INTEGRÁLNÍ POČET VE FYZICE

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Miroslava Jarešová – Ivo Volf

Obsah

Úvod

„Není objevu, který by způsobil v matematických vědách převrat takový šťastný a takový úplný jako infinitezimální počet, který by poskytl badatelům prostředky takové jednoduché, pestré a účinné při poznávání fyzikálních zákonů.“

Lazare Nicolas Carnot: Reflexions sur la méthaphysique du calcul infinitésimal (1796)

První zkušenosti a pochybnosti s infinitezimálními myšlenkami začal mít člověk tehdy, když chtěl přenést poznatky z rovných čar, útvarů či těles na oblé křivky, útvary nebo tělesa. Prvním objektem, kterým se začal zabývat, byl kruh. S velkou pravděpodobností jedna z prvních úloh infinitezimálního počtu byla úloha určit obsah kruhu. Toto problematikou se pravděpodobně jako první zabýval Hippokratus z Chia (přibližně 440 let př. n. l, tzv. Hippokratovy měsíčky). Přibližně v této době přichází také Zenon z Eleje se svým paradoxem Achilla a želvy. Přesný důkaz Hippokratovy úlohy nalezl Eudoxos (asi 408 až 355 př. n. l.). Eudoxův důkaz se stal základem první teoretické koncepce infinitezimálního počtu, koncepce, kterou k vrcholu přivedl Archimédes…

Ve vývoji každé teorie vzniká okamžik, kdy se shromážděné poznatky začínají posuzovat z nového, abstraktně vyššího bodu. Těžištěm výzkumu přestávají být jednotlivé úlohy a přechází se na hledání metod jejich řešení. Je to vlastně přechod k univerzálním modelům a poznatkům. V oblasti infinitezimálního počtu je tímto okamžikem druhá polovina 17. století. Tehdy vzniká diferenciální a integrální počet, v tomto případě dokonce ve dvou podáních: Leibnize a Newtona.

V 17. a 18. století ovlivnil vývoj matematiky ve větší míře Leibnizův diferenciální počet, ale pro své pedagogické využití jsou důležitější myšlenky Newtona. Leibniz ale vytvořil dodnes používanou symboliku pro diferenciál a integrál.

Newtonova teorie je ve své konečné podobě založená na pojmu limita a na tomto pojmu je založena současná analýza. Říkáme v závěrečné podobě, protože Newtonovy názory na základy infinitezimálního počtu se měnily.

Integrace či řešení diferenciálních rovnic je někdy „neřešitelná“ úloha, pod čímž je třeba chápat nemožnost vyjádřit výsledek pomocí elementárních funkcí. V 17. století byla představa o řešení úloh integrací podstatně méně jasná. Vědělo se však, že jsou to problémy často velmi složité. K jejich řešení se často používalo nahrazení funkce polynomem. Takto získané výsledky byly alespoň zčásti vyhovující. Intuitivně se tušilo, že získané výsledky budou tím přesnější, čím bude stupeň polynomu, kterým aproximujeme danou funkci vyšší. Dnes už víme, že takovou aproximaci je možno provést derivací – pomocí tzv. *Taylorova rozvoje*, který je možno nalézt v řadě vysokoškolských učebnic.

My se ale v našem textu omezíme se jen na výpočty integrálů, které je možno určit běžně používanými metodami.

1 Pojem integrál

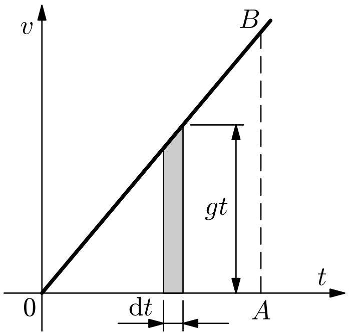
Pod pojmem *integrál* budeme zatím rozumět součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin – diferenciálů (při tomto popisu musíme ovšem brát v úvahu, že změny musí na sebe navazovat). Pro lepší pochopení si představme např. úsečku, kterou rozdělíme teoreticky na nekonečně velký počet nekonečně malých úseků. Je jasné, že součet délek těchto úseček dává přesně délku celé původní úsečky. Toto je vlastně příklad, v němž součet nekonečného počtu nekonečně malých veličin má konečnou hodnotu.

V další části si ukážeme praktický význam tohoto poznatku.

1.1 Integrál a fyzika

Budeme předpokládat, že jsme na základě experimentů zjistili, že rychlost v tělesa padajícího volným pádem (které budeme považovat za hmotný bod) je daná vztahem $v = gt$, kde t je doba volného pádu tělesa, g je tíhové zrychlení. Na základě tohoto vztahu bychom nyní chtěli zjistit závislost dráhy tělesa na čase, tj. chceme nalézt funkci $s = s(t)$. Uvědomme si, že vlastně chceme nějakým matematickým způsobem odvodit nám dobře známý vztah $s = \frac{1}{2}gt^2$. V našich úvahách budeme předpokládat, že v čase $t = 0$ je $v = 0$ a $s = 0$.

Dráha uražená tělesem za dobu $\mathrm{d}t$ je dána vztahem $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ (což je vlastně založeno na úvaze, že v průběhu nekonečně malé doby $\mathrm{d}t$ se velikost rychlosti v nemění, pak použijeme vlastně vztah pro rovnoměrný pohyb), přičemž $v = gt$ pro daný časový interval $\mathrm{d}t$. Celková dráha, kterou těleso urazí, je pak dána součtem všech elementárních drah $\mathrm{d}s$. Součet diferenciálů má však v tomto případě už hlubší smysl, protože hodnotu tohoto součtu předem neznáme. Položme si ale otázku, zda lze tento součet určit, a pokud ano, tak jakým způsobem.



Obr. 1 Závislost rychlosti tělesa padajícího volným pádem na čase

Při odvození vztahu pro součet elementárních drah $\mathrm{d}s$ se pokusíme využít poznatků z geometrie. Na obr. 1 je znázorněn graf závislosti rychlosti na čase $v = gt$. Grafem je přímka procházející počátkem soustavy souřadnic. Dále je na tomto obrázku znázorněn i určitý vybraný obdélník (Je-li $\mathrm{d}t$ velmi malé, je možno lichoběžník v tomto případě nahradit obdélníkem.) se základnou $\mathrm{d}t$ a výškou $v\mathrm{d}t$, kde $v = gt$. Plocha $\mathrm{d}S$ tohoto elementárního obdélníku je dána součinem $\mathrm{d}S = gt\mathrm{d}t = v\mathrm{d}t$.

Hodnota $v\mathrm{d}t$ z hlediska fyziky představuje elementární dráhu $\mathrm{d}s$ uraženou tělesem za časový interval $\mathrm{d}t$.

Celková uražená dráha za dobu t potom musí odpovídat ploše všech elementárních obdélníků vytvořených nad všemi elementárními úseky $\mathrm{d}t$ v časovém intervalu $\langle 0; t\rangle$. Z hlediska geometrie je zřejmé, že součtem všech elementárních plošek dostaneme obsah trojúhelníku $0AB$ (v případě nenulové počáteční rychlosti bychom určovali obsah lichoběžníku). Pro obsah plochy S platí

$$S = \frac{1}{2}gt^2.$$

Vzhledem k tomu, že to z hlediska fyziky představuje dráhu s uraženou padajícím tělesem, můžeme také psát

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

V případě, že $t = 3$ s, dostaneme $s = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2$ m $= 45$ m. Zjistili jsme tak dráhu, kterou urazilo těleso za první 3 s volného pádu, a to integrací, neboli součtem nekonečně malých úseků dráhy.

Náš postup je možno zapsat ve tvaru

$$s = \int \mathrm{d}s = \int v\mathrm{d}t = \int gt\mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2,$$

kde symbol $\int$ čteme „integrál“. Tedy: dráha s se rovná integrál $\mathrm{d}s$, atd. Výsledek přitom udává dráhu vykonanou za dobu od 0 do t. Integrál je vlastně zkráceným zápisem součtu nekonečně malých veličin, tj.

$$\int \mathrm{d}s = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i,$$

přičemž číslo n roste nade všechny meze, aby intervaly byly dostatečně malé.

1.2 Vztah mezi určitým a neurčitým integrálem

V minulé části jsme se zabývali integrálem, který udával určitou hodnotu. Tuto hodnotu jsme získali součtem nekonečně malých veličin. Takový integrál nazýváme *určitý integrál*. Pokud jsme součet provedli v intervalu od 0 do t, byla výsledkem součtu hodnota $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ a pro konkrétní $t = 3$ s jsme dostali 45 m.

V matematice i ve fyzice se kromě určitého integrálu používá i *neurčitý integrál*, u něhož se nevyskytují hranice integrace, tzv. *integrační meze*. Neurčitý integrál je pak nutné chápat jako matematickou operaci, která k určité funkci (kterou integrujeme) přiřadí jinou funkci (získanou integrací). Výsledná funkce ale obsahuje jednu součtovou konstantu. Neurčitý integrál tedy můžeme chápat jako matematickou operaci, která je inverzní k derivaci. Schematicky je možno napsat

$$\boxed{y(x)} \xrightarrow{\text{derivace}} \boxed{y'(x)}$$

$$\boxed{y'(x)} \xrightarrow{\text{integrace}} \boxed{y(x)}$$

Jestliže derivací funkce $y = x^3$ dostaneme funkci $y' = 3x^2$, potom integrací funkce $y' = 3x^2$ musíme dostat funkci $y = x^3 + C$, kde C je libovolná konstanta[1]. Můžeme tedy psát

$$\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C.$$

Obdobně bychom mohli psát

$$s(t) = \int v \, \mathrm{d}t = \int gt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + C,$$

což je v souladu s výsledkem, který jsme obdrželi v předchozí kapitole, protože použitím počáteční podmínky v čase $t = 0$ je $s = 0$ bychom dostali dosazením do výše uvedené funkce $C = 0$, tj.

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Derivací funkce s podle t dostaneme pak vztah pro okamžitou rychlost[2], tj.

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = gt.$$

Často místo pojmu počítat integrál z dané funkce říkáme, že hledáme *funkci primitivní* k dané funkci.

[1] Tento poznatek vychází z toho, že derivace konstanty je rovna nule. Funkce určená integrací tedy není dána jednoznačně. K jejímu jednoznačnému určení musíme ještě znát nějaké počáteční podmínky.

[2] Již Galileo Galilei (1564 – 1642) si uvědomoval, že okamžitou rychlost přímočarého pohybu je možno chápat jako nekonečně malou dráhu uraženou za nekonečně malou dobu: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Tato myšlenka je jednou ze „vstupních bran“ ke vzniku infinitezimálního počtu. Nekonečně malou veličinu pak zkoumal G. Galilei i na dalších příkladech.

1.3 Pravidla pro integraci funkcí

Příslušné primitivní funkce uvádíme bez integrační konstanty, rovněž také neuvádíme příslušné definiční obory daných funkcí (ale lze je odvodit z poznatků o vlastnostech jednotlivých funkcí).
Integrační konstantu je třeba vždy při provádění konkrétních výpočtů doplnit.

$f : y = f(x)$	Primitivní funkce
$y = x^n,\ n \in N$	$y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$y = x^n,\ n \in R,\ n \neq -1$	$y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln\lvert x\rvert$
$y = \mathrm{e}^x$	$y = \mathrm{e}^x$
$y = a^x,\ (a>0,\ a\neq 1)$	$y = \dfrac{a^x}{\ln a}$
$y = \sin x$	$y = -\cos x$
$y = \cos x$	$y = \sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y = -\ln\lvert\cos x\rvert$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y = \ln\lvert\sin x\rvert$
$y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} x$
$y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = -\operatorname{cotg} x$
$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$ nebo $y = -\arccos x$
$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} x$ nebo $y = -\operatorname{arccotg} x$

Chceme-li vypočítat nějaký integrál, porovnáme jej s těmito vzorci; pokud se ukáže, že je totožný s jedním z nich, je integrál vypočten. Není-li daný integrál totožný s žádným ze základních vzorců, pokusíme se ho převést různými transformacemi na jeden z nich. Metody převedení daného integrálu na jeden ze základních jsou obecně velmi složité a vyžadují určitou obratnost, kterou lze získat pouze praxí. My se v další částech textu pokusíme ukázat alespoň některé z těchto metod.

Obdobně jako při derivování, platí pro integrál součtu, resp. rozdílu vztahy

$$\int [u(x) \pm v(x)]\mathrm{d}x = \int u(x)\mathrm{d}x \pm \int v(x)\mathrm{d}x.$$

Je tedy integrál součtu (rozdílu) funkcí roven součtu (rozdílu) jednotlivých integrálů.

Pro integraci funkce, ve které jako činitel se vyskytuje konstanta, platí (opět obdobně jako u derivace)

$$\int Cu(x)\mathrm{d}x = C\int u(x)\mathrm{d}x.$$

Postup, jak provádět integraci součinu dvou funkcí, si ukážeme později.

Příklad 1 – jednoduché integrace

Určete neurčité integrály:

a) $\int 4x\mathrm{d}x$,
b) $\int (x^3+5x^2-7x+3)\mathrm{d}x$,
c) $\int (x^2+2)x\mathrm{d}x$,
d) $\int \left(ax^2+bx+\frac{c}{x}+\frac{e}{x^2}\right)\mathrm{d}x$, kde a, b, c, e jsou konstanty.

Řešení

Ve všech vztazích je C integrační konstanta.

a) $\int 4x\mathrm{d}x = 4\int x\mathrm{d}x = 4\frac{x^2}{2}+C = 2x^2+C.$

b) $\int (x^3+5x^2-7x+3)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}+5\cdot\frac{x^3}{3}-7\frac{x^2}{2}+3x+C,$

c) $\int (x^2+2)x\mathrm{d}x = \int (x^3+2x)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^2}{2}+C = \frac{1}{4}x^4+x^2+C.$

d) $\int \left(ax^2+bx+\frac{c}{x}+\frac{e}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int (ax^2+bx+cx^{-1}+ex^{-2})\mathrm{d}x =$

$= \frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+c\cdot\ln|x|+e\frac{x^{-1}}{-1}+C = \frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+c\cdot\ln|x|-\frac{e}{x}+C.$

Další řešené příklady k procvičování je možno nalézt na CD ROMu v části Integrální počet. CD ROM tvoří přílohu k tomuto textu.

1.4 Metody integrace

Integrace složitějších funkcí je často velmi obtížná záležitost vyžadující značnou zkušenost. My si v této části ukážeme dvě nejčastěji používané metody: integraci per partes (po částech) a integraci substitucí.

1.4.1 Metoda integrace per partes

Tato metoda vychází ze vzorce pro derivaci součinu, tj. pro dvě funkce[3] $f(x)$ a $g(x)$ můžeme psát

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

z čehož

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x).$$

Po integraci dostaneme

$$\int f(x) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x.$$

Pokud bychom psali stručněji $f(x) = u$, $g(x) = v$, obdržíme

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Tato metoda vede k cíli, podaří-li se nám v součinu $f(x)g'(x)$ najít takový činitel $g'(x)$, ke kterému je možno snadno určit $\int g'(x)\mathrm{d}x = g(x)$, umíme-li vypočítat i druhý integrál $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Použití této metody si ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 2 – integrace per partes

Vypočtěte $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ v intervalu $(-\infty; \infty)$.

Řešení

Položíme $u = x$, $v' = \mathrm{e}^x$. Pak je $u' = 1$, $v = \mathrm{e}^x$.
Dostaneme

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = \mathrm{e}^x(x-1) + C.$$

Další řešené příklady k procvičování je možno nalézt na CD ROMu v části Integrální počet. CD ROM tvoří přílohu k tomuto textu.

[3] Obě funkce i jejich derivace musí být spojité na intervalu, v němž provádíme derivaci.

1.4.2 Metoda substituční

Substituční metoda vychází z věty o derivaci složené funkce. Uvedeme si úplné znění věty o substituční metodě, pak si ukážeme použití této metody na konkrétním příkladu.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $(a;b)$. Dále nechť funkce $g(t)$ má v intervalu $(\alpha;\beta)$ derivaci $g'(t)$. Pro každé $t \in (\alpha;\beta)$ nechť $g(t) \in (a;b)$. Pak v intervalu $(a;b)$ platí

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do primitivní funkce $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$ za x funkci $g(t)$.

Příklad 3 – substituční metoda

Vypočtěte $\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$, který existuje v intervalu $(-\infty;\infty)$.

Řešení

Užijeme substituci

$$1 + x^2 = t.$$

Potom

$$2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

z čehož

$$x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t.$$

Pak můžeme daný integrál převést na integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

V tomto případě není třeba psát absolutní hodnotu, protože platí $1 + x^2 > 0$ pro každé $x \in (-\infty;\infty)$. Konečný tvar tedy je

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Další řešené příklady k procvičování je možno nalézt na CD ROMu v části Integrální počet. CD ROM tvoří přílohu k tomuto textu.

Na výše popsaném CD ROMu je navíc ještě popsána metoda, jak integrovat racionální funkci.

1.5 Vztah mezi neurčitým a určitým integrálem

Je-li neurčitým integrálem funkce[4] $f(x)$ funkce $F(x)$, pak můžeme psát

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Pro hodnotu určitého integrálu v mezích od a do b, což označujeme symbolicky

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

platí[5]

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Určitý integrál z funkce $f(x)$ je tedy vlastně dán rozdílem funkčních hodnot funkce $F(x)$ pro příslušné *integrační meze*.

Příklad 4 – určitý integrál

Vypočtěte integrály:

a) $\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x$.

Řešení

Nejprve nalezneme příslušný neurčitý integrál, pak teprve budeme počítat integrál určitý.

a) $\int x^2\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + C$.

Potom

$$\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

b) Pokud už budete „zběhlejší“ ve výpočtech integrálů, je možno celý zápis postupu zestručnit a přímo už počítat určitý integrál, jak je uvedeno níže.

[4] Funkce $f(x)$ musí být spojitá v intervalu $\langle a; b\rangle$.

[5] Níže uvedený vztah je tzv. *Leibnizův – Newtonův vzorec.*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1.$$

Další řešené příklady k procvičování je možno nalézt na CD ROMu v části Integrální počet. CD ROM tvoří přílohu k tomuto textu.

1.5.1 Vlastnosti určitého integrálu

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

   Výměnou integračních mezí změní určitý integrál jen své znaménko.

2. Volme v integračním intervalu číslo c tak, aby $a < c < b$. Pak

   $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) =$
   $= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

   Integrační interval lze rozdělit na dvě (nebo více) částí (v tom smyslu, že horní mez jedné části je dolní mezí druhé části atd.).

Výpočet určitého integrálu substituční metodou

Při výpočtech určitých integrálů substituční metodou, které se v praxi a v aplikacích často vyskytují, je třeba dbát této zásady: zavedeme-li novou proměnnou, je nutno přepočítat i meze pro tuto novou proměnnou.

Příklad 5 – určitý integrál – substituční metoda

Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Řešení

Položíme

$$x = 2\sin t,$$

potom

$$\mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Protože jsme změnili proměnnou, musíme nyní určit nové meze integrálu. Pro $x = 0 = 2\sin t$ je $t = 0$; pro $x = 1 = 2\sin t$ je $t = \frac{\pi}{6}$. Pak je

$$\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t}{2\cdot\cos t} = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

K dalším úpravám použijeme součtový vzorec

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}.$$

Dostaneme

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = 4\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 4\left[\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{0}{2} + \frac{1}{4}\sin 0\right] = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Je tedy

$$\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Poznámka

Úlohu je možno také řešit tím způsobem, že bychom daný integrál vyřešili jako neurčitý a pak bychom dosadili původní meze do takto vypočteného neurčitého integrálu.

V případě této úlohy se však ukazuje, že postup se změnou mezí je podstatně jednodušší.

2 Užití určitého integrálu ve fyzice

V předcházejících částech jsme si stručně objasnili pojem integrál a integrace. V této části se zaměříme na užití integrálního počtu v různých oblastech fyziky.

2.1 Kinematika

Je-li $a(t)$ velikost okamžitého zrychlení přímočarého pohybu v čase t a je-li v_0 velikost počáteční rychlosti pohybu v čase t_0, je velikost okamžité rychlosti $v(t)$ v čase t určena vztahem

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t)\mathrm{d}t, \quad t \in \langle t_0; t_1 \rangle.$$

Je-li $v(t)$, kde $t \in \langle t_0; t_1 \rangle$ velikost rychlosti přímčarého pohybu v čase t a je-li s_0 dráha pohybu v čase t_0, je dráha $s(t)$ v čase t určena vztahem

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t)\mathrm{d}t, \quad t \in \langle t_0; t_1 \rangle.$$

Hmotný bod koná přímočarý pohyb tak, že jeho zrychlení s časem rovnoměrně roste, a to tak, že za prvních 10 s pohybu vzroste z nulové hodnoty na 5 m$\cdot$s^{-2}. Jaká je rychlost pohybu hmotného bodu v čase $t = 10$ s a jakou dráhu hmotný bod za tuto dobu urazil, jestliže v čase $t = 0$ s byl v klidu?

Řešení

Pro závislost zrychlení na čase je možno psát

$$a = kt, \quad \text{kde } k = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{10\ \mathrm{s}} = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-3}}.$$

Pro rychlost a dráhu pohybu hmotného bodu pak dostáváme

$$v(10) = 0 + \int_0^{10} 0{,}5t\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^{10} = 25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

$$s(10) = 0 + \int_0^{10} \frac{1}{4}t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{12}t^2\right]_0^{10} = 83{,}3\ \mathrm{m}.$$

Za 10 s pohybu získal hmotný bod z klidu rychlost 25 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a urazil dráhu 83,3 m.

Obdobné vztahy jako pro přímočarý pohyb platí i pro pohyb hmotného bodu po kružnici, tj.

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon(t)\mathrm{d}t,$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t_1} \omega(t)\mathrm{d}t.$$

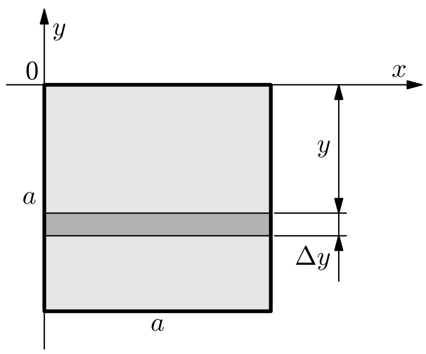
2.2 Výpočet síly

V další části se podíváme na výpočet síly, která působí na svislou desku ponořenou v kapalině. Nejprve si ukážeme postup, jak řešit úlohu, má-li deska čtvercový tvar, pak si ukážeme, jak postupovat v případě desek různých tvarů.

Příklad 7 – čtvercová deska v kapalině

Určete, jaká tlaková síla působí na čtvercovou svislou desku o straně $a = 2$ m. Deska je ponořena ve vodě tak, že horní okraj desky je na hladině.

Řešení



Obr. 3 Čtvercová deska v kapalině

Nejprve určíme velikost tlakové síly ΔF, která působí na element plochy tvaru obdélníku o stranách a a Δy v hloubce y pod vodní hladinou. Velikost tlakové síly je dána vztahem

$$\Delta F = p\Delta S,$$

kde $p = y\varrho g$ je hydrostatický tlak v hloubce y pod vodní hladinou, $\Delta S = a\Delta y$.

Celkovou tlakovou sílu působící na desku pak určíme jako součet velikostí tlakových sil působících na jednotlivé plošné elementy. Tento výpočet bude tím přesnější, čím bude Δy menší. Bude-li Δy neomezeně malé, tj. v limitě můžeme psát $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta y \to \mathrm{d}y$, pak můžeme psát, že i $\Delta F \to \mathrm{d}F$. Celkovou tlakovou sílu pak vypočteme jako

$$F = \int_{-a}^{0} \mathrm{d}F = \int_{-a}^{0} (-\varrho g y) a \, \mathrm{d}y = -\varrho g a \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-a}^{0} = \frac{1}{2}\varrho g a^3.$$

Poznámka

Označíme-li $S = a^2$ obsah desky, $p = \varrho g a$ hydrostatický tlak působící na spodní okraj desky, můžeme psát

$$F = \frac{1}{2} pS.$$

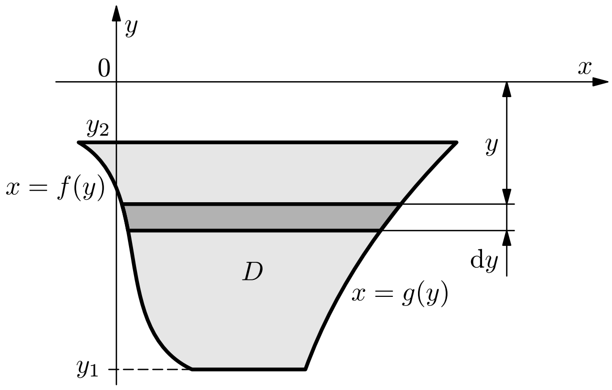
Tento vztah je možno také chápat tak, že celkovou tlakovou sílu v tomto případě můžeme určit jako součin obsahu desky S a aritmetického průměru tlaků na horní a spodní okraj desky (protože hydrostatický tlak působící na horní okraj desky je roven nule).

Nyní se pokusíme tento postup zobecnit na případ desky obecnějšího tvaru.

Deska D je svisle zavěšena v kapalině, jejíž hladina splývá s osou x (obr. 4). Chtěli bychom určit velikost síly, kterou kapalina působí na jednu stranu desky.

Na element plochy $\mathrm{d}S = [g(y) - f(y)]\mathrm{d}y$ působí tlaková síla o velikosti $\mathrm{d}F = p\mathrm{d}S = -y\varrho g[g(y) - f(y)]\mathrm{d}y$, kde jsme za p dosadili $p = -\varrho g y$. Na celou plochu pak působí tlaková síla, která je dána součtem jednotlivých tlakových sil, tj.

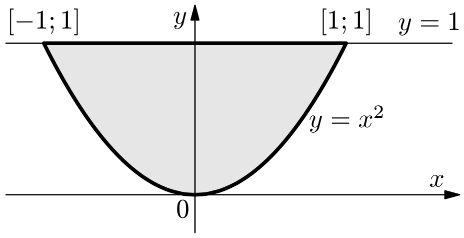
$$F = -\varrho g \int_{y_1}^{y_2} [g(y) - f(y)] y \mathrm{d}y. \tag{2}$$



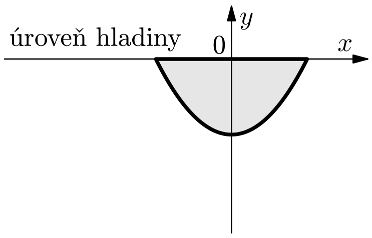
Obr. 4 Deska v kapalině

Příklad 8 – tlaková síla působící na desku v kapalině

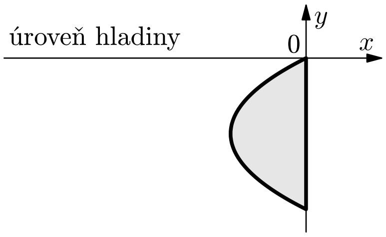
Plechy tvaru rovinné oblasti, která je omezena parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = 1$ (obr. 5), jsou ponořeny do vody v polohách na obr. 6, 7. Dokažte, že síla působící na desku ve druhé poloze je dvaapůlkrát větší než síla v první poloze.



Obr. 5 Parabolická deska



Obr. 6 Parabolická deska - 1. poloha



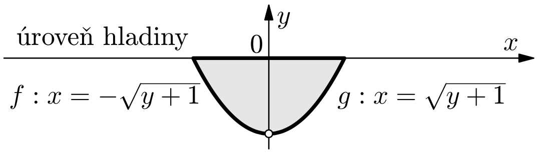
Obr. 7 Parabolická deska - 2. poloha

Řešení

1. poloha
Rovnice paraboly znázorněné na obr. 8 je dána vztahem

$$y = x^2 - 1.$$

Z této rovnice je pak možno vyjádřit funkce f a g tak, jak je znázorněno na obr. 8.



Obr. 8 Parabolická deska - 1. poloha - řešení

Po dosazení do vztahu (2) dostaneme

$$F_1 = -\int\limits_{-1}^{0} \varrho g y \left[\sqrt{y+1} - (-\sqrt{y+1})\right] \mathrm{d}y = -2\varrho g \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{y+1}\, y \,\mathrm{d}y.$$

Tento integrál vyřešíme pomocí substituce

$$t = y + 1 \Rightarrow y = t - 1,$$

potom

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}y.$$

Při substituci také nesmíme zapomenout změnit příslušné meze. Po provedení substituce dostaneme

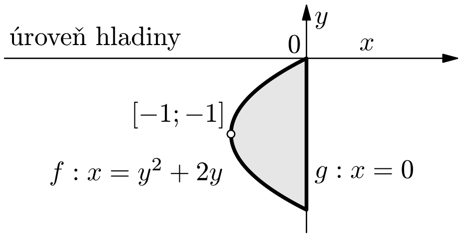
$$F_1 = -2\varrho g \int\limits_{0}^{1} \sqrt{t}(t-1)\mathrm{d}t = -2\varrho g \int\limits_{0}^{1} \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}t.$$

Po integraci dostaneme

$$F_1 = -2\varrho g \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{15}\varrho g.$$

2. poloha
Rovnice paraboly ve 2. poloze je dána vztahem

$$x = -1 + (y+1)^2 = y^2 + 2y.$$



Obr. 9 Parabolická deska - 2. poloha - řešení

Po dosazení do rovnice (2) dostaneme

$$F_2 = -\varrho g \int\limits_{-2}^{0} [0 - (y^2 + 2y)] y \, \mathrm{d}y = \varrho g \int\limits_{-2}^{0} (y^3 + 2y^2) \mathrm{d}y.$$

Po integraci dostaneme

$$F_2 = \varrho g \left[\frac{1}{4} y^4 + \frac{2}{3} y^3 \right]_{-2}^{0} = \frac{4}{3} \varrho g.$$

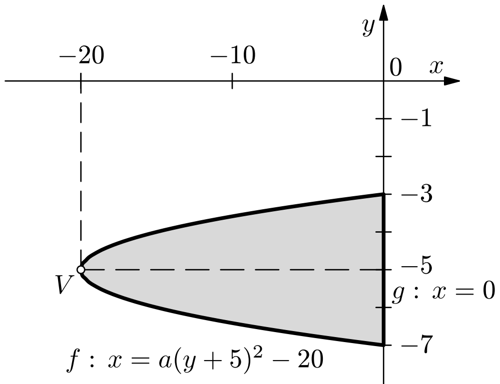
Nyní už jen stačí určit podíl

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{15}} = 2{,}5.$$

Ve druhém případě je tlaková síla na desku 2,5 krát větší než v prvním.

Cvičení

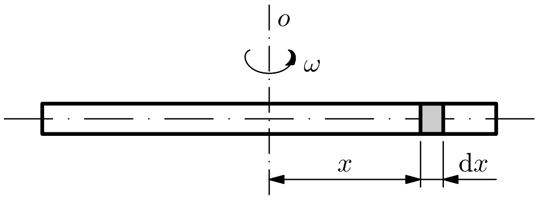
Deska D mající tvar parabolické úseče s výškou 20 m a délkou tětivy 4 m je zavěšena v nádrži s vodou podle obr. 10. Hladina vody splývá s osou x. Určete velikost síly, kterou působí voda na jednu stranu desky. Uvažujte $g = 10 \text{ m·s}^{-2}$, $\varrho = 1000 \text{ kg·m}^{-3}$.



Obr. 10 Parabolická deska v kapalině

Příklad 9 – síla působící na otáčející se tyč

Homogenní válcová kovová tyč o hustotě $\varrho = 8\ \mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a délce $l = 30$ cm se otáčí kolem pevné osy procházející těžištěm tyče kolmo na směr délky úhlovou rychlostí ω (obr. 11). Jaká může být největší úhlová rychlost otáčení, jestliže největší dovolené napětí, kterému můžeme tyč v podélném směru vystavit, je $\sigma_\mathrm{D} = 60$ MPa? Není nebezpečné nechat otáčet tyč frekvencí $f_1 = 2880$ ot/min?



Obr. 11 Otáčející se tyč

Řešení

Celková síla, která působí v podélném směru na tyč, se rovná součtu odstředivých sil, kterými vzdálenější části tyče působí na ty části tyče, které se nacházejí blíž k ose otáčení. Příspěvek elementu tyče vyznačeného na obr. 11 k celkové síle bude

$$\mathrm{d}F = x\omega^2 \mathrm{d}m = \varrho S\ \omega^2 x\, \mathrm{d}x,$$

kde S je průřez tyče. Celková síla potom bude

$$F = \varrho S\ \omega^2 \int\limits_0^{\frac{l}{2}} x\mathrm{d}x = \varrho S\ \omega^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{8}\varrho S \omega^2 l^2.$$

Protože dovolené napětí $\sigma_\mathrm{D} = \dfrac{F}{S}$, můžeme psát

$$\sigma_\mathrm{D} = \frac{1}{8}\varrho \omega^2 l^2,$$

odkud

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma_\mathrm{D}}{\varrho l^2}}.$$

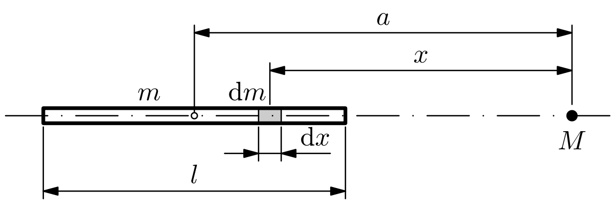
Pro dané hodnoty $\omega = 832\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, tedy $f = 132$ ot/s.
Tyč se může otáčet úhlovou rychlostí nejvýše $832\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Abychom zodpověděli i druhou otázku, musíme přepočítat $f_1 = 2880$ ot/min $=$ $= 48$ ot/s.

Dostaneme $f_1 < f$ a tedy frekvence 2880 ot/min nebezpečná není.

Příklad 10 – výpočet gravitační síly

Určete velikost gravitační síly, kterou na sebe vzájemně působí hmotný bod o hmotnosti M a tenká homogenní tyč délky l a hmotnosti m, jejíž hmotný střed má vzdálenost a od hmotného bodu a leží v prodloužení podélné osy tyče (obr. 12).



Obr. 12 Tyč a hmotný bod

Řešení

Nejprve určíme velikost síly dF, kterou na sebe vzájemně působí hmotný bod o hmotnosti M a element dm tyče. Jelikož element můžeme považovat za hmotný bod, můžeme použít základního vztahu – Newtonův gravitační zákon ve tvaru pro dva hmotné body, tj.

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{g}} = \varkappa \frac{M \mathrm{d}m}{x^2}.$$

Element tyče má tvarválečku o délce dx. Jelikož délková hustota tyče je $\frac{m}{l}$, je hmotnost elementu $\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$. Vzdálenost elementu tyče dm se mění od $\left(a - \frac{l}{2}\right)$ do $\left(a + \frac{l}{2}\right)$. Integrací přes všechny elementy tyče dostaneme

$$F_{\mathrm{g}} = \varkappa \int\limits_{a-\frac{l}{2}}^{a+\frac{l}{2}} \frac{mM}{lx^2}\mathrm{d}x = \varkappa \frac{mM}{l}\left[-\frac{1}{x}\right]_{a-\frac{l}{2}}^{a+\frac{l}{2}} = \varkappa \frac{mM}{l}\left(\frac{1}{a-\frac{l}{2}} - \frac{1}{a-\frac{l}{2}}\right),$$

$$F_{\mathrm{g}} = \varkappa \frac{mM}{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \varkappa \frac{mM}{\left(a-\frac{l}{2}\right)(\left(a+\frac{l}{2}\right)}.$$

2.3 Výpočet práce

Práce síly $\boldsymbol{F}$ je dána integrálem ze skalárního součinu síly $\boldsymbol{F}$ a elementární dráhy $\boldsymbol{s}$. Je-li směr obou vektorů stejný, pak můžeme psát

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \mathrm{d}s.$$

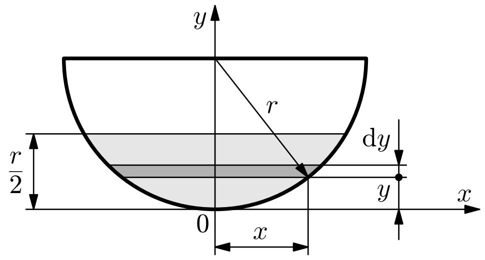
Bude-li síla $\boldsymbol{F}$ konstantní, pak

$$W = F\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s = F(s_2 - s_1) = F\Delta s,$$

což je známý vztah.

Příklad 11 – práce vykonaná při čerpání nádoby

Vypočtěte práci, kterou musíme vykonat, abychom vyčerpali nádrž tvaru polokoule, je-li naplněna do poloviny své výšky vodou (obr. 13). Poloměr je $r = 2$ m.



Obr. 13 Nádoba s vodou

Řešení

Zvolme si soustavu souřadnic podle obr. 13. Element vody o hmotnosti $\mathrm{d}m = \varrho\pi x^2\mathrm{d}y$ musíme zvedat do výšky $r - y$. Vykonáme tím práci

$$\mathrm{d}W = \pi x^2 \varrho g(r - y)\mathrm{d}y.$$

Z rovnice kružnice $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ vypočteme $x^2 = 2ry - y^2$. Dosazením do vztahu pro práci $\mathrm{d}W$ obdržíme

$$\mathrm{d}W = \pi(2ry - y^2)\varrho g(r - y)\mathrm{d}y$$

a odtud integrací

$$W = \pi\varrho g \int_0^{\frac{r}{2}} (2ry - y^2)(r - y)\mathrm{d}y,$$

$$W = \pi\varrho g \int_0^{\frac{r}{2}} (2r^2y - y^2r - 2ry^2 + y^3)\mathrm{d}y = \frac{9}{64}\pi r^4 \varrho g.$$

Pro dané hodnoty ($\varrho = 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$): $W \doteq 70\,690\ \mathrm{J}$.

Použitím určitého integrálu je možno řešit celou řadu dalších úloh ve fyzice řešících problém výpočtu práce v dalších oblastech.

Tyto a ještě další úlohy je možno nalézt se stručným výkladem, zadáním a řešením na přiloženém **CD ROMu**.

Konkrétně zde najdete ještě úlohy na práci vykonanou v elektrostatickém a gravitačním poli, výpočet gravitační potenciální energie, práci vykonanou při prodloužení pružiny, přeměnu elektrické energie v tepelnou, práci střídavého proudu a práci plynu.

2.4 Těžiště tělesa

V této části si ukážeme, jak počítat polohu hmotného středu některých těles. Budeme předpokládat, že uvažované těleso je v homogenním tíhovém poli, tj. budeme se zabývat těžištěm tělesa.

Připomeňme si základní podmínky pro výpočet těžiště tělesa:

1. Těžiště tuhého tělesa je působiště tíhové síly působící na těleso v homogenním tíhovém poli.

2. Moment výsledné tíhové síly vzhledem k libovolné svislé ose musí být roven součtu momentů jednotlivých tíhových sil vzhledem k této ose.

Na základě těchto podmínek pak můžeme např. pro směr osy z psát

$$(m_1 g + m_2 g + \ldots + \mathrm{m}_n g) x_\mathrm{T} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \ldots + m_n g x_n,$$

odtud pak dostáváme pro souřadnice těžiště vztah

$$x_\mathrm{T} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

neboli

$$x_\mathrm{T} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Analogicky lze pak i pro ostatní osy odvodit

$$y_\mathrm{T} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad z_\mathrm{T} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Uvažujeme-li homogenní těleso se spojitě rozloženou látkou, pak můžeme psát

$$x_\mathrm{T} = \frac{\int\limits_{(m)} x \,\mathrm{d}m}{\int\limits_{(m)} \mathrm{d}m} = \frac{\int\limits_{(V)} \varrho x \,\mathrm{d}V}{\int\limits_{(V)} \varrho \,\mathrm{d}V} = \frac{\int\limits_{(V)} x \,\mathrm{d}V}{\int\limits_{(V)} \mathrm{d}V} = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} x \,\mathrm{d}V,$$

analogicky pak můžeme tento vztah psát i pro obě zbývající osy, tj.

$$y_\mathrm{T} = \frac{\int\limits_{(m)} y \,\mathrm{d}m}{\int\limits_{(m)} \mathrm{d}m} = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} y \,\mathrm{d}V, \qquad z_\mathrm{T} = \frac{\int\limits_{(m)} z \,\mathrm{d}m}{\int\limits_{(m)} \mathrm{d}m} = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} z \,\mathrm{d}V,$$

kde jsme položili $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$. V tomto vztahu je ϱ hustota tělesa, $\mathrm{d}V$ objemový element a $\mathrm{d}m$ je hmotnostní element. Vztahy bychom ještě mohli upravit užitím toho, že $\int\limits_{(m)} \mathrm{d}m = m$, kde m je hmotnost tělesa.

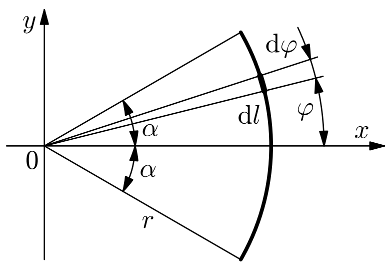
Podobné vztahy pro polohu těžiště je možno psát i pro homogenní plošný útvar (např. těleso vyrobené z tenkého plechu) o obsahu S nebo pro homogenní jednorozměrný útvar (např. tenký drát) o délce l. Ve výše uvedených vztazích pak stačí nahradit objem V obsahem S nebo délkou l. Ukažme si to např. pro x-ovou souřadnici, kde dostaneme

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} x\,\mathrm{d}S, \text{ nebo} \qquad x_\mathrm{T} = \frac{1}{l}\int\limits_{(l)} x\,\mathrm{d}l.$$

Postup výpočtu těžiště si nyní ukážeme na několika níže uvedených příkladech.

Příklad 12 – těžiště drátu

Stanovte polohu těžiště homogenního velmi tenkého drátu kruhového oblouku s poloměrem r a středovým úhlem 2α (obr. 14).



Obr. 14 Tenký drát

Řešení

V předchozích vztazích pro x_T nahradíme objemové elementy délkovými elementy. Ve zvolené soustavě souřadnic je $y_\mathrm{T} = 0$ m, $z_\mathrm{T} = 0$ m. Z obr. 14 je vidět, že $l = 2r\alpha$, $x = r\cos\alpha$, $\mathrm{d}l = r\,\mathrm{d}\varphi$. Po dosazení do výše uvedeného vztahu pro x_T dostáváme

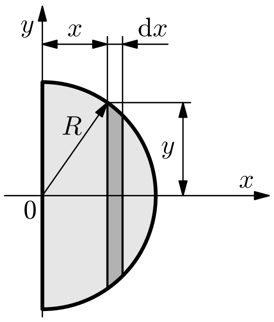
$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{2r\alpha}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Poznámka

Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tj. drát tvaru půlkruhu, dostaneme $x_{\mathrm{T}} = \frac{2}{\pi}r$.

Příklad 13 – těžiště půlkruhu

Určete polohu těžiště půlkruhu o poloměru R znázorněného na obr. 15.



Obr. 15 Výseč tvaru půlkruhu

Řešení

Obsah půlkruhu je dán vztahem $S = \frac{\pi R^2}{2}$.

Polohu těžiště půlkruhu určíme užitím vztahu

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{2}{S}\int_0^R x\,\mathrm{d}S,$$

kam za $\mathrm{d}S$ dosadíme $\mathrm{d}S = 2y\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$. Po dosazení dostaneme

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{2}{S}\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Tento integrál vyřešíme pomocí substituce

$$t = R^2 - x^2, \qquad \text{potom } \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x.$$

Nesmíme také zapomenout na změnu mezí. Po provedení substituce dostaneme

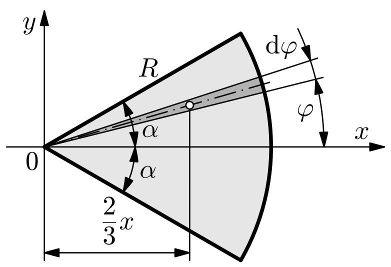
$$x_{\mathrm{T}} = -\frac{2}{\pi R^2} \int\limits_{R^2}^{0} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R^2} = \frac{4}{3\pi} R.$$

Pokusme se nyní výše uvedený případ zobecnit na výpočet těžiště kruhové výseče.

Příklad 14 – těžiště kruhové výseče

Určete polohu těžiště kruhové výseče o poloměru R se středovým úhlem 2α.

Řešení



Obr. 16 Kruhová výseč

Obsah S kruhové výseče je dán vztahem

$$S = \frac{\pi R^2 \cdot 2\alpha}{2\pi} = R^2 \alpha.$$

Polohu těžiště kruhové výseče určíme užitím vztahu

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} x\,\mathrm{d}S,$$

kde

$$x = \frac{2}{3} r \cos\varphi, \qquad \mathrm{d}S = \frac{1}{2} r^2\,\mathrm{d}\varphi.$$

Po dosazení dostaneme

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\frac{2}{R^2\alpha}\int\limits_0^\alpha \frac{2}{3}R\cos\varphi\, R^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\frac{R}{\alpha}[\sin\varphi]_0^\alpha = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Poznámka

Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dostaneme

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}R.$$

Tento vztah odpovídá výsledku, který jsme dostali řešením příkladu 13.

Výše uvedené dva příklady ukazují, že řešení úloh užitím integrálního počtu podstatným způsobem závisí na tom, jak vhodně zvolíme element plochy a jakým způsobem pak provádíme integraci přes např. celou plochu, pro níž výpočet provádíme. K tomu, aby se nám dařilo co nejjednodušším způsobem získávat potřebné výsledky a početní vztahy, je třeba vyřešit větší počet úloh a získat tak potřebnou zručnost.

Na přiloženém **CD ROMu** naleznete ještě výpočet polohy těžiště *homogenního rotačního kužele*.

2.5 Výpočet momentu setrvačnosti

V této části si ukážeme, jak počítat moment setrvačnosti některých těles.

V učebnicích fyziky pro střední školy je moment setrvačnosti J tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení definován pomocí součtu $J = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, kde r_i je vzdálenost hmotného bodu o hmotnosti m_i od osy otáčení.

U těles se spojitě rozloženou látkou platí obdobný vztah

$$J = \int\limits_{(m)} r^2 \mathrm{d}m = \int\limits_{(V)} \varrho r^2\,\mathrm{d}V,$$

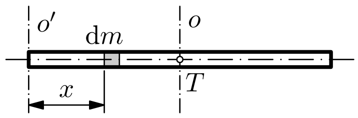
kde jsme použili vztah $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$. Značka (m) resp. (V) u integrálu značí, že integrujeme přes celé těleso.

Výpočet momentu setrvačnosti těles vzhledem k libovolné ose ulehčuje *Steinerova věta*: $J = J_0 + ma^2$, kde J_0 je moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm, a je vzdálenost osy otáčení od osy procházející těžištěm, m je hmotnost tělesa.

Příklad 15 – homogenní tyč

Určete moment setrvačnosti tenké homogenní tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose kolmé na podélnou osu tyče a) procházející koncovým bodem tyče, b) procházející středem tyče.

Řešení



Obr. 17 Tyč

a) Pro moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose o' můžeme psát

$$J = \int\limits_{(m)} x^2 \, \mathrm{d}m = \varrho \int\limits_{(V)} x^2 \, \mathrm{d}V,$$

po dosazení za $\mathrm{d}m = \frac{m}{l} \, \mathrm{d}x$ dostaneme

$$J = \int\limits_0^l x^2 \frac{m}{l} \, \mathrm{d}x = \frac{m}{l} \int\limits_0^l x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{3} m l^2.$$

b) 1. způsob: budeme postupovat obdobně jako v předchozím případě, pouze meze budou stanoveny jinak (počítáme J_0 vzhledem k ose o). Dostaneme

$$J_0 = \int\limits_{(m)} x^2 \mathrm{d}m = \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}\, x = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} m l^2.$$

2. způsob: použijeme Steinerovu větu a moment setrvačnosti vypočtený v úloze a). Dostaneme $J = J_0 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$, z čehož

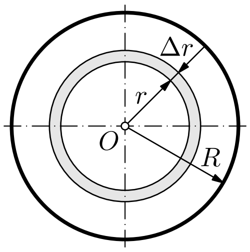
$$J_0 = J - m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m l^2 - \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{12} m l^2.$$

Ve studijním textu Funkce ve fyzice (kapitola Limity) jsme si ukázali, jak vypočítat moment setrvačnosti homogenní kruhové desky pomocí posloupností. Nyní si v dalším příkladu ukážeme, že moment setrvačnosti kruhové desky je možno také počítat jednodušším způsobem – užitím vyšší matematiky.

Příklad 16 – homogenní kruhová deska

Určete moment setrvačnosti homogenní kruhové desky o poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm kolmo na rovinu kruhu.

Řešení



Obr. 18 Homogenní kruhová deska

Kruh rozdělíme na elementární mezikruží, jejichž každý bod je stejně vzdálen od osy rotace. Element momentu setrvačnosti pak je

$$\Delta J = r^2\,\Delta m,$$

kde Δm je hmotnost mezikruží. Výpočet bude tím přesnější, čím bude šířka mezikruží menší. Limitním přechodem nakonec dostaneme

$$\mathrm{d}J = r^2\,\mathrm{d}m.$$

Za $\mathrm{d}m$ dosadíme $\mathrm{d}m = [\pi(r+\mathrm{d}r)^2 - \pi r^2]\varrho = 2\pi\varrho r\,\mathrm{d}r$, kde jsme zanedbali členy s druhými mocninami $\mathrm{d}r$ vzhledem k jejich rozměrům, ϱ je hustota materiálu.

Protože r se mění od 0 do R, dostaneme pro moment setrvačnosti kruhové desky vzhledem k ose procházející kolmo těžištěm kruhu

$$J = \varrho\int_0^R r^2\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi\varrho\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \pi\varrho\frac{R^4}{2}.$$

Tento vztah můžeme ještě upravit dosazením hmotnosti desky $m = \pi R^2\varrho$. Pak dostaneme

$$J = \frac{1}{2}mR^2.$$

V těchto úlohách jsme si ukázali postup, jak počítat moment setrvačnosti jednoduchého tělesa (v tomto případě tyče), na CD ROMu je ještě dále uveden postup, jak počítat moment setrvačnosti homogenní koule.

Na CD ROMu jsou pak ještě zadání dalších úloh (s výsledky) na užití určitého integrálu ve fyzice, navíc pak jsou na CD ROMu studijní texty pro FO, kde se integrální počet ve větší míře používá k řešení úloh.

Na tento studijní text pak ještě volně navazuje studijní text Diferenciální rovnice. Zde se rovněž již neobejdete bez znalostí základů integrálního počtu.

3 Řešení cvičení

Určíme funkce f a g a meze y_1 a y_2. Vrchol parabolické úseče (obr. 4) má souřadnice $V[-20;-5]$. Protože osa paraboly je rovnoběžná s osou x, má tato parabola rovnici

$$x + 20 = a(y+5)^2, \quad \text{kde } a \in R.$$

Protože na parabole leží body o souřadnicích $[0;-3]$, musí platit:

$$0 + 20 = a(-3+5)^2,$$

z čehož

$$a = 5.$$

Parabola má tedy rovnici

$$x + 20 = 5(y+5)^2 = 5y^2 + 50y + 125,$$

a funkce f a g jsou:

$$g(y) = 0, \quad y \in \langle -7; -3 \rangle,$$

$$f(y) = 5(y+5)^2 - 20 = 5(y^2 + 10y + 21).$$

Pro číselnou hodnotu velikosti síly pak dostáváme

$$F = -10^4 \int_{-7}^{-3} [0 - 5(y^2 + 10y + 21)]y \, \mathrm{d}y = 5 \cdot 10^4 \int_{-7}^{-3} (y^3 + 10y^2 + 21y) \, \mathrm{d}y =$$

$$= 5 \cdot 10^4 \left[\frac{y^4}{4} + 10\frac{y^3}{3} + 21\frac{y^2}{2} \right]_{-7}^{-3} \doteq 2{,}67 \cdot 10^6.$$

Voda působí na jednu stranu desky silou, jejíž velikost je přibližně 3 MN.

Literatura

[1] Gillman, L. – Dowell, R.: *Matematická analýza.* SNTL, Praha, 1983.

[2] Kejla, F. a kol.: *Matematika pro SPŠ - III. díl* SNTL, Praha, 1955.

[3] Tarasov, N., P.: *Základy vyšší matematiky.* SNTL, Praha, 1954.

[4] Baník, I. – Baník, R. – Zámečník, J.: *Fyzika netradičně - mechanika.* Alfa, Bratislava, 1989.

[5] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* SPN, Praha, 1991.

[6] Ungermann, Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh.* SPN, Praha, 1990.

[7] Vencálek, F. a kol.: *Matematika pro III. ročník SPŠ a SZTŠ.* SPN, Praha 1965.

[8] CD ROM - Matematika a fyzika. (Příloha textu)