky. To znamená, že máme-li odvodit vzorec pro výpočet křivosti K, potřebujeme vyjádřit limitu $\lim\limits_{MM' \to 0} \dfrac{\alpha}{MM'}$ pomocí souřadnic x, y bodu M křivky, přičemž $y = f(x)$.



Obr. 3 Křivost křivky v bodě

Předpokládejme, že $M = [x; y]$. Zvětšíme-li x o přírůstek Δx, pak hodnotě úsečky $x + \Delta x$ přísluší bod M' křivky. V bodech M, M' veďme tečny t, t'

(obr. 3). Označíme-li α úhel, který svírá tečna t s osou x v bodě M, změní se při přechodu $M \to M'$ úhel α na úhel $\alpha + \Delta\alpha$. Přírůstek $\Delta\alpha$ je zároveň i úhlem, o který se otočí tečna. Označíme-li oblouk $AM = s$, pak je $MM' = \Delta s$. Potom platí

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Tento výraz můžeme dále upravit na

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\alpha'}{s'}. \tag{1}$$

Pro s' můžeme odvodit vztah

$$s' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

$$s' = \sqrt{1 + (y')^2}. \tag{2}$$

Obdobně nyní odvodíme i vztah pro α'. Z geometrického významu první derivace víme, že

$$y' = \operatorname{tg}\alpha.$$

Z toho plyne, že $\alpha = \operatorname{arctg} y'$. Po zderivování podle x dostaneme

$$\alpha' = \frac{1}{1 + (y')^2} y''. \tag{3}$$

Po dosazení (2) a (3) do (1) dostaneme

$$K = \frac{1}{1 + (y')^2} y'' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Výše uvedeným postupem jsme tedy odvodili vztah pro výpočet zakřivení oblouku v bodě. Nakonec si ještě musíme uvědomit poslední věc: je-li $y'' > 0$, pak je křivka vypuklá; naopak v bodech, kde je $y'' < 0$ je křivka vydutá.

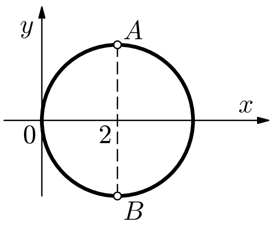
Použití výše uvedených vztahů si nyní budeme ilustrovat na výpočtu následujícího příkladu.

Příklad 1 – výpočet křivosti kružnice

Je dána kružnice o rovnici $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Určete křivosti kružnice v bodě o x-ové souřadnici 2.

Řešení

Podmínku zadání $x = 2$ splňují dva body: $A = [2; 2]$, $B[2; -2]$.



Obr. 4 Křivost kružnice

Při řešení je nutno uvažovat, že pro část kružnice pod osou x je kružnice popsána funkcí

$$y_1 = -\sqrt{4 - (x-2)^2} = -\sqrt{4x - x^2},$$

obdobně pro část pod osou x je

$$y_2 = \sqrt{4x - x^2}.$$

Pro část pod kružnicí je tedy

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{4 - 2x}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}},$$

$$y'(B) = \frac{2 - 2}{\sqrt{4 \cdot 2 - 2^2}} = 0,$$

$$y'' = \frac{1 \cdot \sqrt{4x - x^2} - (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \dfrac{4 - 2x}{(4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}}{4x - x^2},$$

$$y'' = \frac{x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 4}{(4x - x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Po dosazení

$$y''(B) = \frac{1}{2}.$$

Analogicky bychom určili, že pro část kružnice nad osou x je

$$y' = -\frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}}, \qquad \text{tj.} \quad y'(A) = 0,$$

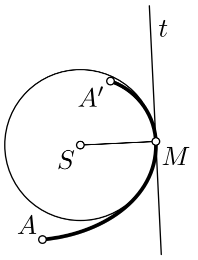
$$y'' = -\frac{x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 4}{(4x - x^2)^{\frac{5}{2}}}, \qquad \text{tj.} \quad y''(A) = -\frac{1}{2}.$$

Po dosazení do (4) dostaneme

$$K(B) = \frac{1}{2}, \qquad K(A) = -\frac{1}{2}.$$

Z výše uvedeného výpočtu je vidět, že velikost křivosti v daných bodech má stejnou velikost, ale opačné znaménko, což odpovídá situaci na obr. 4. Protože se jedná o kružnici, můžeme říci, že velikost křivosti je konstantní a je rovna $\frac{1}{R}$. Rozdílnost znamének je způsobena tím, že vrchní, resp. spodní část půlkružnice je vydutá, resp. vypuklá.

1.2 Oskulační kružnice a poloměr křivosti



Obr. 5 Oskulační kružnice

Mějme nějakou křivku AA', která má v bodě M křivost rovnou K (obr. 5). Sestrojme tečnu a normálu křivky v bodě M. Postupně budeme prokládat bodem M kružnice, jejichž středy budou ležet na normále ve směru, kterým je křivka vydutá. Všechny tyto kružnice budou mít v bodě M společnou tečnu s křivkou AA'; v okolí bodu M jsou tyto kružnice vyduté týmž směrem jako křivka. Mezi těmito kružnicemi existuje také taková kružnice, která bude mít stejnou křivost K jako křivka v bodě M.

Ze vztahu mezi křivostí a poloměrem kružnice plyne, že poloměr zkoumané kružnice musí být roven absolutní hodnotě čísla $\frac{1}{K}$.

Takto sestrojená kružnice se nazývá *oskulační kružnice* křivky v bodě M. Převrácená hodnota křivosti v bodě M, tj. hodnota $R = \frac{1}{K}$ se nazývá *poloměr křivosti* a střed S oskulační kružnice *středem křivosti* křivky v bodě M.

Podobně jako tečna charakterizuje stoupání křivky v daném bodě, oskulační kružnice dává názornou představu o zakřivení křivky v daném bodě. Můžeme tedy říci, že oskulační kružnice se přimyká křivce těsněji než libovolná z ostatních kružnic, které se dotýkají křivky v daném bodě M, a v malém okolí bodu M s velkou přesností nahrazuje přibližně křivku. Vztah pro výpočet poloměru křivosti lze snadno odvodit z rovnice

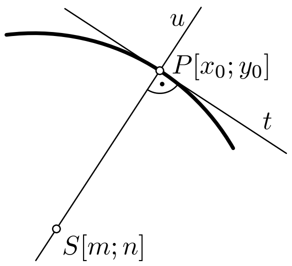
$$R = \frac{1}{K},$$

kam za K dosadíme ze vztahu (4). Potom je

$$R = \frac{[1 + (y')^2]}{y''}. \tag{5}$$

1.3 Výpočet středu křivosti

Při odvozování vztahů pro výpočet souřadnic středu křivosti vyjdeme z poznatků, že střed křivosti S leží na normále, která prochází bodem $M = [x_0; y_0]$ kolmo k tečně. Pro vzdálenost $|SM|$ platí, že $|SM| = R$.



Obr. 6 Střed křivosti

Rovnice tečny t je dána vztahem

$$t: \quad y = y_0 + y_0'(x - x_0),$$

rovnice normály u je pak dána vztahem

$$u: \quad y = y_0 - \frac{1}{y_0'}(x - x_0).$$

Protože bod S leží na normále u, můžeme psát

$$n = y_0 - \frac{1}{y_0'}(m - x_0),$$

po úpravě je

$$n = y_0 + \frac{1}{y_0'}(x_0 - m). \tag{6}$$

Protože bod $M = [x_0; y_0]$ leží na oskulační kružnici se středem $S = [m; n]$, můžeme psát

$$(x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 = R^2. \tag{7}$$

Vztahy (6) a (7) představují soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Řešením této soustavy dostaneme

$$m = x_0 - \frac{y_0'}{y_0''}[1 + (y_0')^2], \tag{8}$$

$$n = y_0 + \frac{1}{y_0''}[1 + (y_0')^2]. \tag{9}$$

Příklad 2 – výpočet poloměru křivosti hyperboly

Určete poloměr křivosti a souřadnice středu křivosti rovnoosé hyperboly o rovnici $xy = 20$ v bodě $[4; 5]$.

Řešení

Rovnici hyperboly přepíšeme na tvar $y = \dfrac{20}{x}$. Potom

$$y' = -\frac{20}{x^2}, \qquad y'' = \frac{40}{x^3}.$$

Pro $x = 4$ dostaneme:

$$y'(4) = -\frac{5}{4}, \qquad y''(4) = \frac{5}{8}.$$

Po dosazení do (5) dostaneme

$$R = \frac{\left(1 + \frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{8}} = 6{,}56.$$

Střed křivosti pak má souřadnice, které určíme dosazením do vztahů (8),(9):

$$m = 4 - \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}}\left[1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] = 9{,}125; \qquad n = 5 + \frac{1}{\frac{5}{8}}\left[1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] = 9{,}100.$$

Cvičení 1

1. Výpočet středu a poloměru křivosti elipsy

Určete poloměr a střed křivosti elipsy o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ v bodě } [0; b].$$

2. Výpočet poloměru a středu křivosti řetězovky

Odvoďte obecný vztah pro výpočet poloměru a středu křivosti řetězovky[1] dané rovnicí

$$y = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right).$$

[1] Tuto křivku vytvoří např. pružné, homogenní, neroztažitelné lano zavěšené na obou svých koncích tak, aby konce lana nebyly uchyceny v téže svislé přímce.

2 Křivka a její rovnice

Nechť je křivka dána svojí geometrickou vlastností (tj. jako geometrické místo bodů). V řadě případů se ukazuje výhodné pracovat pomocí polárních souřadnic R, φ, a proto budeme křivku vyšetřovat jako trajektorii pohybu bodu M, který má proměnné souřadnice R a φ.

Potom bude muset geometrické vlastnosti, kterou je křivka určena, odpovídat analytický vztah mezi souřadnicemi R a φ, který je právě rovnicí křivky. V obecném případě je možno psát rovnici křivky v polárních souřadnicích ve tvaru

$$R = f(\varphi)$$

a uvažovat R jako funkci úhlu φ.

Je zřejmé, že naopak funkce

$$R = f(\varphi)$$

se geometricky znázorní křivkou.

Shrneme-li výše uvedenou úvahu, můžeme říci, že křivce dané geometrickou vlastností odpovídá rovnice $R = f(\varphi)$ a naopak, že rovnici $R = f(\varphi)$ odpovídá křivka. Z toho pak vznikají dva typy úloh:

a) je dána křivka jako geometrické místo bodů; sestavte rovnici této křivky;

b) je dána rovnice mezi souřadnicemi R a φ; sestrojte křivku, která je vyjádřena touto rovnicí.

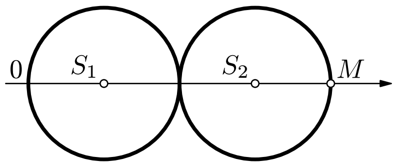
Ukážeme si to na následujícím příkladu.

Příklad 3 – kardioida

Kružnice o poloměru a se valí bez prokluzu po nějaké pevné kružnici téhož poloměru.

a) Napište rovnici křivky – kardioidy, kterou opisuje bod M ležící na obvodu pohybující se kružnice (obr. 7).

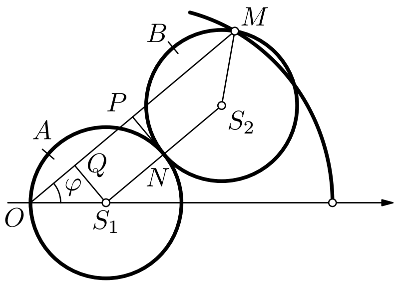
b) Určete tvar kardioidy.



Obr. 7 Odvalování kružnice

Řešení

a) Na obr. 7 je zobrazena počáteční poloha odvalující se kružnice. Polární osu a pól zvolíme podle obr. 7. Po určité době pohybu se poloha bodu M změní tak, jak je znázorněno na obr. 8.



Obr. 8 Vytváření kardioidy

Protože dochází k odvalování pohyblivé kružnice po pevné kružnici, zřejmě platí, že délka oblouku NAO je stejná jako délka oblouku NBM. Nyní výš uvedenou závislost podrobněji vyšetříme.
Je zřejmé, že bod M padne do pólu O, když pohybující se kružnice obejde polovinu obvodu pevné kružnice. To ale znamená, že délka oblouku na obvodu pohybující se kružnice od bodu N, který je bodem dotyku obou kružnic, k bodu M, se rovná délce oblouku na obvodu pevné kružnice od téhož bodu N k pólu.

Protože ale poloměry obou kružnic jsou stejné, jsou stejné i středové úhly $\angle NS_2M = \angle NS_1O$. Útvar OS_1S_2M tedy tvoří rovnoramenný lichoběžník, a proto jsou úsečky S_1S_2 a OM ($|OM| = R$) rovnoběžné. Spustíme-li kolmici z bodu N na úsečku OM, můžeme psát

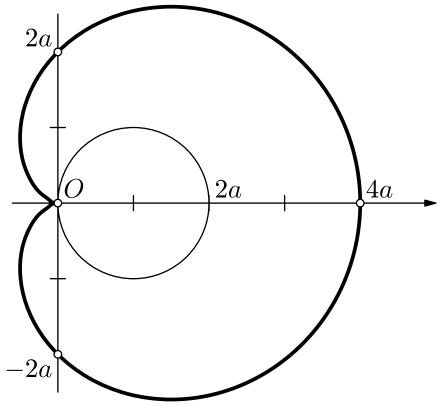
$$|OP| = |PM|,$$

a tedy $R = 2|OP|$.
Protože $|OP| = |OQ| + |QP|$ a $|OQ| = a\cos\varphi$, $|QP| = |S_1N| = a$, dostaneme

$$R = 2(a\cos\varphi + a) = 2a(1 + \cos\varphi).$$

Toto je tedy hledaná rovnice kardioidy.

b) Nalezenou rovnici použijeme k určení tvaru kardioidy.
Pro $\varphi = 0$ je $R = 4a$. Bod M leží na polární ose ve vzdálenosti $4a$ od pólu (počáteční poloha). Položíme-li $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, potom $R = 2a$. Pro hodnotu $\varphi = \pi$ bude $R = 0$, tj. bod M splyne s pólem. Pro hodnotu $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ je $R = 2a$. Pro další změny úhlu φ opíše bod M zbývající část křivky, při hodnotě $\varphi = 2\pi$ se vrátí do původní polohy a dále se začne znovu pohybovat po téže křivce. Dále bychom ještě mohli dopočítat několik dalších hodnot R odpovídajících zvolenému úhlu φ. Pak sestrojíme příslušné body a proložíme jimi souvislou křivku, jak je znázorněno na obr. 9.



Sestrojená křivka se obecně nazývá *epicykloida*. Při různých vztazích mezi poloměry pohyblivých a pevných kružnic dostáváme různé epicykloidy. *Kardioida* tedy patří mezi epicykloidy; je to taková epicykloida, kterou dostaneme v případě rovnosti poloměrů pohybující se i pevné kružnice.

Obr. 9 Kardioida

Poznámka

Pro vykreslování křivek pomocí počítače je velmi výhodné zadávat rovnice křivek parametricky (parametr t se zde často používá jako časová proměnná při vykreslování křivek).

Pokud bychom chtěli např. rovnici kardioidy napsat pomocí parametrického vyjádření, lze psát

$$x = R\cos\varphi = 2a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi = 2a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

(což je vlastně převod polárních souřadnic na kartézské). Nyní už jen nahradíme úhel φ parametrem t a obdržíme (s použitím součtových vzorců)

$$x = a(1+2\cos t+\cos 2t), \qquad y = a(2\sin t+\sin 2t).$$

Cvičení 2

1. Kreslení křivek

Sestrojte křivky, které jsou dány těmito rovnicemi:

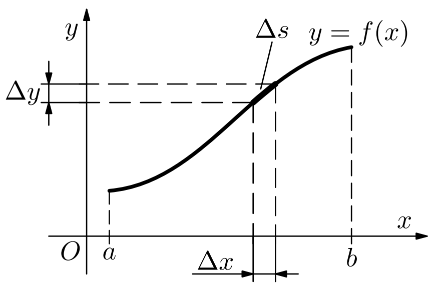
a) $R = a\sin\varphi$, b) $R = a(1-\cos\varphi)$, c) $R = a\cos\dfrac{\varphi}{3}$.

2. Parametrické vyjádření křivek

Napište parametrické rovnice křivek z předcházející úlohy.

3 Délka křivky

3.1 Obecná rovnice křivky



Obr. 10 Délka křivky

Délku křivky určíme tak, že si celou křivku rozdělíme na n dílčích částí, které můžeme přibližně považovat za přímky. Potom pro délku jednoho takového dílku platí

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Zvolíme-li dílky velmi malé, můžeme Δ-přírůstky nahradit diferenciálem funkce, tj.

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2, \tag{10}$$

po úpravě dostaneme tzv. *diferenciál oblouku křivky*

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x,$$

tj.

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Celkovou délku křivky pak dostaneme integrací, neboli

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x. \tag{12}$$

3.2 Parametrické rovnice křivky

Je-li křivka dána parametricky, tj.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in \langle \alpha; \beta \rangle,$$

potom můžeme psát

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \dot{x}\,\mathrm{d}t, \qquad y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \dot{y}\,\mathrm{d}t.$$

Po dosazení do (10) dostaneme

$$(\mathrm{d}s)^2 = [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2](\mathrm{d}t)^2,$$

po odmocnění je diferenciál oblouku křivky dán vztahem

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Celkovou délku pak určíme integrací přes celou křivku

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

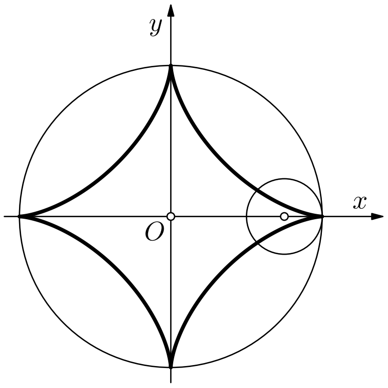
Poznámka

Budeme-li parametr t považovat za čas, potom $\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} = v$ vyjadřuje velikost okamžité rychlosti pohybu. Potom lze psát

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} v(t)\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

Příklad 4 – délka asteroidy

Určete délku asteroidy[2] dané parametricky rovnicemi $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.



Obr. 11 Asteroida

[2]Asteroida je cyklická křivka, která vznikne odvalováním kružnice o poloměru $r = \frac{a}{4}$ uvnitř kružnice o poloměru a.

Řešení

Protože asteroida je symetrická vzhledem k oběma souřadnicovým osám, stačí vzít délku jedné její čtvrtiny v 1. kvadrantu, tj. $t \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak po dosazení do (13) dostaneme

$$\frac{s}{4} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin^2 t)^2 + (3a \sin^2 t \cos^2 t)^2}\, \mathrm{d}t,$$

po úpravě

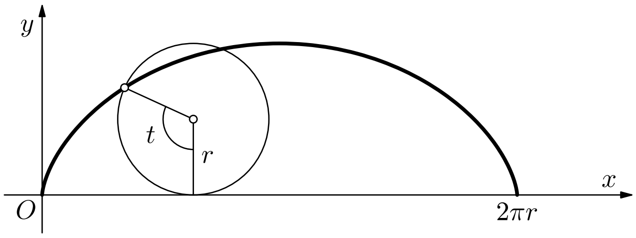
$$\frac{s}{4} = 3a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{3a}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, \mathrm{d}t = \frac{3a}{4} [-\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

Délka celé asteroidy je $s = 4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a$.

Příklad 5 – délka cykloidy

Určete délku jednoho oblouku prosté cykloidy[3] dané parametricky rovnicemi

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t).$$



Obr. 12 Prostá cykloida

[3] Cykloida je cyklická křivka, která vznikne odvalováním kružnice o poloměru r po přímce.

Řešení

Určíme $\dot{x} = r(1 - \cos t)$, $\dot{y} = r \sin t$ a dosadíme do (13). Dostaneme

$$s = 2r \int_0^\pi \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2}r \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos t}\, \mathrm{d}t.$$

Dále použijeme součtový vzorec a obdržíme

$$s = 4r \int_0^\pi \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t = 4r \left[-2 \cos \frac{t}{2}\right]_0^\pi = 8r.$$

3.3 Polární rovnice křivky

Je-li rovnice křivky zadána pomocí polárních souřadnic, tj. $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, kde $\varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle$, musíme nejprve určit $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ a potom dosadit do (10). Dostaneme

$$\mathrm{d}x = -R \sin \varphi\, \mathrm{d}\varphi + \cos \varphi\, \mathrm{d}R, \quad \mathrm{d}y = R \cos \varphi\, \mathrm{d}\varphi + \sin \varphi\, \mathrm{d}R,$$

po dosazení do (10) a úpravě dostaneme

$$(\mathrm{d}s)^2 = R^2 (\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}R)^2.$$

Po odmocnění a integraci je

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{R^2 + \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\, \mathrm{d}\varphi. \tag{15}$$

Příklad 6 – délka kardioidy

Určete délku kardioidy, jejíž rovnici $R = 2a(1+\cos \varphi) = d(1+\cos \varphi)$ (označíme $d = 2a$ – průměr kružnic) v polárních souřadnicích jsme odvodili v příkladu 3.

Řešení

K řešení použijeme vztah (15), kam dosadíme příslušné diferenciály. Dále také využijeme, že kardioida je symetrická podle osy x. Dostaneme

$$s = 2 \int_0^\pi \sqrt{d^2(1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + d^2 \sin^2 \varphi}\, \mathrm{d}\varphi = 2d \int_0^\pi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}\, \mathrm{d}\varphi,$$

$$s = 4d \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2}\, \mathrm{d}\varphi = 4d \left[2 \sin \frac{\varphi}{2}\right]_0^\pi = 8d.$$

Cvičení 3

Při řešení následujících cvičení je možno použít vztah pro výpočet integrálu (jehož odvození je uvedeno na CD ROMu – část Matematika křivek – Základní pojmy – Cvičení)

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

1. Vrh šikmo vzhůru
Vypočtěte délku s dráhy, kterou opíše ve vakuu náboj vystřelený z děla počáteční rychlostí o velikosti v_0 pod elevačním úhlem $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Návod: napište parametrické rovnice pro tento druh pohybu, pak použijte vztahu pro výpočet délky křivky vyjádřený pomocí parametrických souřadnic.

2. Vrh vodorovný
Těleso je vrženo vodorovně z výšky H nad zemským povrchem počáteční rychlostí o velikosti v_0. Určete délku s dráhy, kterou toto těleso při pohybu opíše když dopadne na povrch země.

3. Řetězovka
Vypočtěte délku s řetězovky $y = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$ v mezích od $x_1 = 0$ do $x_2 = a$, kde $a > 0$.

4 Obsah oblasti

4.1 Obecná rovnice křivky

Je-li křivka dána rovnicí $y = f(x)$, potom obsah plochy je dán vztahem

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{16}$$

který je podrobněji rozebrán v učebnicích integrálního počtu nebo např. ve studijním textu *Integrální počet ve fyzice*.

4.2 Parametrické rovnice křivky

Je-li křivka dána parametricky např. ve tvaru

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in \langle\alpha;\beta\rangle,$$

potom můžeme psát $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je inverzní funkce k funkci $\varphi(x)$. Dále pak můžeme psát $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Obsah plochy je pak dán vztahem

$$S = \int\limits_a^b \psi(\varphi^{-1}(x))\,\mathrm{d}x.$$

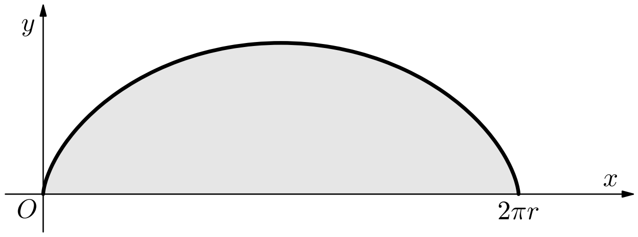
Užitím substituce $x = \varphi(t)$ dostaneme $\mathrm{d}x = \dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t$ po dosazení do vztahu (16) obdržíme

$$S = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Příklad 7 – plocha cykloidy

Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou x a jedním obloukem prosté cykloidy (obr. 13) dané parametricky rovnicemi

$$x = r(t - \sin t), \qquad y = r(1 - \cos t).$$



Obr. 13 Obsah plochy pod obloukem prosté cykloidy

Řešení

K výpočtu použijeme vztahu (17), kam dosadíme $\psi(t) = y = r(1 - \cos t)$, $\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t = r(1 - \cos t)\mathrm{d}t$, kde $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$. Dostaneme

$$S = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t)(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t = r^2 \int (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

K výpočtu integrálu použijeme součtový vzorec

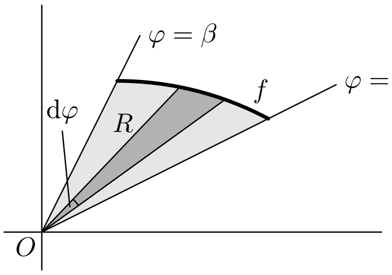
$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

Potom obdržíme

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\,\mathrm{d}t = r^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2.$$

4.3 Polární rovnice křivky

Nechť $R = f(\varphi)$ je spojitá funkce na intervalu $\langle\alpha; \beta\rangle$. Chceme určit obsah oblasti vymezené grafem funkce f a polopřímkami $\varphi = \alpha$ a $\varphi = \beta$. Budeme uvažovat, že $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Dále budeme předpokládat, že $f \geq 0$.



Obr. 14 Obsah oblasti

Oblast rozdělíme na malé výseče, které můžeme téměř považovat za trojúhelníky o základně $R\mathrm{d}\varphi$ a výšce R.
Obsah $\mathrm{d}S$ jednoho trojúhelníku je dán vztahem

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\varphi.$$

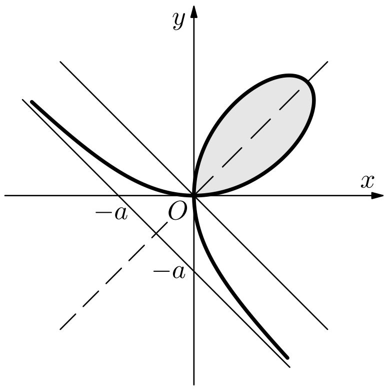
Obsah celé oblasti pak určíme integrací

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} R^2\mathrm{d}\varphi. \qquad (18)$$

Příklad 8 – Descartův list

Určete obsah smyčky Descartova listu, který je dán rovnicí

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$



Obr. 15 Descartův list

Řešení

Rovnici $x^3 + y^3 = 3axy$ převedeme na polární tvar, a to tak, že vyjádříme x a y pomocí R a φ a dosadíme do původní rovnice, tj.

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi,$$

potom

$$R^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3aR^2\cos\varphi\sin\varphi,$$

z čehož

$$R = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

Vezmeme-li v úvahu jen polovinu smyčky, která je symetrická podle přímky $y = x$, dostaneme užitím (18) vztah

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9a^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Dále použijeme substituci $\operatorname{tg}\varphi = u$, potom $\varphi = \operatorname{arctg} u$,

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Pak dostaneme (po příslušné změně mezí)

$$S = \int_0^1 \frac{9a^2u^2\mathrm{d}u}{(1+u^3)^2} = 3a^2\int_0^1 \frac{3u^2\mathrm{d}u}{(1+u^3)^2}.$$

Po další substituci $1+u^3 = v$ dostaneme po zderivování $3u^2\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$. Toto opět dosadíme (s příslušnou změnou mezí) do výše uvedeného vztahu a obdržíme

$$S = 3a^2\int_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = 3a^2\left[-\frac{1}{v}\right]_1^2 = \frac{3}{2}a^2.$$

Cvičení 4

1. Obsah plochy vymezené křivkou
Je dána křivka o rovnici $R = a\sin 2\varphi$ v polárních souřadnicích.

a) Znázorněte tuto křivku graficky.

b) Vypočtěte obsah S rovinné plochy ohraničené touto křivkou.

2. Bernoulliho lemniskáta
Bernoulliho lemniskáta je speciálním případem tzv. *Cassiniovy křivky*. Její rovnice v polárních souřadnicích je dána vztahem $R = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

a) Znázorněte tuto křivku graficky.

b) Vypočtěte obsah S rovinné plochy ohraničené jednou smyčkou Bernoulliho lemniskáty.

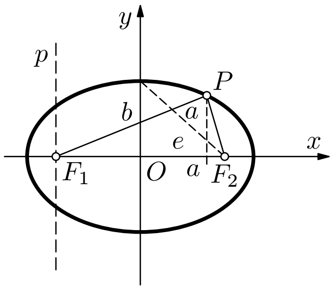
5 Kuželosečky a Cassiniho ovály

Vedle přímky jsou to asi nejčastěji se vyskytující čáry. Vzhledem k tomu, že kuželosečky jsou velmi podrobně popsány ve středoškolských učebnicích analytické geometrie, budou v této části uvedeny spíš informace rozšiřující učivo obsažené v těchto učebnicích ve vztahu k rovnicím používaných ve fyzice.

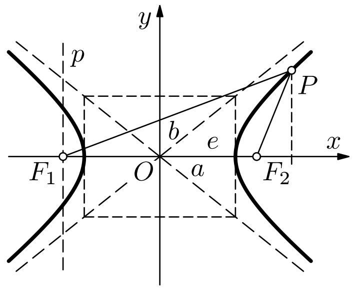
5.1 Elipsa a hyperbola

Elipsa a hyperbola jsou křivky, jejichž body mají konstantní součet, resp. rozdíl svých vzdáleností (průvodiče r_1, r_2) od dvou pevných bodů (ohnisek F_1, F_2) v rovině, tj.

$$r_1 \pm r_2 = 2a.$$



Obr. 16 Elipsa



Obr. 17 Hyperbola

Konstanta a je u obou křivek rovna polovině součtu, resp. rozdílu průvodičů, nazýváme ji délkou hlavní poloosy křivky (u elipsy ale musí být $2a > 2e$, naproti tomu u hyperboly je $2a < 2e$).

Označíme-li vzdálenost ohnisek $2e$, pak pro elipsu platí $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ a pro hyperbolu $b = \sqrt{e^2 - a^2}$, kde b je délka vedlejší poloosy. Je tedy u elipsy $e^2 = a^2 - b^2$, u hyperboly $e^2 = a^2 + b^2$. Pokud bychom vztah $r_1 \pm r_2 = 2a$ dále upravili, dostaneme osové rovnice elipsy, resp. hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Zavedeme-li poměr $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ (tzv. *číselnou (numerickou) výstřednost*), dostaneme $\varepsilon < 1$ pro elipsu, $\varepsilon > 1$ pro hyperbolu. Dále můžeme psát pro průvodiče bodu P na elipse vztahy

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

$$r_1^2 = (e + x)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (e - x)^2 + y^2,$$

a tedy

$$r_1^2 - r_2^2 = 4ex,$$

po úpravě

$$(r_1 - r_2)2a = 4ex.$$

Proto dále můžeme psát

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Výraz pro r_1 lze upravit na tvar

$$r_1 = \varepsilon\left(x + \frac{a^2}{e}\right),$$

a dále na

$$\frac{r_1}{x+K} = \varepsilon, \quad \text{kde} \quad K = \frac{a^2}{e}.$$

Z toho je vidět, že poměr vzdáleností bodu elipsy od ohniska F_1 a přímky $x = K$ (řídící přímky), je stálý ($= \varepsilon$). Obdobný vztah je možno odvodit i pro r_2.

Pro hyperbolu můžeme psát obdobně

$$r_1 - r_2 = 2a, \quad r_1^2 - r_2^2 = 4ex$$

(pro větev s kladnými x) výrazy

$$r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a,$$

a proto

$$r_1 = \varepsilon(x - K) \quad \text{a tedy} \quad \frac{r_1}{x-K} = \varepsilon.$$

Je tedy poměr vzdáleností bodu hyperboly od ohniska r_1 a přímky $x = K$ (řídící přímky) stálý ($= \varepsilon$). Obdobně lze také odvodit vztahy pro r_2 a druhou větev hyperboly $r_2 - r_1 = 2a$.

Parametrické rovnice elipsy a hyperboly

Elipsu a hyperbolu (s osami v osách souřadnic) je možno vyjádřit parametricky, a to elipsu rovnicemi

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

a hyperbolu rovnicemi

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \operatorname{tg} t,$$

kde t je v tomto případě úhel průvodiče měřený od osy x proti směru hodinových ručiček.

Poznámka

Speciálním případem elipsy je kružnice, pro $b = a$ a tedy je $e = 0$ i $\varepsilon = 0$. Platí

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

nebo parametricky

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

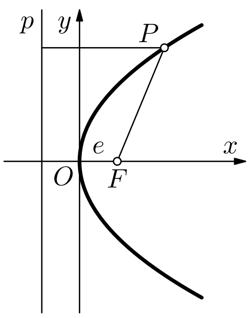
Speciálním případem hyperboly je rovnoosá hyperbola.
Pro $b = a$ je $e = a\sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{2}$ a platí

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

nebo parametricky

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = a \operatorname{tg} t.$$

5.2 Parabola



Obr. 18 Parabola

Parabola je geometrické místo bodů v rovině, které mají od pevného bodu (ohniska) a pevné přímky (řídící přímky) stejné vzdálenosti.
Na základě tohoto poznatku je možno odvodit vrcholovou rovnici paraboly (pro polohu na obr. 18) ve tvaru

$$y^2 = 2px.$$

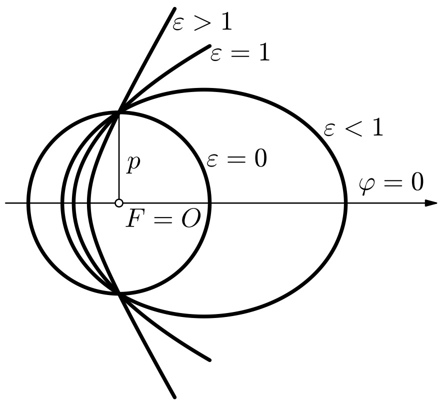
Tyto rovnice jsou velmi podrobně pro různé polohy paraboly popsány ve středoškolských učebnicích analytické geometrie, a proto se jimi nebudeme dále zabývat.

5.3 Polární rovnice kuželoseček

Zavedeme-li polární souřadnice, pak můžeme všechny výše uvedené kuželosečky popsat jedinou ohniskovou rovnicí[4]

$$R = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \tag{19}$$

kde pro elipsu $\varepsilon < 1$, pro parabolu $\varepsilon = 1$, pro hyperbolu $\varepsilon > 1$ a pro kružnici $\varepsilon = 0$.



Obr. 19 Polární rovnice kuželoseček

5.4 Zajímavosti z historie kuželoseček

Elipsa

Elipsu poprvé studoval *Menaechmus* (asi 350 let př. n. l.). *Euklides* psal o elipse, ale svůj název dostala elipsa od *Apollonia*. O tom, že elipsa má ohnisko, uvažoval *Pappus*.

Kepler v roce 1602 považoval oběžnou dráhu Marsu za ovál, ale později objevil, že tím oválem je elipsa, jejíž ohnisko leží ve středu Slunce. Kepler používal slovo ohnisko („focus") a publikoval jeho objev v roce 1609. Excentricita planetárních drah je malá (elipsy jsou podobné kružnicím), např. pro Mars je $\frac{1}{11}$ a pro Zemi je $\frac{1}{60}$.

V roce 1705 *Halley* pozoroval, že komety, které sledoval, se pohybují po eliptických drahách kolem Slunce. Excentricita Halleyovy komety je 0,9675; tato

[4] Odvození je podrobně popsáno ve studijním textu Souřadnice ve fyzice.

hodnota vedla Halleye k závěru, že se kometa zřejmě pohybuje po parabole ($\varepsilon = 1$ - odchylka od tohoto čísla byla dle Halleye způsobená nepřesností měření).

Plocha elipsy je πab. Nelze ale napsat vztah pro délku elipsy pomocí elementárních funkcí, a to vedlo ke studiu *eliptických funkcí*. *Ramanujan* provedl v roce 1914 aproximaci délky elipsy vztahem

$$\pi \left[3(a+b) - \sqrt{(a+3b)(3a+b)} \right].$$

Hyperbola

Speciálním případem hyperboly $xy = ab$ (asymptoty svírají pravý úhel) se poprvé zabýval *Menaechmus*. *Euklides* a *Aristaeus* psali o hlavní hyperbole, protože studovali pouze jednu větev hyperboly. Název hyperbola dostala tato kuželosečka od *Apollonia*, který studoval obě větve. S ohniskem hyperboly uvažoval *Pappus*.

Parabola

Parabolu poprvé studoval *Menaechmus*, který byl žákem *Platóna* a *Eudoxa*. Menaechmus řešil hledání průniku dvou parabol $x^2 = y$ a $y^2 = 2x$.

Euklides psal o parabole, parabolu pojmenoval *Apollonius*. O ohnisku paraboly uvažoval *Pappus*.

Pascal uvažoval, že parabola vznikne projekcí kružnice. *Galilei* pozoroval, že parabola je trajektorie pohybu nábojů vystřelených šikmo vzhůru.

Gregory a *Newton* znali vlastnost paraboly, že parabola odráží rovnoběžné paprsky do ohniska.

5.5 Cassiniho ovály

Z dnešního pohledu lze říci, že Cassiniho ovál je určitou analogií elipsy. V této části se proto podíváme na tento ovál z matematického hlediska. Ovšem než toto uděláme, podívejme se alespoň velmi stručně na historii vzniku těchto křivek.

5.5.1 Zajímavosti z historie

Cassiniho ovál je křivka, která byla nazvána po francouzském astronomovi *Giovannim Domenicu Cassinim*. G. Cassini byl proslulý mnoha výsledky v astronomii (např. objevil čtyři Saturnovy měsíce). V roce 1669 byl jmenován členem akademie věd v Paříži a ředitelem nové hvězdárny.

G. Cassini popsal ovál v roce 1680 jako domnělou dráhu pohybu Země kolem Slunce, přičemž Slunce se nachází v jednom ohnisku. Jeho výsledek uveřejnil jeho syn Jacob Cassini v *Eléments d'astronomie* (Základy astronomie) teprve roku 1740.

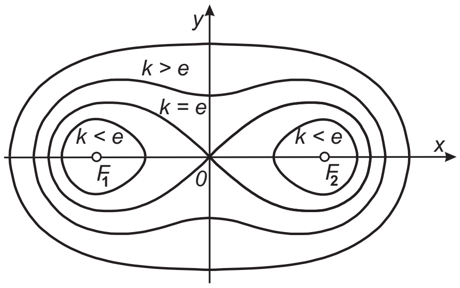
Roku 1694 *Jacob Bernoulli* popsal nezávisle na Cassinim ten případ, kdy je konstanta rovna polovině vzdálenosti ohnisek, tj.

$$(x^2+y^2)^2+2k^2(y^2-x^2)=0, \qquad k=\frac{|F_1F_2|}{2}.$$

Bernoulli uvedl polární rovnice této křivky a pojmenoval ji *lemniscus* (z řečtiny stuha). Svůj objev uveřejnil v *Acta Eruditorum* v roce 1694. Netušil tehdy, že před 14 lety Cassini popsal obecnější případ této křivky (což dnes ale není překvapivé, neboť o Cassiniho oválu psal až jeho syn) v r. 1740.

Teprve v roce 1782 *Pietro Feroni* ukázal, že speciálním případem Cassiniho oválů je *Bernoulliova lemniskáta*. Později se lemniskátou zabývali také *Euler* a *Gauss*. jejich práce vedly k zavedení eliptických funkcí a k teorii eliptických integrálů v 19. století.

5.5.2 Cassiniho ovály z matematického pohledu



Cassiniho ovály jsou definovány jako množina všech bodů X v rovině takových, že součin vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů F_1, F_2 (ohnisek) je konstantní a je roven k^2, tj. platí

$$|F_1X|\cdot|F_2X|=k^2. \qquad (20)$$

Obr. 20 Cassiniho ovály

V další části odvodíme rovnici popisující Cassiniho ovály v kartézské soustavě souřadnic.

Označíme-li vzdálenost mezi body F_1 a F_2 (ohnisky) $2e$, tj. $|F_1O|=F_2O|=e$, pak můžeme rovnici (20) přepsat na tvar

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2}=k^2,$$

neboli

$$[(x+e)^2+y^2]\cdot[(x-e)^2+y^2]=k^4.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$(x^2 + y^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) + e^4 - k^4 = 0. \tag{21}$$

Dále provedeme rozbor řešení této rovnici (což už Cassini neprovedl), a to tak, že vypočítáme souřadnice průsečíků s osami x a y.

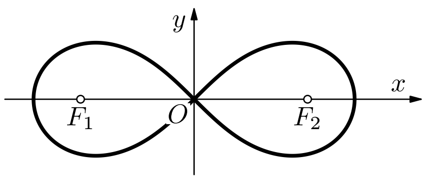
1. Budeme-li počítat průsečíky s osou x, položíme v rovnici (21) $y = 0$. Dostaneme rovnici
$$x^4 - 2e^2x^2 + e^4 - k^4 = 0.$$
Toto je kvadratická rovnice v proměnné x, jejímž řešením obdržíme
$$x_{12}^2 = e^2 \pm \sqrt{e^4 - (e^4 - k^4)} = e^2 \pm k^2,$$
$$x_{12} = \pm\sqrt{e^2 \pm k^2}.$$
2. Obdobně budeme-li hledat průsečíky s osou y, položíme v rovnici (21) $x = 0$. Po dosazení obdržíme
$$y^4 + 2e^2y^2 + e^4 - k^4 = 0,$$
$$y_{12} = \pm\sqrt{-e^2 \pm k^2}.$$

Z uvedených vztahů je vidět, že některé průsečíky by mohly být reálné a některé imaginární. Je-li $e > k$, neexistují průsečíky s osu y v R; z toho vyplývá, že v tomto případě Cassiniho křivka není souvislá, bude se skládat ze dvou větví. Je-li $e < k$, je Cassiniho ovál souvislá křivka. Pro $e = k$ má Cassiniho křivka s osou x jediný průsečík, rovnice (21) potom přejde na tvar

$$(x^2 + y^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) = 0, \tag{22}$$

což je tzv. *Bernoulliho lemniskáta*. V další části si tuto křivku rozebereme podrobněji.

5.5.3 Bernoulliho lemniskáta



Obr. 21 Bernoulliho lemniskáta

V roce 1694 Jacob Bernoulli poprvé popsal (nezávisle na Cassinim) případ, kdy je konstanta k rovna polovině vzdálenosti ohnisek, tj. $k = e$. Pak dostaneme rovnici (22), jak bylo uvedeno výše.

Bernoulli tuto rovnici uvedl v polárních souřadnicích. My se nyní pokusíme rovnici (22) do polárních souřadnic přepsat.

Do rovnice (22) dosadíme

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi.$$

a dostaneme

$$R^4 + 2e^2R^2(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 0,$$

po úpravě

$$R^2 - 2e^2\cos 2\varphi = 0,$$

neboli

$$R^2 = 2e^2\cos 2\varphi. \tag{23}$$

Pokud bychom ale chtěli tuto křivku vykreslit pomocí počítače, je třeba rovnici Bernoulliho lemniskáty převést na parametrický tvar. Ukazuje se nejvýhodnější položit

$$x = \sqrt{2}e\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \qquad y = \sqrt{2}e\frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}, \qquad t \in \langle 0; 2\pi\rangle. \tag{24}$$

O tom, že je toto parametrické vyjádření správné, je možno se přesvědčit dosazením do rovnice (22).

6 Spirály

6.1 Historie a užití

Archimédova spirála

Se spirálami je možno se setkat prakticky všude. Jedním z prvních, kdo před 2300 lety popsal tuto křivku, byl *Archimédes*. Tzv. *Archimédova spirála* se vyskytuje např. jako trajektorie pohybu bodu, který se pohybuje po polopřímce od jejího počátečního bodu v pólu O konstantní rychlostí, zatímco polopřímka se sama otáčí kolem pólu při konstantní úhlové rychlosti (tento pohyb se může vyskytnout např. při pohybu mouchy lezoucí po hodinové ručičce z jednoho konce na druhý). Archimédova spirála se také vyskytuje v různých mechanismech ve strojnictví jako tzv. *Archimédův šroub* (technicky se této křivce říká závitnice). Na jejím principu pracují vrtáky, šrouby a různé šroubky. Tvaru spirály se říká *helix* a právě takové spirály se asi nejčastěji vyskytují v technické praxi. Také popínavé rostliny šplhají ke Slunci se závity tvaru helix tak, jak tuto spirálu popsal Archimédes.

Logaritmická spirála

Logaritmická spirála je křivka, jejíž poloměr roste exponenciálně s velikostí úhlu. První, kdo se zabýval problémem logaritmické spirály byl *René Descartes* přibližně kolem roku 1638. Nezávisle na Descartovi zkoumal logaritmickou spirálu také *Evangelista Toricceli*, který také zároveň stanovil vzorec pro výpočet délky křivky. Tato spirála sehrála svoji roli také v životě *Jacoba Bernoulliho*, který ji nejspíš zkoumal natolik, že si nakonec nechal vytesat na svou hrobku nápis „EDEM MUTATA RESURGO“, což znamená asi toto: „AČ ZMĚNĚN, STÁLE ZŮSTÁVÁ STEJNÝ“. Tento text také dost výstižně charakterizuje křivku samotnou – mluvíme o tzv. vývoji ve spirále.

Další výstižné názvy pro tuto křivku jsou *Fibbonacciho spirála*, *ekvalingulární spirála*, *růstová spirála, Bernoulliho spirála* nebo *spira mirabilis*.

Všimněme si, kde všude se s touto spirálou můžeme setkat. Zajímavé je např. uspořádání semen slunečnice (viz CD ROM), z nichž část je ve spirálách ve směru hodinových ručiček a část ve spirálách vinoucích se opačným směrem. Podobně je tomu i u některých jiných rostlin. Nikdy nejde o náhodný počet spirál, ale o počet odpovídající Fibbonaciovým číslům (jsou to čísla, z nichž první dvě jsou 1, pak každé další je dáno součtem dvou předchozích, tj. řada 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,. . .). U slunečnice to bývá 21 spirál ve směru hodinových ručiček a 34 proti jejich směru. Celá desetiletí se vědci snažili zjistit, proč se chování rostlin řídí Fibbonaciovou soustavou; teprve v roce 1992 dva francouzští matematici *Yves Couder* a *Stefan Douady* přišli na to, že je to zřejmě jediný způsob, jak se do terče slunečnice vejde co nejvíce semen.

Ve tvaru logaritmické spirály jsou uspořádána i semínka na šiškách viz CD ROM) nebo ostny na kaktusech. Tvar logaritmické spirály má také většina neživých částí živých organismů – ulity měkkýšů, rohy, drápy, sloní kly. Také pavoučí sítě jsou tkány v podobě logaritmické spirály. Zůstaneme-li ještě u hmyzu, pak i moucha když letí např. ke zdroji světla letí v takovém směru, aby svíral stále stejný směr se zdrojem světla (v praxi to ale pozorujeme méně, protože cíl je obvykle hodně vzdálený a my pak pohyb vnímáme spíš jako přímku). Tvar logaritmické spirály má také např. řezná část nože na plech právě díky vlastnosti logaritmické spirály, že tečna v libovolném bodě křivky svírá konstantní úhel.

Asi nejničivějšími spirálami o průměru několika set kilometrů jsou hurikány. Podobné spirály vytvářejí i proudy nízkého tlaku vzduchu – severně od rovníku rotují ve směru hodinových ručiček, zatímco na jižní polokouli se otáčejí opačně. Už viktoriánští astronomové popsali vyjímečnou tarjektorii Merkuru – oběžná dráha má tvar obrovité spirály. Víme také, že existují spirální galaxie.

Zhruba asi před 50 lety objevili vědci spirálu i v biologii – dvojitou šroubovitou spirálu DNA. Dva polynukleotidové řetězce se v molekule DNA okolo sebe šroubovitě obtáčejí. Molekuly tedy tvoří dva řetězce stočené do dvojité šroubovice DNA.

Hyperbolická spirála

Hyperbolickou spirálu objevil *Piere Varignon* v roce 1704. Dále ji pak studoval *Johann Bernoulli* v letech 1710 – 1713 a též *Cotes*v roce 1722.

Fermatova spirála

Tuto spirálu navrhl *Fermat* v roce 1636.

Lituuova spirála

Lituuovu spirálu navrhl *Cotes* v roce 1722. Lituus znamená háček. *Maclaurin* použil tento výraz v knize *Harmonia Mensurarumin* v roce 1722.

Výčet situací, kdy se můžeme setkat v praktickém životě se spirálami by asi ještě mohl pokračovat dále – více je o tom možno se dozvědět z přiloženého CD ROMu, kde je vše ještě doplněno řadou fotografií.

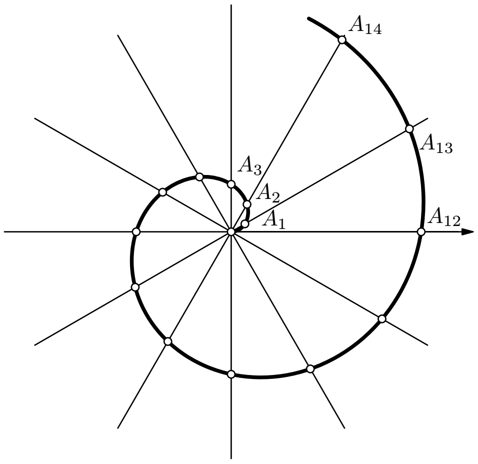
6.2 Matematické vyjádření spirál

6.2.1 Archimédova spirála

Její rovnice má tvar

$$r = a\varphi,$$

kde a je dané kladné číslo. Z rovnice spirály nyní nakreslíme tvar spirály. Úhel 2π s vrcholem O rozdělíme na několik stejných částí, v našem případě zvolíme 12 částí. Z bodu O pak provedeme 12 dělicích polopřímek (viz obr. 22).



Tyto polopřímky budou svírat s polární osou po řadě úhly:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6},$$

$$\varphi_2 = 2\varphi_1 = 2 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{3}, \ldots$$

Z rovnice křivky nalezneme příslušné hodnoty průvodičů:

$$r_1 = \frac{\pi}{6}a, \quad r_2 = 2r_1 = \frac{\pi}{3}a, \ldots$$

Obr. 22 Archimédova spirála

Nyní už jen vezmeme libovolnou úsečku a budeme předpokládat, že její délka je $2\pi a$. K sestrojení bodů spirály, které leží na zvolených polopřímkách, zbývá už jen nanést na tyto polopřímky od pólu délky r_1, r_2, r_3 atd. Tímto způsobem pak dostaneme body A_1, A_2, A_3 atd.

Abychom sestrojili body, které odpovídají hodnotám $\varphi > 2\pi$, provedeme následující úvahu. Nechť $\varphi = \frac{2\pi}{12} + 2\pi$, příslušná hodnota průvodiče pak bude

$$r = a\left(\frac{2\pi}{12} + 2\pi\right) = \frac{2\pi}{12}a + 2\pi a.$$

Tato hodnota se liší od hodnoty r příslušející prvnímu bodu, který leží na vyšetřované polopřímce, o $2\pi a$ (tj. o délku námi zvolené úsečky). Prodloužíme-li nyní první polopřímku a naneseme na ni od bodu $\left[\frac{2\pi a}{12}, \frac{2\pi}{12}\right]$, už dříve sestrojeného, úsečku délky $2\pi a$, dostaneme zase bod křivky, na obr. 22 to bude bod A_{13}. Stejně můžeme sestrojit i body na ostatních polopřímkách, protože hodnoty úhlu φ se budou pro nové lišit od hodnot φ pro body dříve sestrojené pokaždé o 2π.

Archimédovu spirálu je také možno modelovat na počítači. K tomu by bylo vhodné přejít od polárních souřadnic k parametrickému vyjádření. V tomto případě zvolíme

$$x = r\cos t = at\cos t, \quad y = r\sin t = at\sin t,$$

kde t je parametr.

Délka Archimédovy spirály

Je konečná a určíme ji užitím vztahu (13) pro výpočet délky křivky v parametrickém vyjádření. Určíme délku spirály od počátku do nějakého bodu A na spirále, jehož poloha je dána polárními souřadnicemi r, ϑ. Nejprve určíme $\dot{x} = a\cos t - at\sin t$, $\dot{y} = a\sin t + at\cos t$. Dále je $\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} = a(1+t)$. Po dosazení do vztahu (13) je

$$s = \int\limits_0^{\vartheta} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,\mathrm{d}t = a\int\limits_0^{\vartheta} (1+t)\,\mathrm{d}t,$$

$$s = a\left[t + \frac{t^2}{2}\right]_0^{\vartheta} = a\vartheta\left(1 + \frac{1}{2}\vartheta\right) = r\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right).$$

6.2.2 Logaritmická spirála

Její rovnice v polárních souřadnicích má tvar

$$r = a\mathrm{e}^{b\varphi},$$

kde $a > 0$, $b > 0$ jsou konstantní parametry, r je poloměr – vektor spojující pól spirály P a bod ležící na spirále.

Pokud bychom tuto rovnici zlogaritmovali, dostaneme

$$\ln\frac{r}{a} = b\varphi.$$

Z tohoto vztahu pak vznikl název *logaritmická spirála*.

Konstrukce logaritmické spirály

Budeme-li postupně polárnímu úhlu přiřazovat hodnoty, které tvoří aritmetickou posloupnost, bude průvodič nabývat hodnot, které tvoří geometrickou posloupnost, tj.

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_1, \quad \varphi_2 = 2\varphi_1, \quad \varphi_3 = 3\varphi_1, \ldots$$

$$r_0 = a\mathrm{e}^{b\varphi_0} = a, \quad r_1 = a\mathrm{e}^{b\varphi_1}, \quad r_2 = a\mathrm{e}^{b\varphi_2} = a\left(\mathrm{e}^{b\varphi_1}\right)^2,$$

$$r_3 = a\mathrm{e}^{b\varphi_3} = a\left(\mathrm{e}^{b\varphi_1}\right)^3, \ldots$$

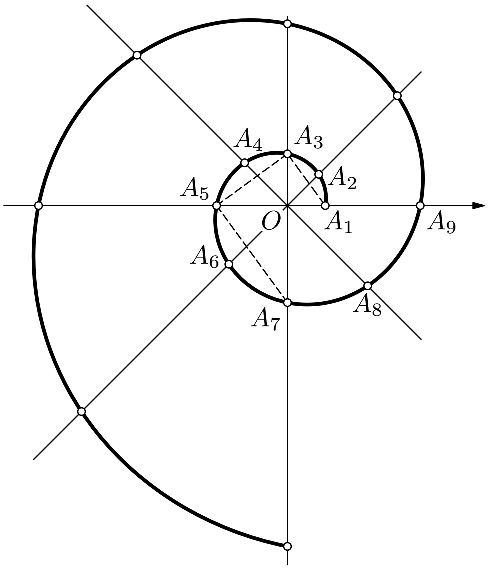
Vezmeme např.

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{8}, \quad \varphi_3 = \frac{3\pi}{8}, \ldots, \varphi_8 = \frac{8\pi}{8} = \pi$$

a vypočteme příslušné hodnoty průvodiče, tj.

$$r_0 = a,\ r_1 = a\mathrm{e}^{b\frac{\pi}{8}},\ r_2 = a\left(\mathrm{e}^{b\frac{\pi}{8}}\right)^2,\ r_3 = a\left(\mathrm{e}^{b\frac{\pi}{8}}\right)^3, \ldots,\ r_8 = a\left(\mathrm{e}^{b\frac{\pi}{8}}\right)^8.$$

Když jsme tedy rozdělili úhel $\varphi = \pi$ na osm stejných částí a nanesli na příslušné polopřímky úsečky odpovídající hodnotám průvodiče, dostaneme prvních devět bodů spirály (obr. 23).



Obr. 23 Logaritmická spirála

Konstrukci dalších bodů lze provést geometricky. Všimněte si, že např. $r_4^2 = r_0 r_8$, tj. průvodič, který odpovídá úhlu $\varphi_4 = \frac{\pi}{2}$, je geometrickým průměrem průvodičů r_0 a r_8, které odpovídají úhlům φ_0 a $\varphi_8 = \pi$. Úsečky A_1A_3 a A_3A_5 jsou tedy navzájem kolmé. Vedeme-li nyní kolmici bodem A_5, dá její průsečík s přímkou OA_3 bod A_7, který náleží spirále, protože $|OA_5|^2 = |OA_3| \cdot |OA_7|$, neboli $a^2\left(\mathrm{e}^{b\pi}\right)^2 = a\mathrm{e}^{\frac{b\pi}{2}} \cdot |OD|$, z čehož $|OD| = a\mathrm{e}^{\frac{3b\pi}{2}}$. Průsečík kolmice bodem A_7 k úsečce A_5A_7 s polární osou dá bod A_9 spirály, atd.

Takto můžeme sestrojit libovolný počet bodů spirály, ležících na vzájemně kolmých přímkách. Pro přesnější zakreslení grafu spirály je třeba ještě sestrojit řadu bodů, které budou ležet mezi dosud sestrojenými body.

Sestrojíme-li dostatečné množství bodů a spojíme je plynulou čarou, dostaneme křivku odpovídající logaritmické spirále, jak je znázorněna na obr. 23.

Rovnici logaritmické spirály je možno také vyjádřit parametricky

$$x = rcost = a\mathrm{e}^{bt}\cos t, \quad y = r\sin t = a\mathrm{e}^{bt}\sin t,$$

což je tvar vhodný pro vykreslování spirály pomocí počítače.

Pro hodnoty $b \to 0$ se bude spirála blížit kružnici (pro $b = 0$ vznikne kružnice). Změnu poloměru lze vyjádřit pomocí derivace

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = ab\mathrm{e}^{b\varphi} = br.$$

Z toho vyplývá, že nárůst spirály závisí pouze na hodnotě b, hodnota a určuje vzdálenost počátku spirály od jejího pólu.

Tečna v bodě logaritmické spirály svírá s jeho průsečíkem úhel ϑ, pro který platí

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}} = \frac{1}{b}.$$

Protože parametr $b = konst.$ můžeme říci, že logaritmická spirála je křivka, jejíž tečna svírá s touto křivkou stále stejný úhel, což se v praxi využívá při konstrukci řezných nástrojů.

Délka logaritmické spirály

Délka logaritmické spirály je konečná. Ukážeme si postup, jak ji můžeme vypočítat. Na spirále zvolíme libovolný bod A, jehož poloha je dána polárními souřadnicemi r, ϑ. Délku spirály budeme určovat od jejího počátku do bodu A užitím vztahu (13). K dosazení do vztahu (13) je třeba určit

$$\dot{x} = ab\mathrm{e}^{bt}\cos t - a\mathrm{e}^{bt}\sin t, \quad \dot{y} = ab\mathrm{e}^{bt}\sin t + a\mathrm{e}^{bt}\cos t.$$

Dále určíme

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = \left(ab\mathrm{e}^{bt}\right)^2 + \left(a\mathrm{e}^{bt}\right)^2 = a^2(b^2+1)\mathrm{e}^{2bt}.$$

Potom

$$s = \int_0^{\vartheta} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\vartheta} a\sqrt{b^2+1}\mathrm{e}^{bt}\,\mathrm{d}t,$$

$$s = \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}\mathrm{e}^{b\vartheta} = \frac{\sqrt{b^2+1}}{b}r.$$

6.2.3 Hyperbolická spirála

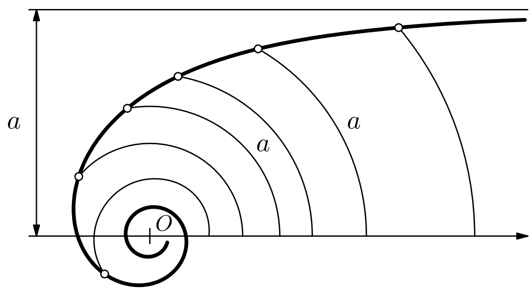
Je inverzní k Archimédově spirále, tj. má v polárních souřadnicích rovnici

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad (a > 0).$$

Bude-li se úhel φ blížit k nule, průvodič neomezeně poroste. Pro $\varphi = \pi$ je $r_0 = \frac{a}{\pi}$, pro $\varphi = 2\pi$ je průvodič poloviční $r = \frac{a}{2\pi} = \frac{r_0}{2}$; pro $\varphi = 3\pi$ je $r = \frac{r_0}{3}$ atd.

Při neomezeném vzrůstu úhlu φ se hodnoty průvodiče blíží k nule, ale nikdy jí nedosáhnou. To znamená, že křivka se neomezeně blíží k pólu O, ovine se kolem něj, ale nikdy ho nedosáhne. Takový bod nazýváme *asyptotickým bodem* křivky.

Konstrukce hyperbolické spirály



Obr. 23 Hyperbolická spirála

Abychom sestrojili graf křivky, přepíšeme její rovnici na tvar

$$a = r\varphi.$$

Z faktu, že

$$r\varphi = konst.,$$

vyplývá následující způsob konstrukce spirály, který je níže popsán.

Sestrojíme řadu soustředných kružnic se středem v pólu a na každou kružnici naneseme od jejího průsečíku s polární osou oblouk délky a. Délka každého oblouku se rovná součinu příslušného úhlu φ s poloměrem r kružnice, tj. $r\varphi$;

krajní bod každého oblouku, který tak obdržíme, tedy bude bod, který náleží spirále (obr. 23).

Závisle na tom, jak se bod spirály vzdaluje od pólu, se poloměry kružnic zvětšují, oblouk se neustále „narovnává“ a blíží se tvaru úsečky, která je kolmá k polární ose. To ukazuje, že body spirály se při přibližování úhlu φ k O blíží přímce, která je rovnoběžná s polární osou a prochází od ní ve vzdálenosti a. Vzdálenost bodů spirály od této přímky se stále zmenšuje, nikdy však nepřejde v nulu. V tomto případě říkáme, že se spirála *asymptoticky blíží* ke zmíněné přímce.

Pro záporné úhly φ dostáváme spirálu, která je souměrná s právě vyšetřovanou podle přímky procházející pólem kolmo k polární ose.

Pokud bychom chtěli znázornit hyperbolickou spirálu graficky pomocí počítače, je výhodné přejít k parametrickému vyjádření, tj.

$$x = \frac{a}{t}\cos t, \quad y = \frac{a}{t}\sin t.$$

Hyperbolická spirála je inverzní křivka k Archimédově spirále.

Nyní si ještě ukážeme už jenom stručně další spirály, se kterými je možno se také setkat.

6.2.4 Fermatova spirála

Je spirála, která je popsána rovnicí

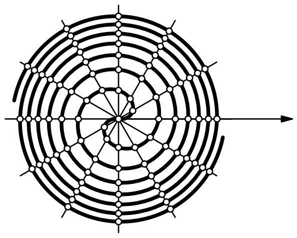
$$r^2 = a^2\varphi.$$

Pro nějakou kladnou hodnotu φ existují dvě odpovídající hodnoty r – kladná a záporná. Výsledná spirála je proto souměrná podle přímky $y = -x$ a je zobrazená na obr. 25.

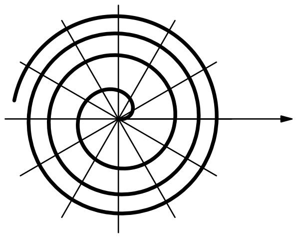
Často se ale Fermatova spirála popisuje rovnicí

$$r = a\sqrt{\varphi}.$$

V tomto případě se pak kreslí jen jedna část spirály, která je znázorněná na obr. 26.



Obr. 25 Fermatova spirála

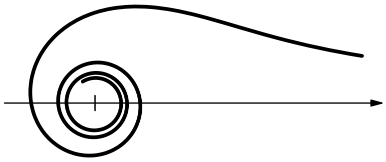


Obr. 26 Fermatova spirála – část

Pokud bychom chtěli tuto spirálu znázornit na počítači, opět je vhodné napsat rovnice této spirály parametricky

$$x = a\sqrt{t}\cos t, \quad y = a\sqrt{t}\sin t, \quad \text{kde} \quad t > 0.$$

6.2.5 Lituuova spirála



Obr. **27** Lituuova spirála

Je inverzní spirála k Fermatově spirále, tj. je to spirála o rovnici

$$r = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}, \qquad \varphi > 0.$$

Pokud bychom chtěli tuto spirálu znázornit pomocí počítače, je opět vhodné ji vyjádřit parametricky

$$x = \frac{a}{\sqrt{t}}\cos t, \quad y = \frac{a}{\sqrt{t}}\sin t, t > 0.$$

Obdobně jako u Fermatovy spirály je možné také dokreslit také druhou část této spirály.

Shrnutí

Pokud bychom napsali rovnici spirály v obecnějším tvaru

$$r = a\varphi^b,$$

potom dostaneme

pro $b = 1$ Archimédovu spirálu o rovnici $r = a\varphi$,

pro $b = -1$ hyperbolickou spirálu o rovnici $r = \frac{a}{\varphi}$, (inverzní křivka ke spirále Archimédově)

pro $b = \frac{1}{2}$ Fermatovu spirálu o rovnici $r = a\sqrt{\varphi}$,

pro $b = -\frac{1}{2}$ Lituuovu spirálu o rovnici $r = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$, (inverzní křivka k Fermatově spirále).

6.2.6 Sinová spirála

Touto spirálou se poprvé zabýval *Maclaurin*.

Sinovou spirálu lze popsat rovnicí

$$r^m = a^m \sin(m\psi).$$

Po otočení soustavy souřadnic o úhel $\varphi = \dfrac{\pi}{2m} - \psi$ je možno psát

$$r^m = a^m \cos(m\varphi).$$

Se speciálními případy sinové spirály jsme se už setkali, takže si je jen velmi stručně shrneme:

pro $m = 1$: $r = a\cos\varphi$ je rovnice kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = ax$,
pro $m = 2$: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ je Bernoulliho lemniskáta,
pro $m = -1$: $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ je přímka o rovnici $x = a$,
pro $m = -2$: $r^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2\varphi}$ je rovnoosá hyperbola o rovnici $x^2 - y^2 = a^2$,
pro $m = \dfrac{1}{2}$: $r = a\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$ je kardioida $r = 2b(1 + \cos\varphi)$; $a = 4b$,
pro $m = -\dfrac{1}{2}$: $r = \dfrac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$ je parabola o rovnici $y^2 = 4a(a - x)$.

Podrobněji je možno se s touto spirálou seznámit na přiloženém CD ROMu.

7 Cyklické křivky

Mezi cyklické pohyby patří *cykloidální, epicykloidální, hypocykloidální* a *evolventní pohyby*.

Cykloidální pohyb vzniká valením kružnice po přímce. Trajektoriím cykloidálního pohybu říkáme *cykloidy*.

Cykloida je rovinná křivka, kterou opisuje bod pevně spojený s pohybující se kružnicí, která se valí po přímce. Je-li tento bod na valící se kružnici, vznikne valením *prostá cykloida*. Je-li vzdálenost bodu od středu valící se kružnice větší než její poloměr, opisuje tento bod *cykloidu prodlouženou*. Nakonec je-li vzdálenost bodu od středu valící se kružnice menší než její poloměr, opisuje tento bod *cykloidu zkrácenou*.

Cykloida má značné užití v praxi, což je možno vidět i na historii zkoumání této křivky, se kterou se dále seznámíme.

7.1 Historie cykloidy

Tuto křivku začal studovat v roce 1599 *Galileo Galilei*, od něhož také pochází název cykloida. V roce 1639 psal o cykloidě *Toriccelli* (říká se, že ji studoval 40 let). G. Galilei se pokusil najít plochu, kterou by porovnal s plochou, kterou vytváří kruh. Později, když se mu nepodařilo nalézt vhodnou matematickou metodu, uchýlil se k vážení kousků kovů vyříznutých ve tvaru cykloidy. Hledaný poměr aproximoval intervalem od 3 do 1, ale rozhodl se, že 3 nebyla správná, nesprávně se domníval, že poměr nebude racionální číslo.

O určení plochy pod obloukem cykloidy se pokusil dále *Mersenne* společně s *Robervalem* v roce 1628. Úspěšný v řešení problému byl pouze Roberval v roce 1634. Došel k závěru, že plocha pod obloukem prosté cykloidy je $3\pi a^2$.

Roberval napsal o tomto výsledku *Descartovi*, a ten ho vyzval (a spolu s ním i další) k hledání metody pohybu tečny po cykloidě, když sám před tím objevil, jak ji zkonstruovat. Toto se Robervalovi nezdařilo, ale tento problém vyřešil *Fermat*.

Nezávisle na tomto řešení se problém nalézt plochu cykloidy podařilo také Torricellimu.

V roce 1658 začal *E. Pascal* řešit problém plochy pro vybraný segment cykloidy a hledal také hmotný střed této plochy. Začal se také zabývat řešením problému objemu a povrchu tuhého tělesa vzniklého rotací cykloidy kolem její x-ové osy. E. Pascal tento problém zveřejnil a nabídl odměnu za vyřešení těchto problémů.

Wallis a *Lalouére* začali problém řešit, ale úspěšně ho ani jeden nevyřešil. Bez vstupu do soutěže sdělili Pascalovi své výsledky *Sture, Ricci, Huygens, Wren* a *Fermat*. Nejpozoruhodnější byl Wrenův výsledek, Wren nalezl správně i délku cykloidálního oblouku, a to $8a$. Pascal potom zveřejnil svoje vlastní řešení společně s doplněním Wrenova výsledku.

V roce 1673 objevil *Huygens*, že cykloida má tu vlastnost, že částice P klouzající po cykloidě bude vykonávat harmonický kmitavý pohyb nezávislý na rozkmitu (tzv. *tautochrona*). Toto publikoval pod názvem *Horologium oscilatorium*.

Huygens zkonstruoval první kyvadlové hodiny, a to tak, že kyvadlo kývalo po cykloidálním oblouku.

V roce 1696 zformuloval *Johann Bernoulli* tzv. úlohu o *brachystochroně*. ve vertikální rovině zvolil dva body, které neleží ve svislé přímce. Měla se nalézt křivka, po které by se měl hmotný bod pohybovat, aby dospěl z jednoho bodu do druhého za co nejkratší dobu.

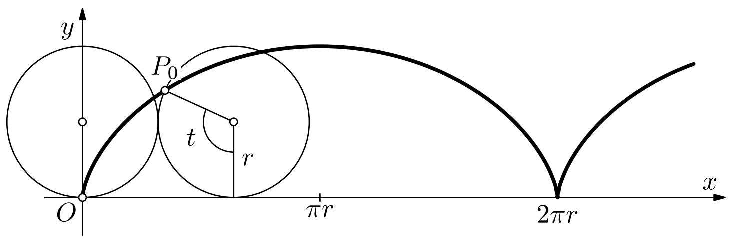
Johann Bernoulli vzápětí úlohu vyřešil, odpovídající křivka je cykloida. Řešení podal i jeho bratr *Jakob, Newton, Leibniz* a *l'Hospital*.

Řešení obou bratrů byla názorným dokladem o rozdílnosti jejich přístupů k matematickým problémům. Johann došel k výsledku geniální intuicí a využitím analogie s *Fermatovým principem o šíření světla* (tento postup je možno nalézt např. ve studijním textu Diferenciální rovnice). Jacobův systematický postup vedl k objevu *variačního počtu*, k němuž dal takto Johann podnět.

7.2 Cykloidy

7.2.1 Prostá cykloida

Bod kružnice, která se bez skluzu kotálí po přímce, opisuje *prostou* cykloidu.



Obr. 28 Prostá cykloida

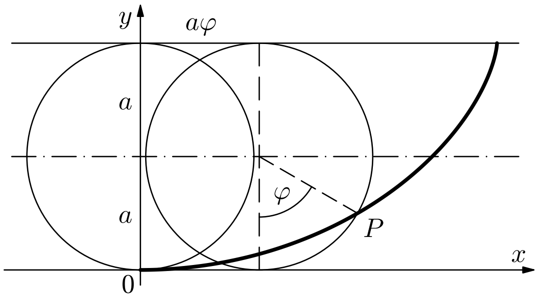
Parametrické rovnice prosté cykloidy ($t \in R$) jsou dány vztahy

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t),$$

kde r je poloměr kružnice, t je velikost úhlu odvalení.

Příklad 9 – cykloidální kyvadlo

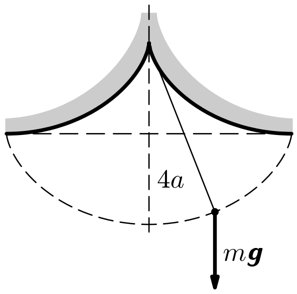
Částice o hmotnosti m je při svém pohybu v tíhovém poli vázána na jednu větev prosté cykloidy. Dokažte, že tento pohyb je periodický a že příslušná doba kmitu není závislá na amplitudě.



Obr. 29 Pohyb po cykloidě

Řešení

1.způsob:



Obr. 30 Cykloidální kyvadlo

Parametrické rovnice cykloidy jsou v tomto případě dány vztahy

$$x = a\varphi + a\sin\varphi, \qquad y = a(1 - \cos\varphi).$$

Přísluší-li krajní poloze cykloidálního kyvadla úhel α (pak je $\dot{\varphi} = 0$), lze psát zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2(1+\cos\varphi) - mga(1-\cos\varphi) = mga(1-\cos\alpha),$$

odkud

$$\mathrm{d}t = 4\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}},$$

potom

$$\tau = 4\sqrt{\frac{a}{g}} \int\limits_0^\alpha \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Nyní zavedeme substituci

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta,$$

potom

$$\tau = 8\sqrt{\frac{a}{g}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\beta = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

To je ale rovnice pro harmonický pohyb s dobou kmitu

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}},$$

tj. doba kmitu nezávisí na rozkmitu, kyvadlo je přesně izochronní.

Nyní si ještě ukážeme řešení pomocí pohybových rovnic.

2. způsob

Víme, že rychlost volného pádu tělesa z výšky h je ve výšce y nad povrchem země dána vztahem

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2g(h-y).$$

(Tento vztah lze odvodit buď ze zákona zachování mechanické energie nebo z pohybových rovnic pro volný pád.)
Napíšeme parametrické rovnice cykloidy

$$x = a(\varphi + \sin\varphi), \qquad y = a(1-\cos\varphi).$$

Z rovnic pak můžeme odvodit

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 = 2a^2(1+\cos\varphi)(\mathrm{d}\varphi)^2,$$

potom

$$\mathrm{d}s = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$$

a integrací dostaneme (při volbě počátku oblouku v počátku soustavy souřadnic $[0,0]$)

$$s = 4a \sin\frac{\varphi}{2}. \tag{25}$$

Vztah pro y můžeme upravit na tvar

$$y = a(1-\cos\varphi) = 2a\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Po dosazení za $\sin\frac{\varphi}{2}$ ze vztahu (9) dostaneme pro y vztah

$$y = \frac{s^2}{8a}.$$

Dále vypočteme tečnou rychlost

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2g\left(h-\frac{s^2}{8a}\right)} = \sqrt{2gh\left(1-\frac{s^2}{8ha}\right)}$$

a určíme tečné zrychlení

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{-gs}{4a\sqrt{2g\left(h-\frac{s^2}{8a}\right)}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

čili

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{4a}s.$$

Tato rovnice je rovnicí harmonického pohybu, z rovnice můžeme určit, že

$$\omega^2 = \frac{g}{4a} = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

z čehož

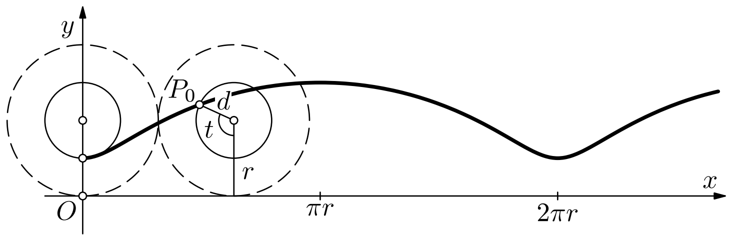
$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Historická poznámka:

Cykloidální kyvadlo sestrojil Huygens v roce 1673.

7.2.2 Zkrácená cykloida

Zkrácená cykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s kotálející se (hybnou) kružnicí leží ve *vnitřní* oblasti této kružnice ve vzdálenosti d ($d < r$) od středu kružnice o poloměru r.



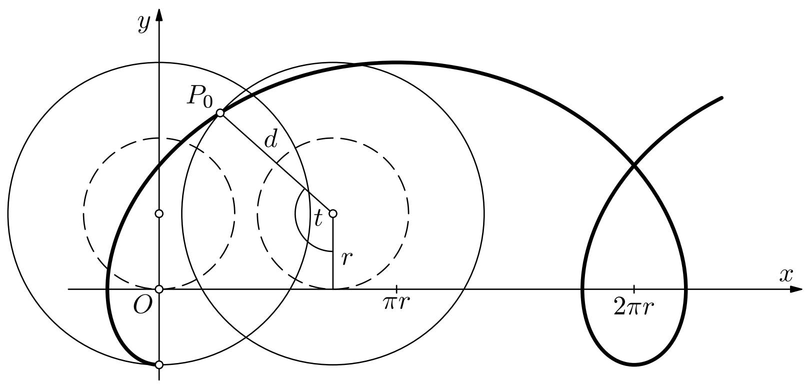
Obr. 31 Zkrácená cykloida

Parametrické rovnice zkrácené cykloidy jsou ($t \in R$)

$$x = rt - d \sin t, \quad y = r - d \cos t.$$

7.2.3 Prodloužená cykloida

Prodloužená cykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s kotálející se (hybnou) kružnicí leží ve *vnější* oblasti této kružnice ve vzdálenosti d ($d > r$) od středu kružnice o poloměru r.



Obr. 32 Prodloužená cykloida

Parametrické rovnice prodloužené cykloidy jsou opět jako v případě zkrácené cykloidy ($t \in R$)

$$x = rt - d \sin t, \quad y = r - d \cos t.$$

7.3 Epicykloidy a hypocykloidy

Historie

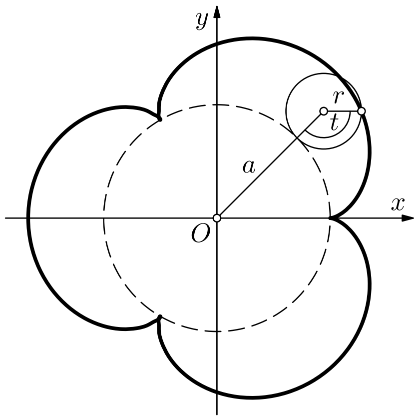
Tyto křivky studovali *Dührer* (1525), *Desargues* (1640), *Huygens* (1679), *Leibniz, Newton_* (1626), *l'Hospital* (1690), *Jacob Bernoulli* (1690), *la Hire* (1694), *Johann Bernoulli* (1695), *Daniel Bernoulli* (1725), *Euler* (1745, 1781).

Např. *epitrochoidu* objevil *Dührer* ve své práci *Instruction in measurement with compasses and straight edge* (1525).

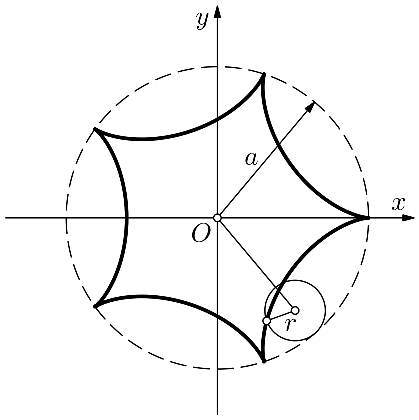
7.3.1 Parametrické rovnice epicykloidy a hypocykloidy

Prostá epicykloida a hypocykloida

Epicykloida (hypocykloida) vzniká odvalováním pohyblivé kružnice o poloměru r vně (uvnitř) pevné kružnice o poloměru a.



Obr. 33 Epicykloida



Obr. 34 Hypocykloida

Obě křivky lze vyjádřit také parametricky, a to epicykloidu rovnicemi

$$x = (a + r)\cos t - r\cos\left(\frac{a+r}{r}t\right), \quad y = (a + r)\sin t - r\sin\left(\frac{a+r}{r}t\right),$$

hypocykloidu pak rovnicemi

$$x = (a - r)\cos t + r\cos\left(\frac{a-r}{r}t\right), \quad y = (a - r)\sin t - r\sin\left(\frac{a-r}{r}t\right).$$

Je-li poměr $\frac{a}{r} = m$ celé číslo, pak prostá epicykloida (hypocykloida) je uzavřena křivkou s m větvemi, které vzniknou při jednom oběhu hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

Je-li poměr $\frac{a}{r} = \frac{p}{q} = m$ racionálním číslem v základním tvaru $\frac{p}{q}$, pak prostá epicykloida (hypocykloida) je uzavřena křivkou s p větvemi, které vzniknou při q obězích hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

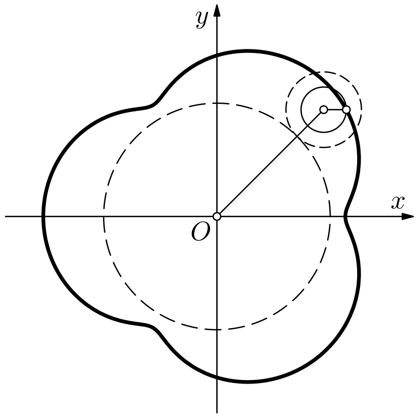
Je-li poměr $\frac{a}{r} = m$ iracionálním číslem, pak prostá epicykloida (hypocykloida) není uzavřenou křivkou a obsahuje nekonečně mnoho větví.

Zkrácená a prodloužená epicykloida

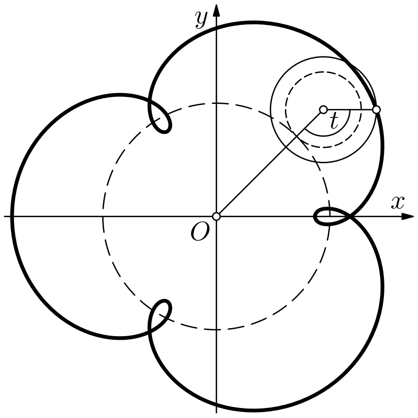
Parametrické rovnice zkrácené a prodloužené epicykloidy jsou dány vztahy

$$x = (a+r)\cos t - d\cos\left(\frac{a+r}{r}t\right), \quad y = (a+r)\sin t - d\sin\left(\frac{a+r}{r}t\right),$$

kde r je poloměr čárkované pohyblivé (odvalující se kružnice), d je poloměr odvalující se kružnice, která je na obr. 35, 36 znázorněna plnou čarou, a je poloměr pevné (čárkované) kružnice. Je-li $d < r$, jedná se o epicykloidu zkrácenou, je-li $d > r$, jedná se o epicykloidu prodlouženou (viz obr. 35 a obr. 36).



Obr. 35 Zkrácená epicykloida



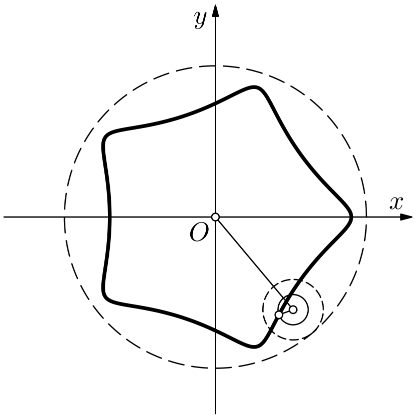
Obr. 36 Prodloužená epicykloida

Zkrácená a prodloužená hypocykloida

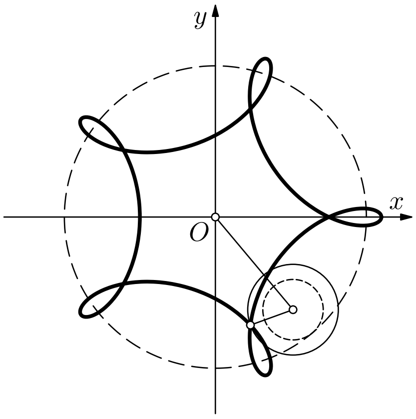
Parametrické rovnice zkrácené a prodloužené hypocykloidy jsou dány vztahy

$$x = (a-r)\cos t + d\cos\left(\frac{a-r}{r}t\right), \quad y = (a-r)\sin t - d\sin\left(\frac{a-r}{r}t\right),$$

kde r je poloměr čárkované pohyblivé (odvalující se kružnice), d je poloměr odvalující se kružnice, která je na obr. 37, 38 znázorněna plnou čarou, a je poloměr pevné (čárkované) kružnice. Je-li $d < r$, jedná se o hypocykloidu zkrácenou, je-li $d > r$, jedná se o hypocykloidu prodlouženou (viz obr. 37 a obr. 38).



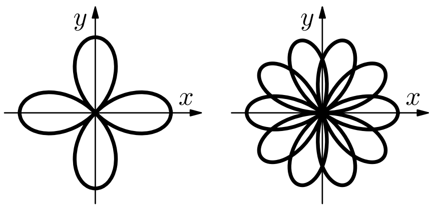
Obr. 37 Zkrácená hypocykloida



Obr. 38 Prodloužená hypocykloida

7.4 Rhodonea křivky

$k = \frac{p}{q} = 2$ $\qquad$ $k = \frac{p}{q} = \frac{5}{2}$



Obr. 39 Rhodonea

V polárních souřadnicích mají tyto křivky rovnici

$$r = a\cos\left(\frac{p}{q}t\right).$$

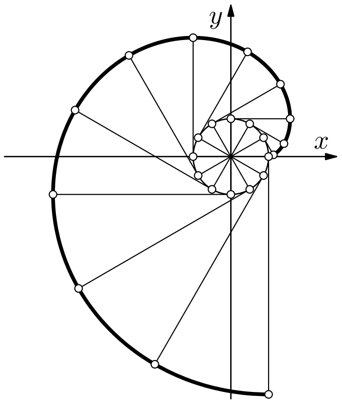
Označíme-li $k = \frac{p}{q}$, pak můžeme psát

$$r = a\cos(kt).$$

Je-li k celé, pak okvětní lístky závisejí na tom, zda je k sudé nebo liché. Je-li k iracionální, pak se počet okvětních lístků blíží nekonečnu. Např. pro $k = 2$ dostaneme čtyřlístek znázorněný na obr. 39 vlevo. Pokud bychom chtěli *rhodonea křivky* modelovat pomocí počítače, je vhodné přejít k jejich parametrickému vyjádření

$$x = a\cos\left(\frac{p}{q}t\right)\cos t, \quad y = a\cos\left(\frac{p}{q}t\right)\sin t.$$

7.5 Evolventa

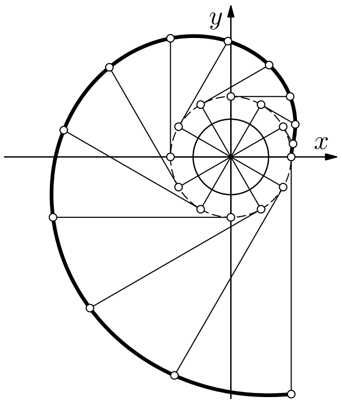


Bod pevně spojený s přímkou, která se kotálí po pevné kružnici, opisuje *evolventu*.

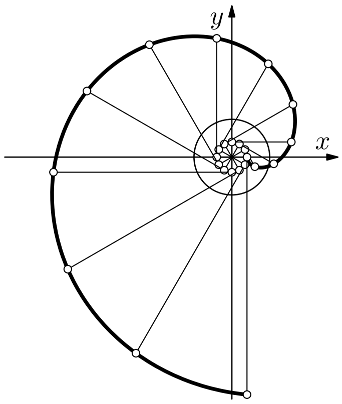
Konstrukce evolventy

Obvod dané kružnice rozdělíme na určitý počet stejných dílů, zrektifikujeme oblouk příslušný jednomu dílu a pak na příslušné tečny ke kružnici v dělících bodech naneseme příslušný počet délek zrektifikovaných oblouků.

Obr. 40 Prostá evolventa



Obr. 41 Zkrácená evolventa



Obr. 42 Prodloužená evolventa

Parametrické rovnice vyplývají z postupu konstrukce a jsou dány vztahy

$$x = (r + d)\cos t + rt\sin t, \quad y = (r + d)\sin t - rt\cos t,$$

kde r je poloměr kružnice (na všech obrázcích znázorněné plnou čarou). Pro $d = 0$ vzniká *evolventa prostá* (obr. 40), pro $d > 0$ *evolventa zkrácená* (obr. 41) a pro $d < 0$ *evolventa prodloužená* (obr. 42).

Pro $d = -r$ vznikne prodloužená evolventa zvaná *Archimédova spirála* o parametrických rovnicích

$$x = rt\sin t, \quad y = -rt\cos t.$$

8 Algebraické křivky

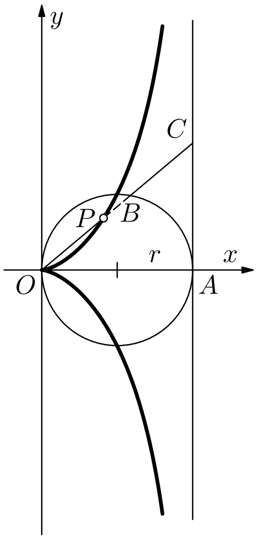
8.1 Dioklova kisoida

Historie

Tuto křivku znali již staří Řekové a nazvali ji *kisoidou* (cissoidou) podle domnělé podobnosti s břečťanovým listem (v části ležící v základní kružnici společně s jeho příslušným obloukem; břečťan se řecky nazýval *kissos*).

Tuto křivku sestrojil řecký geometr *Diokles* (250 až 100 let př. n. l.).

Matematický popis



Obr. 43 Dioklova kisoida

Postup konstrukce kisoidy

Základní čáry ke konstrukci kisoidy jsou kružnice a její tečna v určitém bodě. V protilehlém místě vzhledem k bodu dotyku A sestrojíme přímku rovnoběžnou se zvolenou tečnou – osu y, za osu x pak zvolíme přímku, jejíž část tvoří spojnice OA (viz obr. 43). Z bodu O budeme nanášet paprsky na tečnu a na kružnici dle obr. 43. Podstatné na celé konstrukci je, že se musí rovnat délky úseček OP a BC, tj. $|OP| = |BC|$. Body B pak vytvoří kisoidu.

Odvození rovnice kisoidy

Nyní popíšeme výše uvedený postup analyticky. Přímka svazku jdoucího bodem $P = [x, y]$ protíná základní kružnici o poloměru r mimo bod $O = [0, 0]$ v bodě $B = [b_1, b_2]$, který leží na přímce o rovnici

$$b_2 = \frac{y}{x} b_1,$$

a na kružnici o rovnici

$$(b_1 - r)^2 + b_2^2 = r^2,$$

po úpravě

$$b_1^2 + b_2^2 - 2rb_1 = 0.$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých b_1, b_2, jejímž řešením dostaneme

$$b_1 = \frac{2rx^2}{x^2 + y^2}.$$

Přímka procházející bodem P protíná základní tečnu v bodě C. Protože platí $|OP| = |OC|$, pak můžeme psát

$$x = 2r - b_1.$$

Po dosazení za b_1 dostaneme

$$x = 2r - \frac{2rx^2}{x^2 + y^2}.$$

Položíme-li $a = 2r$, dostaneme rovnici kisoidy

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$$

Z této rovnice vyplývá, že kisoida leží pouze v prvním a čtvrtém kvadrantu, a to v přímém pásu omezeném osou y a přímkou $x = a$; je souměrná podle osy x. Je to křivka 3. stupně.

V polárních souřadnicích lze vyjádřit rovnici kisoidy ve tvaru

$$r = 2a \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi.$$

Parametrické vyjádření kisoidy (vhodné pro kreslení na počítači) je dáno vztahy

$$x = \frac{at^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1 + t^2}.$$

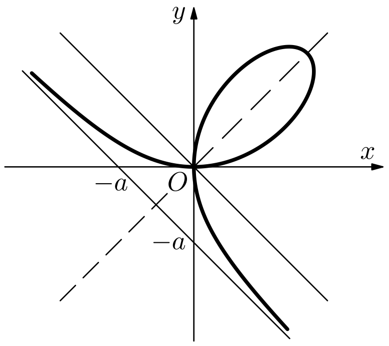
8.2 Descartův list

Historie

První zmínka o této křivce se objevuje v Descartových dopisech *Mersennovi* v roce 1638. Její celkový průběh vyšetřil až *Huygens* v roce 1692.

Descartes hledal tvar této křivky v 1. kvadrantu a domníval se, že tento list také opakovaně nalezne i v ostatních kvadrantech jako tvar čtyř okružních lístků rostlin. *Roberval* se domníval, že křivka má tvar *jasmínu*. Jméno jím navržené křivky „fleur de jasmin“ bylo později změněno, křivka je často známá pod názvem „noneud de ruban“.

Matematický popis



Descartův list je kisoida elipsy o rovnici

$$x^2 - xy + y^2 + a(x + y) = 0,$$

kde $a > 0$, vzhledem k přímce

$$x + y + a = 0$$

pro pól O. Tato křivka má v kartézských souřadnicích rovnici

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

Obr. 44 Descartův list

v polárních souřadnicích

$$r = \frac{3a \sin\varphi \cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

V parametrickém vyjádření má tato křivka rovnice

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

Descartův list je křivka třetího stupně souměrná podle přímky $y = x$, v bodě O má uzel. Tečny křivky jsou totožné s osami x, y. V bodě $A = \left[\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right]$ má vrchol, asymptotu má v dané přímce $x + y + a = 0$.

8.3 Nikomédova konchoida

Historie

Nikomédes byl geometr, který žil v období asi 180 let př.n.l.. Jeho objev konchoidy byl původně připsán *Pappovi*. V 17. století ale matematici zjistili, ale Nikomédes použil konchoidu k trisekci úhlu.

Nikomédova konchoida znamenala pokrok při řešení klasického problému jak zdvojnásobit krychlový oltář v Delfské věštírně. Stejně tak lze rozdělit pomocí konchoidy úhel na tři stejné díly.

Pappos (3. století) původně křivku pravděpodobně nazval „kochloida“ (kochlei - druh ryby v Řecku). Teprve později (5. století) ji *Proklas* přejmenoval na „konchoida“ (znamená tvar škeble).

Nikomédes (2. stol. př.n.l.) tuto křivku sestrojil zvláštním přístrojem, který vynalezl.

Matematický popis

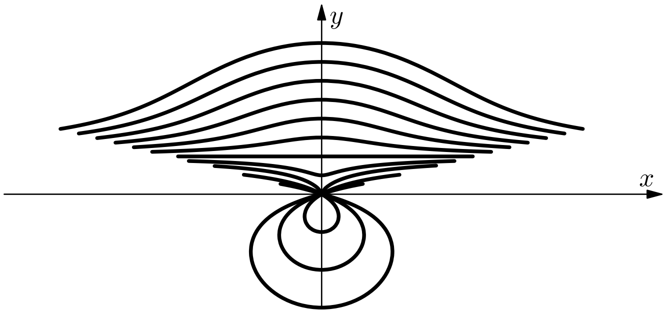
Rovnice Nikomédovy konchoidy v polárních souřadnicích je dána vztahem

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b,$$

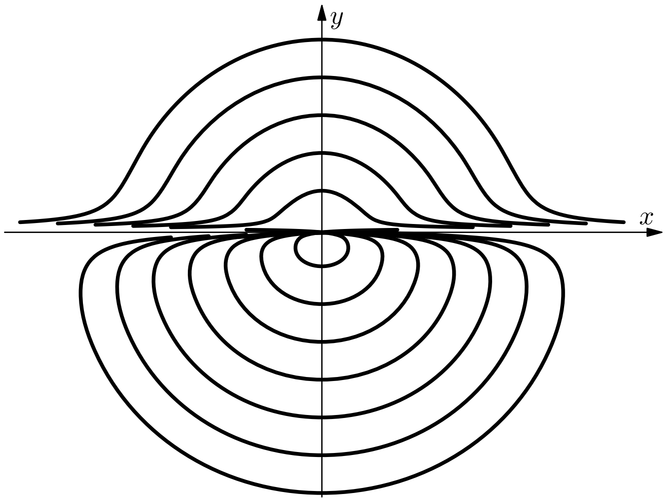
parametricky lze psát rovnice Nikomédovy konchoidy ve tvaru

$$x = t + \frac{at}{\sqrt{b^2 + t^2}}, \quad y = b + \frac{ab}{\sqrt{b^2 + t^2}}.$$

Podle hodnot konstant a, b a parametru t může mít Nikomédova konchoida různé tvary, jak je vidět na obr. 45 a 46. Postup konstrukce Nikomédovy konchoidy je uveden na CD ROMu.



Obr. 45 Nikomédova konchoida $a \in \langle -200; 150 \rangle$, $b = 50$, $t \in \langle -20; 20 \rangle$



Obr. 46 Nikomédova konchoida $a \in \langle -3500; 2500 \rangle$, $b = 50$, $t \in \langle -150; 150 \rangle$

8.4 Pascalova závitnice (limacon)

Historie

Pojem *limacon* pochází z latinského slova „limax“, což znamená hlemýžď. Tuto křivku objevil a pojmenoval *Étienne Pascal*, otec Blaise Pascala. Touto křivkou se dále zabýval a zkoumal ji *Roberval* v roce 1650.

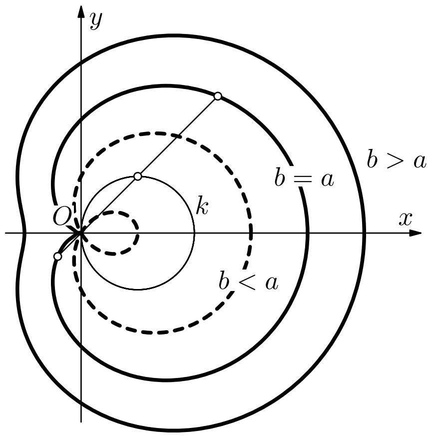
Matematický popis

Jedná se o *konchoidu* kružnice. Kružnici o rovnici

$$r = a\cos\varphi,$$

(v polárních souřadnicích) protneme svazkem přímek o vrcholu (pólu) v O a od průsečíku přímky s kružnicí naneseme na obě strany úsečku konstantní délky b. Koncové body úseček leží na konchoidě kružnice, která má v polárních souřadnicích rovnici

$$r = a\cos\varphi \pm b.$$



Obr. 47 Pascalův limacon

V pravoúhlých souřadnicích je rovnice limaconu dána vztahem

$$(x^2 + a^2 - ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Konchoida kružnice (Pascalova závitnice) je souměrná podle osy x, v pólu O má dvojný bod (pro $b < a$ je to uzel, pro $b = a$ hrot (kardioida), pro $b > a$ je pól izolovaný bod – viz obr. 47).

Parametrické rovnice limaconu jsou dány vztahy

$$x = (a\cos t + b)\cos t,$$
$$y = (a\cos t + b)\sin t.$$

Je-li $b \geq a$, pak plocha limaconu je $(2a^2 + b^2)\pi$.

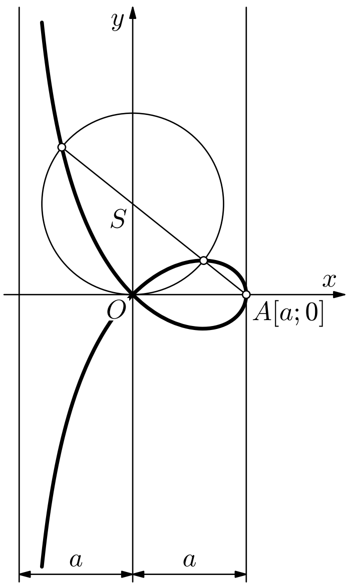
Je-li $b = \frac{a}{2}$ (speciálně $\frac{a}{2} = b = 1$), pak plocha uvnitř smyčky je $a^2\left(\pi - 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ a plocha mezi smyčkami je $a^2\left(\pi + 3\sqrt{3}\right)$.

8.5 Strofoida

Historie

Strofoidu poprvé objevil při své práci *Isaac Barrow* v roce 1670, i když *Torricelli* popsal tuto křivku ve svých dopisech kolem roku 1645. Jméno (ve významu „kroucený pás“) navrhl *Montucci* v roce 1846.

Matematický popis



Obr. 48 Strofoida

Svazek kružnic o společné tečně v ose x s bodem dotyku v počátku protneme průměry vedenými bodem $A[a;0]$. Krajní body průměrů jsou body (přímé) strofoidy, která má v polárních souřadnicích rovnici

$$r = a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

V kartézských souřadnicích je rovnice strofoidy popsána vztahem

$$x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0,$$

z čehož

$$y^2 = x^2\frac{a-x}{a+x}.$$

Pokud bychom chtěli nakreslit graf strofoidy pomocí počítače, je vhodné použít parametrické vyjádření

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2},$$
$$y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^2}.$$

Křivka je souměrná podle osy x, v počátku O má uzel s tečnami $y = \pm x$ a přímku $x + a = 0$ má za asymptotu.

9 Další křivky

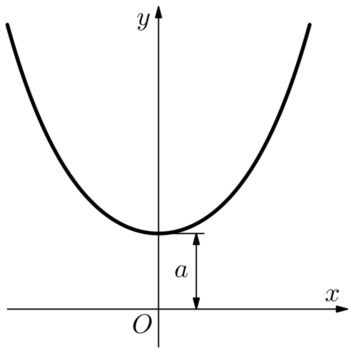
Matematických křivek existuje v dnešní době celá řada, my se v této části zaměříme na dvě, které mají značný historický význam a dost velké praktické užití.

9.1 Řetězovka (catenary)

Historie

Je křivka, kterou vytváří dokonale ohebné lano (řetěz) při zavěšení v krajních bodech. Poprvé použil termín *catenary* v roce 1690 *Huygens* v dopise *Leibnizovi*. V roce 1691 se touto křivkou zabývali *Leibniz, Huygens* a *Johann Bernoulli*.

Matematický popis



Obr. 49 Řetězovka

Obecná rovnice řetězovky má tvar

$$y = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right) = a\cosh\frac{x}{a}.$$

Odvození tohoto vztahu pro řetězovku je možno nalézt ve studijním textu *Diferenciální rovnice* – str. 45. Tento text je umístěn na CD ROMu, který je součástí tohoto textu.
Při malých průvěsech je možno *tíhovou řetězovku* nahradit *parabolou*. Parabolickou řetězovku lze pak snadněji zvládnout analyticky.

Podrobnější informace o vztahu řetězovky a paraboly popisují dva příklady ve studijním textu *Diferenciální rovnice*.

9.2 Traktrix

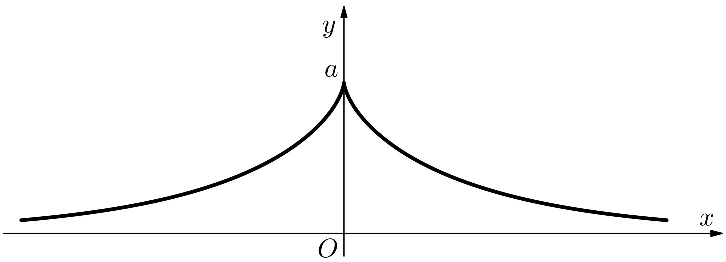
Historie

Tuto křivku studoval *Huygens* v roce 1692, později také *Leibniz, Johann Bernoulli, Liouvile* a *Beltram*. Traktrix je často také nazýván jako *ekvitangenciální křivka* nebo také „*tractory*“.

Matematický popis

Hmotný bod na konci neroztažitelného přímého vlákna konstantní délky a opisuje křivku zvanou *traktrix*, jestliže se druhý krajní konec vlákna pohybuje po přímce $y = 0$ a vlákno se zároveň bez skluzu otáčí (obr. 50). Tečna každého bodu této křivky, tj. úsek tečny mezi bodem dotyku a jejím průsečíkem s osou x, má konstantní délku a.

Traktrix je evolventou řetězovky, tj. při kotálení tečny po řetězovce vytváří vrchol řetězovky traktrix.



Obr. 50 Traktrix

Parametrické rovnice traktrix (v 1. kvadrantu) jsou dány vztahy

$$x = -a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a\sin t,$$

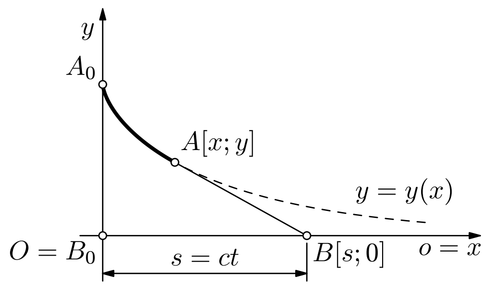
kde parametr $t \in (0, \pi)$ je velikost úhlu, který tečna svírá s osou x.
V kartézské soustavě souřadnic je rovnice traktrix (v 1. kvadrantu) dána vztahem

$$x = a\left[-\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2} - \ln\frac{\frac{y}{a}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}}\right]. \tag{26}$$

Asymptota traktrix je $y = 0$.

Příklad 10 – rovnice traktrix

Vlečeme-li tělísko A na laně stálé délky a (obr. 51) tak, že se bod B pohybuje rovnoměrně po přímce o, opíše bod A křivku, kterou nazýváme traktrix. Na základě zadání odvoďte rovnici této křivky.



Obr. 51 Vlečení tělíska na laně

Řešení

Předpokládejme, že tělísko je nehmotné a že tedy setrvačné síly, působící na bod A, jsou nulové. Zavedeme-li soustavu souřadnic podle obr. 51, představuje lano $AB = a$ tzv. *délku tečny* hledané křivky. Pro délku tečny na obr. 51 nyní odvodíme užitím analytické diferenciální rovnici, jejímž řešením obdržíme hledanou křivku. Dle obr. 51 platí

$$a^2 = (s - x)^2 + y^2 = \left(-\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2,$$

$$a = -\frac{y}{y'}\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Dostali jsme diferenciální rovnici hledané křivky. Abychom rovnici vyřešili, provedeme postupnými úpravami nejprve separaci proměnných, tj.

$$y^2[1 + (y')^2] = -a^2(y')^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{\frac{y^2}{a^2 - y^2}},$$

z čehož

$$\mathrm{d}x = -\sqrt{\frac{a^2 - y^2}{y^2}}\,\mathrm{d}y = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,\mathrm{d}y,$$

potom

$$x = -\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,\mathrm{d}y. \tag{27}$$

Výše uvedený integrál budeme dále řešit pomocí substituce $y = a\sin\varphi$,

$$\text{potom } \mathrm{d}y = a\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = a\sqrt{1-\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Po dosazení do výše uvedeného integrálu dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,\mathrm{d}y = a\int \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int \frac{1-\sin^2\varphi}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\int \frac{1-\sin^2\varphi}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int \frac{1}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi - \int \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Dále určíme

$$\int \frac{1}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int \frac{\sin\varphi}{\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int \frac{\sin\varphi}{1-\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\int \frac{\sin\varphi}{1-\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} + C.$$

Zlomek v posledním výrazu ještě rozšíříme členem $1+\cos\varphi$ a upravíme na tvar

$$\int \frac{1}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \ln\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} + C.$$

Nakonec je tedy

$$\int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,\mathrm{d}y = a\left(\cos\varphi + \ln\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right) + C.$$

Nyní už jen zpětně dosadíme do (27) a dostaneme

$$x = a\left[-\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2} - \ln\frac{\frac{y}{a}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}}\right] + C.$$

Je-li $x = 0$, pak je $y = a$, z čehož po dosazení do poslední rovnice dostaneme integrační konstantu $C = 0$, a tím hledanou rovnici křivky traktrix (26).

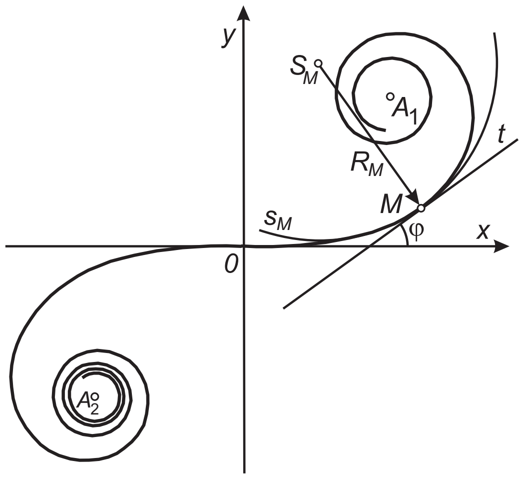
9.3 Klotoida

Klotoida je křivka, jejíž vlastností se využívá především v silničním stavitelství – jako tzv. *přechodnice* (při přechodu přímé silnice v zatáčku). Další název pro tuto křivku, se kterým je možno se setkat např. při matematickém popisu difrakčních jevů, je tzv. *Cornuova spirála*. Již *Euler* považoval oba tyto názvy za rovnocenné pro jednu a tutéž křivku.

Klotoida je křivka, jejíž poloměr křivosti R v bodě M je nepřímo úměrný délce s oblouku mezi tímto bodem a pevně zvoleným bodem O, tj.

$$R = \frac{a^2}{s},$$

kde konstanta a je tzv. *parametr*, který určuje poměrnou velikost křivky.



Obr. 52 Klotoida

Parametrické rovnice klotoidy nelze popsat způsobem, jak jsme to až doposud dělali. Její parametrické rovnice vyjadřujeme pomocí tzv. *Fresnelových integrálů*, které jsou pro praktické užití tabelovány. Platí

$$x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a^2}\, \mathrm{d}s, \quad y = \int_0^s \sin \frac{s^2}{2a^2}\, \mathrm{d}s.$$

Je-li parametrem úhel $\varphi = \dfrac{s^2}{2a^2}$, mají parametrické rovnice tvar

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}}\, \mathrm{d}\varphi, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}\, \mathrm{d}\varphi.$$

Jestliže $\varphi = \dfrac{\pi t^2}{2}$, mají parametrické rovnice tvar

$$x = a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2}\, \mathrm{d}t, \quad y = a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2}\, \mathrm{d}t.$$

Výsledky cvičení

Zde jsou uvedeny pouze výsledky cvičení, na CD ROMu je možno nalézt celý postup řešení v části **Základní pojmy** – Příklady – odkazy Cvičení 1 až 4.

Cvičení 1 – střed a poloměr křivosti

1. $R = -\frac{a^2}{b}$, $m = 0$, $n = -\frac{e^2}{b}$.

2. $R = \frac{y}{a^2}$, $m = x - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right) y$, $n = 2y$.

Cvičení 2 – parametrické vyjádření křivek

1. Na CD ROMu.
2.

a) $x = \frac{a}{2}\sin 2t$, $y = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2t$,

b) $x = -\frac{a}{2} + a\cos t - a\cos 2t$, $y = a\sin t - \frac{a}{2}\sin 2t$,

c) $x = a\cos\frac{t}{3}\cos t$, $y = a\cos\frac{t}{3}\sin t$.

Cvičení 3 – délka křivky

1. $s = \frac{v_0^2 \sin\alpha}{g} + \frac{v_0^2\cos\alpha}{g}\ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

2. $s = \frac{v_0}{g}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2Hg}}{v_0}\sqrt{1+\frac{2Hg}{v_0^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2Hg}}{v_0} + \sqrt{1+\frac{2Hg}{v_0^2}}\right)\right]$,

3. $s = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right)$.

Cvičení 4 – obsah oblasti

1. $S = \frac{\pi a^2}{2}$,

2. $S = a^2$.

Literatura

[1] Bartch, H.: *Matematické vzorce.* SNTL, Praha 1987.

[2] Brát, V.: *Příručka kinematiky s příklady.* SNTL, Praha 1976.

[3] Budinský, B. – Kepr, B.: *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi.* SNTL, Praha 1970.

[4] Juliš, K. – Brepta, R.: *Mechanika I. – statika a kinematika.* SNTL, Praha 1986.

[5] Pospíšil, A. – Kotík, J. – Kriegelstein, E. – Vencálek, F.: *Matematika pro 2. ročník SPŠ.* SPN, Praha 1955.

[6] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky.* SPN, Praha 1981.

[7] Schalk, H., CH. a kol.: *Mathematik für höhere technische lehranstalten III.* RENIETS VERLAG GMBH, Wien 1988.

[8] Škrášek, J. – Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky.* SNTL, Praha 1986.

[9] Šrejtr, J.: *Technická mechanika – kinematika.* SNTL, Praha 1955.

[10] Švercl, J. – Tarbajovský, J.: *Technické kreslení - sbírka příkladů a úloh z deskriptivní geometrie.* SNTL, Praha 1980.

[11] Švercl, J. – Vávra, J.: *Technické kreslení II - deskriptivní geometrie pro SPŠ strojnické.* SNTL, Praha 1981.

[12] Tarasov, N., P.: *Základy vyšší matematiky pro střední průmyslové školy.* SPN, Praha 1953.

[13] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie II.* SNTL, Praha 1984.

[14] Vencálek, F. – Navara, F. – Vicovský, K.: *Matematika pro 3. ročník SPŠ a SZTŠ.* SPN, Praha 1965.

[15] Vojtěch, J.: *Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1959.

[16] *Časopis 100+1 zahraniční zajímavost.* 15/2000, 19. července 2000.

[17] *Rozhledy matematicko – přírodovědecké.* Ročník 30 (1950/51), číslo 2.

[18] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves.html