# DIFERENCIÁLNÍ POČET VE FYZICE

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

*Miroslava Jarešová – Ivo Volf*

# Obsah

# Úvod

Diferenciální a integrální (infinitezimální) počet se dnes používá v mnoha aplikacích, především v přírodních a technických vědách.

Již Archimédes ze Syrákús (asi 287 – 212 př.n.l.) ve spise *De mechanicis propositionibus ad Eratosthenem methodus* (O metodě mechanicky odvoditelných vět), který věnoval svému příteli Eratosthénovi (276 př.n.l. – 194 př.n.l.), užíval metod velmi blízkých integrálnímu počtu. Tento spis byl nalezen až v roce 1906.

Vlastní infinitezimální počet s celým aparátem symbolů, vzorců a metod vynalezli koncem 17. století současně – i když v různé formě – německý matematik a filozof Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) a anglický badatel, matematik a fyzik Isaac Newton (1643 – 1727), Leibniz spíš z hlediska geometrického užití, naopak Newton spíše z hlediska užití ve fyzice.

Leibnizovi přísluší formálně priorita, i když se o tom vedl velmi prudký spor. Z terminologie a symboliky od Leibnize se toho také zachovalo mnohem více než od Newtona; naše dnešní označování – zejména značka $\int$ integrálu – pochází od Leibnize[1].

V diferenciálním počtu má Leibnizovo jméno vztah pro výpočet $n$-té derivace součinu dvou funkcí $y = u \cdot v$, kde $u$, $v$ jsou funkce proměnné $x$. Vztah svým tvarem připomíná binomickou větu (pro celistvé exponenty):

$$y^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + \binom{n}{1} \cdot u^{(n-1)} \cdot v' + \binom{n}{2} \cdot u^{(n-2)} \cdot v'' + \ldots + \binom{n}{n} \cdot u \ \cdot v^{(n)}.$$

Práce obou zakladatelů diferenciálního a integrálního počtu však nevznikly „jako blesk z čistého nebe", ale navázaly na řadu svých předchůdců. Mezi nejvýznamnější patřili především francouzští matematici René Descartes (1596 – 1650), který zavedl pojem funkce, Pierre de Fermat (1601 – 1665), Newtonův učitel Isaac Barrow (1630 – 1677) a řada dalších.

Mezi další matematiky, kteří se zasloužili o rozvoj infinitezimálního počtu, patří především švýcarští matematici Leonhard Euler (1707 – 1783), bratři Jacob Bernoulli (1654 – 1705) a Johann Bernoulli (1667 – 1748) a francouzský matematik Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813). Zajímavé je, že především Euler zaujal k Leibnizovu integračnímu znaménku $\int$ kritické stanovisko. Euler prohlašuje v „Institutiones calculi integralis" (1768), že znaménko, které ačkoliv se vžilo, je nevhodné, neboť nevystihuje pojem integrálu jako primitivní funkce, jak byl v té době předmětem úvah. Vývoj však postupně spěl k tomu, definovat

[1] Toto znaménko vzniklo v roce 1675 přeměnou ze sumačního znaménka $S$ – Leibniz nazval integrální počet skutečně „calculus summatorius".

integrál skutečně limitou součtu, čímž bylo s požadovanou přesností stanoveno, co Leibniz pouze v hrubých rysech tušil.

Další zpřesňování, které bylo od 17. století založeno na pojmu „nekonečně malé veličiny", provedl matematik Bernard Bolzano (1781 – 1848) a ve velké míře francouzský matematik Louis Cauchy (1789 – 1857), který zavedl pojem limita funkce (kolem roku 1820). Cauchy vybudoval teorii integrálu pro spojité funkce jedné proměnné. O další významný pokrok se zasloužil německý matematik Bernhard Riemann (1822 – 1866). Nejdůležitější zobecnění Riemannova integrálu provedl v roce 1902 francouzský matematik Henri Lebesque (1875 – – 1941).

Ve výčtu světových matematiků jsme se omezili jen na některé, mnohem podrobněji je možno se s touto problematikou seznámit z hlediska její historie na přiloženém CD ROMu. Ani zde není ale výčet jmen úplný, jsou zde uvedena především těch matematiků, jejichž práce má největší přínos pro fyziku.

Nakonec se ještě zmíníme alespoň o dvou (i když jich bylo mnohem víc) našich význačných matematicích, kteří se touto problematikou zabývali. Jak již bylo výše uvedeno, ke zpřesnění pojmů limita, derivace a spojitost funkce, přispěl Bernard Bolzano. Další vývoj dále velmi významně ovlivnil Vojtěch Jarník (1897 – 1970), autor dodnes používaných vysokoškolských učebnic integrálního a diferenciálního počtu.

V tomto textu se budeme dále zabývat pouze užitím diferenciálního počtu ve fyzice, dále pak bude navazovat další text, týkající se užití integrálního počtu ve fyzice.

# 1 Pojem derivace funkce

Derivace a integrál jsou matematické pojmy, které mají jak v matematice, tak ve fyzice nezastupitelné uplatnění. Podívejme se nyní, jakým způsobem je derivace funkce zavedena.

## 1.1 Derivace

Pod pojmem derivace rozumíme výraz typu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Pokud jsou veličiny $x$ a $y$ vázané funkční závislostí $y = f(x)$, je možno derivaci psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Derivace je tedy limita podílu dvou přírůstků $\Delta y$ a $\Delta x$. Je však třeba zdůraznit, že toto má smysl jen v případě, že veličiny $x$ a $y$ jsou navzájem vázány nějakou funkční závislostí $y = f(x)$.

Pokud bychom ve fyzice uvažovali např. podíl $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, kde $\mathrm{d}s$ je diferenciál dráhy, kterou hmotný bod urazí za časový interval $\mathrm{d}t$, má tento podíl rozumný a konkrétní smysl, protože určuje velikost okamžité rychlosti hmotného bodu.

## 1.2 Diferenciál funkce

Nekonečně malá veličina – *diferenciál* veličiny $x$ je veličina, kterou označujeme $\mathrm{d}f$.

Diferenciál $\mathrm{d}f$ funkce $f$ je za předpokladu, že existuje derivace $f'(x_0)$ dán výrazem

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)(x - x_0).$$

Diferenciál hmotnosti označujeme $\mathrm{d}m$, síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, atd.

## 1.3 Význam derivace jako fyzikální veličiny

Připomeňme si, jak v mechanice měříme průměrnou a okamžitou rychlost. Průměrná rychlost je definována jako podíl přírůstku dráhy $\mathrm{d}s$ a časového intervalu $\mathrm{d}t$, tj.

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Přechod od měření rychlosti průměrné k rychlosti okamžité jste prováděli tak, že jste postupně čím dál více zmenšovali časový interval. Z hlediska našich úvah to ale znamená, že jste prováděli limitní přechod, neboli

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Derivace dráhy podle času tedy vyjadřuje (zatím skalárně) velikost okamžité rychlosti.

Jak výše uvedenou situaci realizovat prakticky si ukážeme na níže uvedeném příkladu.

**Příklad 1 – volný pád**

Předpokládejme, že jsme experimentálně zjistili, že dráha volného pádu je dána vztahem

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Odvoďte pomocí derivace vzorec pro okamžitou rychlost volného pádu.

**Řešení**

Pro velikost okamžité rychlosti hmotného bodu padajícího volným pádem platí

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Zatím ale neumíme provést naznačenou operaci derivace. Pokusme se postupně naznačenou derivaci provést v souladu s tím, jak jsme derivaci zavedli. Platí

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g (2t + \Delta t) \Delta t.$$

Pak

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g (2t + \Delta t) \Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \cdot 2t = gt.$$

Je tedy velikost okamžité rychlosti volného pádu dána vztahem

$$v = gt.$$

Z tohoto vztahu je možno určit velikost okamžité rychlosti volného pádu ($g \doteq 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) na konci první sekundy $v = 10 \cdot 1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

## 1.4 Derivace elementárních funkcí

V dalším textu, pokud výslovně neuvedeme jinak, budeme uvažovat, že máme funkce proměnné $x$, pak budeme derivaci funkce podle proměnné $x$ označovat čárkou. Pokud bychom derivovali podle jiné proměnné než $x$ a nebylo zřejmé, podle jaké proměnné se derivace provádí, použijeme způsob zápisu derivace pomocí diferenciálů.

V předcházející části jsme si ukázali, jak lze ze vztahu $s = \frac{1}{2}gt^2$ pro dráhu volného pádu odvodit vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti volného pádu $v = gt$. Okamžitou rychlost jsme vypočetli jako derivaci dráhy podle času. Podívejme se teď na derivaci funkce z hlediska matematiky.

Zkusme zderivovat kvadratickou funkci $y = x^2$ podle $x$. Derivaci funkce $y$ podle $x$ v matematice běžně značíme $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Můžeme tedy počítat

$$y = x^2,$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2.$$

Potom

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2x\Delta x + \Delta x)\Delta x.$$

Po úpravě a provedení limitního přechodu dostaneme

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x}.$$

Je tedy

$$y' = (x^2)' = 2x.$$

Podobným postupem bychom mohli zjistit, že $x' = 1$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^4)' = = 4x^3$, $(x^0)' = 1' = 0$.

Platí tedy pro derivaci mocniny vztah $x^n = nx^{n-1}$. Obdobně bychom mohli ukázat, že pokud se před derivovanou funkcí vyskytuje konstanta, stačí ji při derivaci vytknout. Ukažme si to na následujícím příkladu:

$$y = 4x^3 + 3x^2 + x + 1,$$

$$y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 0 = 12x^2 + 6x.$$

Uvědomme si ještě jednu věc, kterou jsme použili při řešení předchozího příkladu, aniž jsme si to uvědomili: součet derivujeme tak, že derivujeme postupně jednotlivé členy a vše pak zase vyjádříme ve tvaru součtu.

Obdobným způsobem by bylo možno odvodit i další pravidla pro derivace funkcí, my už si je pouze uvedeme a naučíme se je používat.

## 1.5 Pravidla pro derivaci funkcí

V následující tabulce si uvedeme přehled derivací elementárních funkcí (definiční obor neuvádíme, ale je možno si ho odvodit z vlastností funkcí, které obdržíme po provedení derivace).

| $f: y = f(x)$ | $y' = f'(x)$ |
|---|---|
| $y = c,\ c \in R$ | $y' = 0$ |
| $y = x^n,\ n \in R$ | $y' = nx^{n-1}$ |
| $y = \mathrm{e}^x$ | $y' = \mathrm{e}^x$ |
| $y = \mathrm{a}^x,\ (a > 0,\ a \neq 1)$ | $y' = \mathrm{a}^x \ln a$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ |
| $y = \log_a x,\ (a > 0)$ | $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ |
| $y = \mathrm{tg}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $y = \mathrm{cotg}\, x$ | $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| $y = \arcsin x$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = \arccos x$ | $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = \mathrm{arctg}\, x$ | $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $y = \mathrm{arccotg}\, x$ | $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ |

## 1.6 Derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu dvou funkcí

Nechť funkce $u = f(x)$, $v = g(x)$ mají derivace $u'$, $v'$ v daném bodě. Potom mají níže uvedené funkce rovněž derivace v daném bodě a platí

$$(u + v)' = u' + v',$$

$$(u - v)' = u' - v',$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Je-li navíc v daném bodě $v \neq 0$ platí

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

*Poznámka*

Speciálním případem derivace součinu dvou funkcí, který je v praxi velmi často využívaný, je situace, že jedna z funkcí je konstantní (derivace konstanty je rovna nule). Pak derivaci provádíme tím způsobem, že konstantu $c$ vytkneme a derivujeme pouze druhou funkci, tj.

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'.$$

**Příklad 2 – derivace funkcí**

Určete derivace následujících funkcí:

1. $y = 5x^4 - 3x^2$,
2. $y = x^{\frac{4}{9}} - 5$,
3. $y = \dfrac{3x^5}{\sqrt[5]{x^2}} - \dfrac{7}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[7]{x^3}$.

**Řešení**

1. $y' = 5 \cdot 4 \cdot x^3 - 3 \cdot 2 \cdot x = 20x^3 - 6x$.
2. $y' = \left(x^{\frac{4}{7}}\right)' - 5' = \frac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}} - 0 = \dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$.
3. $y' = 3\left(x^{\frac{23}{5}}\right)' - 7\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' + 3\left(x^{\frac{3}{7}}\right)' = \dfrac{69}{5}x^{\frac{18}{5}} + \dfrac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \dfrac{9}{7}x^{-\frac{4}{7}}$.

**Další řešené příklady k procvičení techniky derivování a úlohy k samostatné práci (s odkazem na úplné řešení) jsou uvedeny na přiloženém CD ROMu v části** ***Diferenciální počet ve fyzice*****.**

## 1.7 Derivace složené funkce

Mějme např. funkci $y = \ln \sin x$. Je to logaritmická funkce, jejíž argument není nezávisle proměnná $x$ nýbrž funkce $\sin x$ této proměnné. Funkce tohoto typu nazýváme *složenými funkcemi*.

Nyní nahradíme $\sin x$ písmenem $u$. Potom $y = \ln u$, kde $u = \sin x$. Zavedli jsme pomocnou proměnnou $u$ a vyjádřili funkční závislost $y$ na $u$ a $u$ na $x$.

Jestliže analogicky v závislosti $y = \sqrt{1 + x^2}$ označíme $1 + x^2$ písmenem $u$, vyjádříme tím i tuto závislost jako závislost $y$ na $u$ a $u$ na $x$.

Jestliže obecně určíme pro danou funkci proměnné $x$ závislost $y$ na pomocné proměnné $u$ a proměnné $u$ na $x$, tj. *jestliže $y = f(u)$, kde $u = \varphi(x)$, potom takováto závislost $y$ na $x$ určuje „funkci funkce", čili složenou funkci.*

Jestliže v závislosti $y = f(u)$ nahradíme $u$ pomocí $\varphi(x)$, získáme vztah

$$y = f[\varphi(x)].$$

Na tomto způsobu zápisu ihned vidíme, že argumentem funkce $f$ není nezávisle proměnná $x$, nýbrž funkce $\varphi(x)$.

Nyní si ještě ukážeme, jak takovou funkci derivovat.

Je-li $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, potom derivace $y$ podle proměnné $x$ je rovna derivaci $y$ podle proměnné $u$, násobené derivací $u$ podle proměnné $x$.

Výše uvedené tvrzení nebudeme dokazovat, rovněž také předpokládáme, že při derivaci jsou splněny všechny předpoklady existence derivací a spojitost funkcí (ve fyzice tomu tak bude téměř vždy). Důkazy výše uvedených tvrzení je možno nalézt v učebnicích diferenciálního počtu.

Nyní nám už zbývá jen si ukázat, jak zderivovat výše uvedené funkce dle uvedeného návodu.

Funkce $y = \ln \sin x$:

$$y' = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x.$$

Funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$:

$$y' = (\sqrt{u}) \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

### Příklad 3 – derivace složené funkce

Vypočtěte derivaci funkce $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ pro $x \in \langle -a; a \rangle$.

**Řešení**

Jedná se o složenou funkci: $y = \sqrt{u}$, $u = a^2 - x^2$. Použitím vzorce pro derivaci složené funkce obdržíme

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(a^2 - x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Způsob zápisu derivování složené funkce, který jsme až doposud používali, je velmi nevhodný. Na tomto příkladu si ukážeme mnohem jednodušší způsob zápisu.

Mějme dánu funkci $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Ihned je vidět, že je to složená funkce. Nahradíme si v duchu výraz $a^2 - x^2$ pod odmocninou proměnnou $u$, derivujeme $y$ podle proměnné $u = a^2 - x^2$ a vynásobíme derivací $u$ podle proměnné $x$, tj. výrazem $(a^2 - x^2)'$. Dostaneme

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(a^2 - x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Nakonec, pokud už si techniku derivování více osvojíte, je možno zjednodušit i poslední způsob zápisu tím, že „vynecháme“ součinitele $(a^2 - x^2)'$ a dosadíme za něj výsledek derivování základu $a^2 - x^2$:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

**Další řešené příklady k procvičení techniky derivování složené funkce a úlohy k samostatné práci (s odkazem na úplné řešení) jsou uvedeny na přiloženém CD ROMu v části** *Diferenciální počet ve fyzice***.**

## 1.8 Druhá derivace

Kromě první derivace se ve fyzice často setkáváme i s druhou derivací (popř. i vyššími). Jedná-li se např. o funkci $y$ proměnné $x$, pak druhou derivaci označujeme jako

$$y'' \quad \text{nebo} \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Druhý způsob zápisu je vhodné používat v případech, kdy nederivujeme podle proměnné $x$. Pak bychom ve výše uvedeném zápisu nahradili proměnnou $x$ jinou proměnnou (může to být např. $t$).

Pod druhou derivací rozumíme funkci, kterou získáme derivací funkce $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (zkráceně $y'$) podle její proměnné (v tomto případě $x$). Platí

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}.$$

## 1.9 Parciální derivace

S pojmem *parciální derivace* se setkáváme u funkcí více proměnných. Mějme například funkci

$$u = 2x^2 + y^3,$$

kde $x$ a $y$ jsou nezávisle proměnné a $u$ je závisle proměnná veličina. Funkci $u(x, y)$ můžeme derivovat buď podle proměnné $x$ nebo podle proměnné $y$. Postup derivace a zápisu derivací vypadá následovně:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y^3) = 4x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y^3) = 3y^2.$$

Jestliže derivujeme podle proměnné $x$, považujeme přitom veličinu $y$ za konstantu a naopak, když derivujeme podle proměnné $y$ považujeme veličinu $x$ za konstantu.

Tak, jako jsme zavedli druhou derivaci funkce jedné proměnné, je možno také zavést druhé parciální derivace (mohou být i smíšené).

Více informací o smíšených parciálních derivacích je uvedeno na CD ROMu jako příloze k tomuto textu – část Diferenciální počet ve fyzice.

My se v tomto textu parciálními derivacemi zabývat nebudeme – tato problematika překračuje rámec tohoto textu, který je určen v převážné míře pro začátečníky. S parciálními derivacemi se můžete setkat ve fyzice např. u vlnění (rovnice postupné vlny $y = y_\mathrm{m} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ je funkcí dvou proměnných $x$ a $t$, chceme-li tuto funkci derivovat, je v tomto případě již nutné zapsat derivaci jako parciální) nebo i při popisu fyzikálních polí (např. veličina intenzita elektrického pole je všeobecně funkcí souřadnic a může být zároveň i funkcí času).

*Poznámka*

Ve fyzice velmi často také používáme různá zjednodušení zápisů derivací. S jedním z nich už jsme se setkali – derivaci podle souřadnice jsme zapisovali pomocí čárky, tj. např. $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. Další zjednodušení, které se rovněž často používá je zápis derivace podle času pomocí teček, tj. např. $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$.

## 1.10 Derivace vektorové veličiny

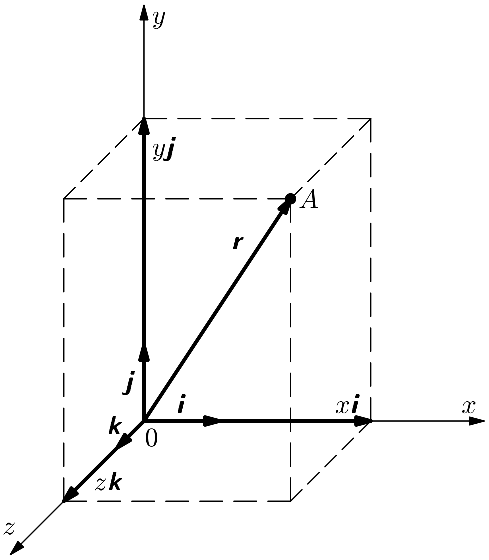
Chceme-li např. v kinematice popsat polohu hmotného bodu v prostoru, zavádíme veličinu *polohový vektor* $\boldsymbol{r}$. Polohový vektor určuje polohu hmotného bodu vzhledem zvolenému vztažnému bodu – obvykle počátek soustavy souřadnic.

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ hmotného bodu v prostoru vzhledem k počátku pravoúhlé soustavy souřadnic je možno pomocí pravoúhlých souřadnic uvedeného bodu v prostoru (viz obr. 1) vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os, přičemž

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$




**Obr. 1** Polohový vektor $\boldsymbol{r}$

Potom můžeme rychlost pohybu hmotného bodu definovat vztahem

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Dále pak můžeme psát

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}.$$

Ve složkách je možno psát

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}; \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}; \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Jestliže jsou $v_x$, $v_y$ a $v_z$ souřadnice rychlosti, pak velikost rychlosti můžeme určit pomocí vztahu

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Dále je možno také určit zrychlení pohybu, které můžeme definovat vztahem

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Výše uvedený vztah pro zrychlení pohybu $\boldsymbol{a}$ je možno dále rozepsat

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}.$$

Ve složkách je možno psát

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}; \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}; \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$$

Analogicky jako v předchozím případě je možno pro velikost zrychlení psát

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Nyní si ukážeme, jak výše uvedené poznatky použít při řešení úloh.

### Příklad 4 – parametrické rovnice

Hmotný bod se pohybuje v rovině rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem, jehož trajektorie pohybu je číselně dána rovnicí $y = 0{,}05 - 0{,}75x$. V čase $t = 0$ s se hmotný bod nachází v místě o číselných souřadnicích $[0; 0{,}05]$ (údaje jsou v metrech) a jeho počáteční rychlost je $v_0 = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Za 2 s od začátku pohybu urazí hmotný bod dráhu 0,04 m. Určete

a) parametrické rovnice pohybu hmotného bodu,

b) velikost rychlosti a velikost zrychlení v závislosti na čase nejprve obecně, pak za 2 s od začátku pohybu

### Řešení

a) Vzhledem k tomu, že pohyb hmotného bodu je rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční rychlostí, můžeme psát parametrické rovnice číselně ve tvaru

$$x = kt^2, \qquad y = 0{,}05 - 0{,}75kt^2, \tag{1}$$

kde $k$ je konstanta. Dráha uražená hmotným bodem v čase $t$ je délka úsečky a je dána vztahem

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(kt^2)^2 + (0{,}05 - 0{,}75kt^2)^2}. \tag{2}$$

Konstantu $k$ určíme z podmínky, že v čase $t = 2$ s je $s = 0{,}04$ m. Po dosazení do rovnice (2) a umocnění dostaneme

$$0{,}04^2 = 16k^2 + (0{,}05 - 3k)^2,$$

po úpravě vznikne kvadratická rovnice

$$25k^2 - 0{,}3k + 0{,}03^2 = 0,$$

jejímž řešením dostaneme číselnou hodnotu $k = 0{,}006$.

Po dosazení za $k$ do rovnice (1) dostaneme parametrické rovnice hmotného bodu

$$x = 0{,}006t^2, \qquad y = 0{,}05 - 0{,}0045t^2.$$

b) Souřadnice rychlosti pohybu hmotného bodu určíme pomocí derivací souřadnic, tj.

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}006t^2) = 0{,}012t,$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}05 - 0{,}0045t^2) = -0{,}009t.$$

Velikost rychlosti je pak číselně dána vztahem

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(0{,}012t)^2 + (-0{,}009t)^2} = 0{,}015t.$$

Rychlost za 2 s od začátku pohybu pak je

$$v = 0{,}015 \cdot 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}030 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Číselné hodnoty souřadnice zrychlení pohybu hmotného bodu dostaneme pomocí derivací souřadnic rychlosti pohybu, tj.

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}v_y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}012t) = 0{,}012,$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}f} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}009t) = -0{,}009.$$

Velikost zrychlení je pak dána vztahem

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0{,}015 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Velikost zrychlení je konstantní a má hodnotu $0{,}015 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

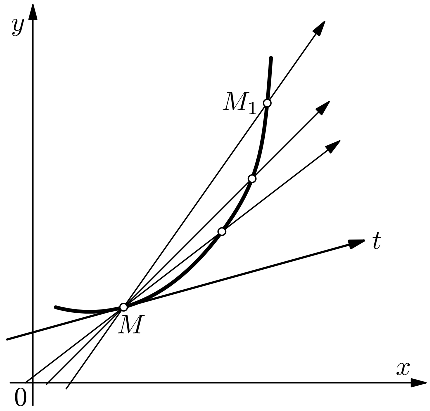
**Další řešené příklady k derivaci vektoru a úlohy k samostatné práci (s odkazem na úplné řešení) jsou uvedeny na přiloženém CD ROMu v části *Diferenciální počet ve fyzice*.**

# 2 Extrémy funkcí

## 2.1 Geometrický význam derivace

Nechť je dána libovolná křivka. Nyní určíme tečnu k této křivce v libovolně zvoleném bodě $M$.

Abychom stanovili tečnu v bodě $M$ k dané křivce, budeme postupovat takto: kromě bodu $M$ si na křivce zvolíme ještě bod $M_1$ (viz obr. 2), různý od bodu $M$ a určíme sečnu $MM_1$.




**Obr. 2** Určení tečny křivky

Bude-li se bod $M_1$ pohybovat po křivce, pak se bude sečna $MM_1$ otáčet kolem bodu $M$.

*Tečnou křivky v bodě $M$ se nazývá limitní poloha sečny $MM_1$, když se bod $M_1$, který se pohybuje po křivce, blíží bodu $M$.*

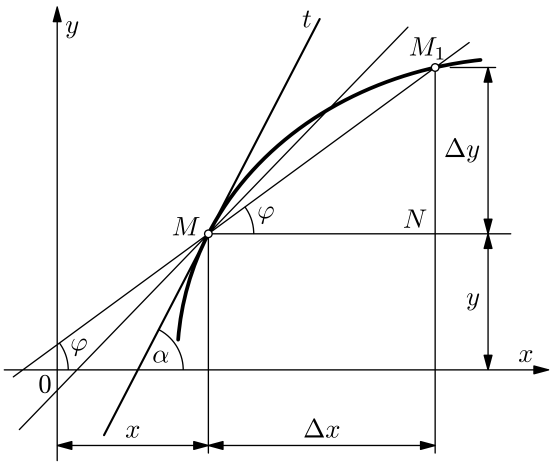
Je-li křivka určena rovnicí $y = f(x)$, potom k nalezení její tečny v bodě $M = [x, y]$ stačí znát směrnici této tečny.

Nyní se podíváme, jak je možno nalézt směrnici tečny ke křivce v bodě $M$.

Zvětšíme-li souřadnici $x$ bodu $M$ o přírůstek $\Delta x$, přejdeme tak k bodu $M_1$ se souřadnicemi $x + \Delta x$, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ (viz obr. 3). Směrnici sečny $MM_1$, která je rovna $\operatorname{tg} \varphi$, určíme z pravoúhlého trojúhelníka $MNM_1$. Jeho odvěsna $MN$ má velikost přírůstku $\Delta x$ souřadnice $x$ bodu $M$ a odvěsna $NM_1$ je odpovídajícím přírůstkem souřadnice $y$:

$|NM_1| = |\Delta y|$,

$|\Delta y| = |f(x + \Delta x) - f(x)|$.




**Obr. 3** Určení směrnice tečny křivky

To ale znamená, že

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

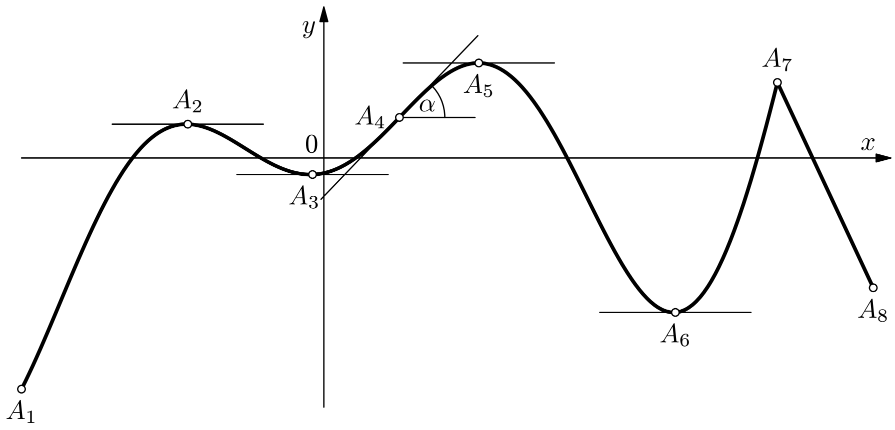
Bude-li se bod $M_1$ pohybovat po křivce k bodu $M$, potom přírůstek $\Delta x$ se bude zmenšovat, až se bude blížit nule. Proto je třeba při hledání směrnice tečny nalézt limitu podílu $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ pro $\Delta x \to 0$. Označíme-li $\alpha$ úhel, který svírá tečna s osou $x$, dostaneme výsledek:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Protože $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ je derivací $y' = f'(x)$ funkce $y = f(x)$, můžeme říci, že *směrnice* ($\operatorname{tg}\alpha$) *tečny je derivací souřadnice $y = f(x)$ podle souřadnice $x$ v bodě $M$.*

Je-li směrnice tečny $y' = \operatorname{tg}\alpha > 0$, budeme říkat, že daná funkce je *rostoucí*, je-li naopak směrnice tečny $y' < 0$, je daná funkce *klesající*. Pokud by nastala situace, že daná funkce má v určitém bodě derivaci rovnou nule, tj. $y' = 0$, hovoříme o tom, že daná funkce může mít v tomto bodě *lokální extrém* nebo *inflexní bod*. Hledáním podmínek, kdy má funkce lokální extrém, nebo inflexní bod, se budeme zabývat v níže uvedené kapitole.

## 2.2 Určování extrémů funkcí




**Obr. 4** Extrémy funkce

Ve fyzice se často setkáváme s úlohami typu, zda je daná funkce rostoucí nebo klesající a kdy tato funkce nabývá extrémních hodnot: maxima nebo minima. Ukážeme si souvislost těchto úloh s derivacemi příslušné funkce.

Budeme uvažovat, že všechny funkce, kterými se budeme zabývat, jsou *spojité*. Intuitivně to lze chápat tak, že funkci lze na daném intervalu zobrazit spojitou křivkou (což si lze představit tak, že křivka není v daném intervalu v žádném bodě přerušená).

Z předchozí kapitoly už víme, že pokud v daném bodě $x_0$ existuje tečna, je její směrnice $\operatorname{tg}\alpha$ dána hodnotou derivace v bodě $x_0$, tj. platí

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0),$$

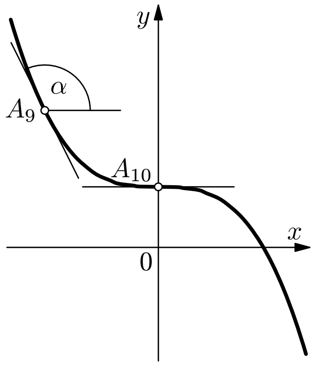
kde $\alpha \in (0°; 180°)$ je směrový úhel příslušné tečny.

Připomeňme si, že je-li úhel $\alpha \in (0°; 90°)$, je $f'(x_0) > 0$ a daná funkce je v bodě o souřadnici $x_0$ (na obr. 4 bod $A_4$) rostoucí. Bude-li úhel $\alpha \in (90°; 180°)$, je funkce v daném bodě (bod $A_9$ na obr. 5) klesající.

Je-li funkce na daném intervalu rostoucí nebo klesající, říkáme, že funkce je na tomto intervalu *monotónní*.

My se budeme zabývat situací, kdy platí $f'(x_0) = 0$, na obr. 4 tomu odpovídají body $A_2$, $A_3$, $A_5$, $A_6$. V těchto bodech má daná funkce *lokální extrémy*, přesněji řečeno buď *lokální maximum* nebo *lokální minimum*.

Zvláštní situace (kdy je $f'(x_0) = 0$) nastává v bodě $A_{10}$ na obr. 5. Zde je první derivace funkce rovna nule, a přesto nenastane lokální extrém. Tento bod se nazývá *inflexní bod*.




**Obr. 5** Inflexní bod

Pokud bychom se podívali znovu na obr. 4, zjistíme, že je tam jeden bod – – $A_7$, kde je funkce „špičatá“ – v tomto bodě funkce nemá derivaci – je vidět, že pokud bychom chtěli v tomto bodě sestrojit tečnu, nelze to udělat jednoznačně (jinak by vypadala tečna, pokud bychom se blížili k tomuto bodu zleva a jinak zprava).

*Shrnutí*

Extrémy spojité funkce, která je definovaná na libovolném intervalu, můžeme nalézt mezi následujícími body:

1. Krajní body námi uvažovaného intervalu: na obr. 4 tomu odpovídají body $A_1$ a $A_8$. V případě obr. 4 je vidět, že v bodě $A_1$ nastává minimum (říkáme také *globální minimum*). Toto ovšem platí, je-li uvažovaný interval uzavřený. Je-li daný interval otevřený, krajní body nepřipadají v úvahu.
2. Body, v nichž neexistuje derivace: na obr. 4 tomu odpovídá bod $A_7$.
3. Body, v nichž je první derivace rovna nule. Zde jsme ale zatím nevyřešili problém, jak zjistit, máme-li vypočtenou $x$-ovou souřadnici, zda v tomto bodě bude lokální maximum, lokální minimum, nebo zda se nejedná o inflexní bod.

### 2.2.1 Lokální extrémy

V předcházející části jsme dospěli k závěru, jak najít body, ve kterých mohou existovat lokální extrémy funkce, ale nevyřešili jsme problém, jak vyšetřit přesněji, o jaký druh lokálního extrému se jedná.

Na následujícím příkladu se pokusíme nalézt postup, jak tyto lokální extrémy blíže určit.

**Příklad 5 – lokální extrémy**

Nalezněte lokální extrémy funkce: $f:\ y = \dfrac{x^4}{4} + x^3$.

**Řešení**

Určíme první derivaci funkce $y$:

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^4}{4} + x^3\right) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3).$$

Nyní položíme první derivaci rovnou nule: $y' = 0$. Dostaneme

$$x^2(x+3) = 0,$$

z čehož $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -3$.

Nyní máme dvě možnosti (obě se používají), jak blíže určit o jaké lokální extrémy se jedná.

1. Pomocí druhé derivace: $y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 + 3x^2) = 3x^2 + 6x$. Další postup by byl takový, že do takto vypočtené druhé derivace postupně dosadíme za $x$ určené hodnoty $x_{1,2}$, $x_3$ a určíme znaménko druhé derivace. Pokud vyjde pro daný bod $y'' > 0$, bude se jednat o lokální minimum, bude-li $y'' < 0$, bude se jednat o lokální maximum, a pro $y'' = 0$ můžeme dostat inflexní bod. Tedy $y''(0) = 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 = 0$, $y''(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3) = 27 - 18 = 9 > 0$.

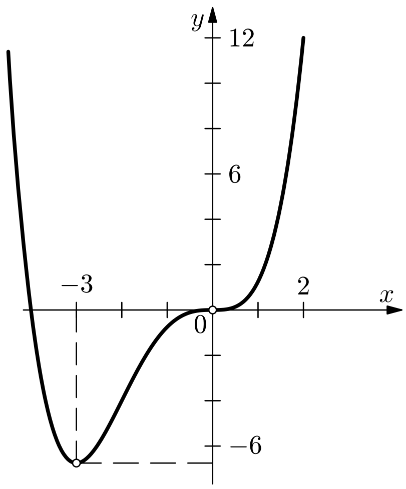
   Pro $x = 0$ jsme dostali inflexní bod, pro $x = -3$ nastává lokální minimum.

2. Zjistíme, jak vypadají funkční hodnoty v nejbližším okolí zjišťovaného bodu.

   Pro $x = 0$ je $y(0) = 0$. Pro $x_a = -0{,}5$ je $y(-0{,}5) = -0{,}109$, pro $x_b = 0{,}5$ je $y(0{,}5) = 0{,}141$. Je tedy pro $x_a < x$ $y(x_a) < y(x)$ a pro $x < x_b$ $y(x) < y(x_b)$. Daná funkce je tedy v okolí bodu $x = 0$ rostoucí, a tedy bod $x = 0$ je inflexním bodem dané funkce.

   Pro $x = -3$ je $y(-3) = -6{,}75$. Pro $x_c = -3{,}5$ je $y(-3{,}5) = -5{,}359$. Pro $x_d = -2{,}5$ je $y(-2{,}5) = -5{,}859$. Je tedy pro $x_c < x$ $y(x_c) < y(x)$, a pro $x > x_d$ je $y(x) < y(x_d)$. Funkce $y$ tedy pro $x = -3$ nabývá nejmenší hodnotu, jedná se tedy o lokální minimum.

K doplnění našeho postupu si ještě nakresleme graf výše uvedené funkce.




**Obr. 6** Graf funkce $y = \frac{x^4}{4} + x^3$

*Shrnutí*

Lokální extrémy funkce vyšetřujeme pomocí následujícího postupu:

1. Vypočteme první derivaci dané funkce.
2. Položíme první derivaci funkce rovnou nule a vypočteme hodnoty $x_0$, pro které je první derivace funkce rovna nule.
3. Vypočteme druhou derivaci funkce.
4. Dosadíme hodnoty $x_0$ vypočtené v bodě 2. do druhé derivace.
5. Je-li $y''(x_0) > 0$, nastává lokální minimum, je-li $y''(x_0) < 0$, nastává lokální maximum. Je-li $y''(x_0) = 0$, můžeme[2] dostat inflexní bod.

*Poznámka*

Výpočet druhé derivace není nutné vždy provádět, v některých případech stačí porovnat funkční hodnoty bodů v okolí bodu, v němž je první derivace rovna nule, tak, jak jsme si ukázali v příkladu 5.

[2] Je třeba si ovšem uvědomit, že jinak se chová např. mocninná funkce se sudým a jinak s lichým exponentem. Proto je nutno používat opatrnější formulaci „můžeme dostat“ místo pouhého dost často běžně používaného „dostaneme“.

Pokud bychom např. vyšetřovali funkci $y = x^4$, což je sudá funkce, je $y' = 4x^3$. Po zderivování je tedy $y' = 0$ pro $x = 0$. Provedeme-li druhou derivaci, tj. $y'' = 12x^2$ a dosadíme-li za $x = 0$, což je $x$, pro které je $y' = 0$, obdržíme $y'' = 0$. Očekávali bychom, že v bodě, kde je $x = 0$, dostaneme inflexní bod. Ovšem z průběhu funkce $y = x^4$ je zřejmé, že pro $x = 0$ nastalo lokální minimum.

Zcela jiná situace je u mocninné funkce s lichým exponentem, tj. např. funkce $y = x^3$, kde v bodě $x = 0$ je $y' = 0$. V tomto bodě platí, že i $y'' = 0$. V tomto případě dostaneme inflexní bod.

# 3 Užití diferenciálního počtu ve fyzice

V této části si ukážeme, jak je výše uvedené poznatky z diferenciálního počtu možno použít při řešení úloh.

## 3.1 Užití diferenciálu funkce

V první kapitole jsme si ukázali, že diferenciál vznikne záměnou přírůstku $\Delta y$ diferenciálem $\mathrm{d}y$. Na záměně přírůstku $\Delta y$ diferenciálem $\mathrm{d}y$ je také založeno *odvození přibližných vzorců* (viz CD ROM), kterých se často užívá v praxi. My se ale v této části textu zaměříme spíš na aplikace ve fyzice.

**Příklad 6 – absolutní a relativní odchylka výpočtu obsahu čtverce**

Vypočítejte absolutní a relativní odchylku pro obsah čtverce o straně $a = (4{,}25 \pm 0{,}01)$ cm.

**Řešení**

Místo přírůstku $\Delta S$ obsahu čtverce budeme počítat jeho diferenciál. Platí

$$S = a^2,$$

$$S' = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = 2a,$$

$$\mathrm{d}S = S'(a)\mathrm{d}a = 2a\mathrm{d}a.$$

Po dosazení dostaneme ($\Delta S \doteq \mathrm{d}S$)

$$\Delta S \doteq \mathrm{d}S = 2 \cdot 4{,}25 \cdot 0{,}01\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}085\ \mathrm{cm}^2,$$

což je zároveň absolutní odchylka.

Relativní odchylka

$$\delta S = \frac{\mathrm{d}S}{S} \cdot 100\% = 0{,}471\%.$$

Obsah čtverce pak můžeme psát ve tvaru

$$S = (a^2 \pm 2a\mathrm{d}a) = (18{,}06 \pm 0{,}09)\ \mathrm{cm}^2.$$

**Příklad 7 – matematické kyvadlo**

Doba kyvu matematického kyvadla $\tau$ je dána vztahem

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

O kolik se změní $\tau$, změní-li se délka $l = 100$ cm o 0,5 cm ($g = 9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$)?

**Řešení**

Místo změny času $\Delta\tau$ budeme počítat jeho diferenciál. Platí

$$\tau' = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}l} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{l}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{gl}},$$

$$\Delta\tau \doteq \mathrm{d}\tau = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{gl}} \cdot \Delta l = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}00}} \cdot 0{,}005\ \mathrm{s} = 0{,}0025\ \mathrm{s}.$$

Doba kyvu se tedy za daných podmínek změní o 0,0025 s.

**Toto byla ukázka dvou úloh zaměřených na užití diferenciálu funkce. Další úlohy na užití diferenciálu funkce jsou uvedeny na CD ROMu.**

## 3.2 Derivace vektorové veličiny

V první kapitole jsme si popsali postup, jak derivovat vektorovou veličinu. Připomeňme si, že vektorovou veličinu (polohový vektor) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Tuto veličinu pak derivujeme tím způsobem, že zderivujeme každou její složku.

V následujícím příkladu si nejprve ukážeme, jak s takovou vektorovou veličinou pracovat.

**Příklad 8 – trajektorie pohybu**

Pohyb tělesa v rovině je dán rovnicí

$$\boldsymbol{r} = A\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + B\cos 2\omega t\,\boldsymbol{j},$$

kde $A$, $B$, $\omega$ jsou konstanty. Určete

a) rovnici trajektorie tohoto pohybu,

b) velikost rychlosti pohybu tělesa v závislosti na čase.

pohybu.

**Řešení**

a) Danou rovnici je možno vyjádřit pomocí dvou složek:

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = B\cos 2\omega t.$$

Dále budeme postupovat pomocí níže uvedených úprav.

$$x = A\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t = \frac{x}{A}.$$

$$y = B\cos 2\omega t \Rightarrow \cos 2\omega t = \frac{y}{B}.$$

Použitím součtového vzorce dostaneme

$$\frac{y}{B} = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t,$$

dále pak použitím vztahu $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ dostaneme $\frac{y}{B} = 2\cos^2 \omega t - 1$.

Po dosazení za $\cos \omega t = \frac{x}{A}$ do výše uvedené rovnice dostáváme

$$\frac{y}{B} = 2\frac{x^2}{A^2} - 1,$$

$$\frac{A^2}{2B} y = x^2 - \frac{A^2}{2},$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2B} y + \frac{A^2}{2}.$$

Dostali jsme rovnici paraboly.

b) Nejprve určíme složky jednotlivých rychlostí, tj.

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\cos \omega t) = -A\omega \sin \omega t,$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\cos 2\omega t) = -2B\omega \sin 2\omega t.$$

Velikost rychlosti je pak dána vztahem

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-A\omega \sin \omega t)^2 + (-2B\omega \sin 2\omega t)^2},$$

po úpravě

$$v = A\omega \sin \omega t \sqrt{1 + \frac{4B^2}{A^2}\cos^2 \omega t}.$$

**Příklad 9 – vrh šikmo vzhůru**

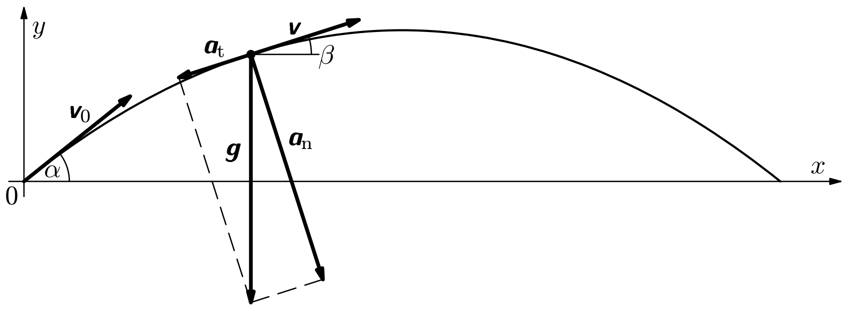
Hmotný bod vržený šikmo vzhůru počáteční rychlostí o velikosti $v_0$ pod elevačním úhlem $\alpha$ se pohybuje po parabole (pokud zanedbáváme odpor prostředí). Pohyb paraboly je popsán rovnicí

$$\boldsymbol{r} = v_0 t \cos \alpha\, \boldsymbol{i} + \left( v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \right) \boldsymbol{j}.$$

Určete

a) okamžitou rychlost, normálové a tečné zrychlení, které má hmotný bod v libovolném místě trajektorie,

b) místo na trajektorii, kde je tečné zrychlení rovno nule.




**Obr. 6** Vrh šikmo vzhůru

**Řešení**

a) Ze zadání vidíme, že souřadnice pohybu jsou dány vztahy

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Pro složky rychlosti platí vztahy

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Nyní vypočteme velikost okamžité rychlosti

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2},$$

po úpravě

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\right)} = \sqrt{v_0^2 - 2gy}.$$

(Všimněte si, že tato rovnice také přímo vyplývá ze zákona zachování energie.)

S osou $x$ svírá vektor okamžité rychlosti úhel $\beta$, pro který platí

$$\cos\beta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}.$$

S osou $y$ svírá vektor okamžité rychlosti úhel $\gamma = 90^\circ - \beta$, pro který platí

$$\cos\gamma = \frac{v_y}{v} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}.$$

Pro normálové a tečné zrychlení dostaneme

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_0^2 - 2gy} = -\frac{g\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = -\frac{g(v_0 \sin\alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}},$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = g^2 - \left[-\frac{g(v_0 \sin\alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}\right]^2 = g^2 - \left(\frac{gv_y}{v}\right)^2 = \frac{g^2}{v^2}(v^2 - v_y^2),$$

$$a_n^2 = \frac{g^2}{v^2}v_x^2 = \frac{g^2 v_0^2 \cos^2\alpha}{v^2}.$$

Nakonec

$$a_n = \frac{gv_0 \cos\alpha}{v}.$$

b) Hledáme místo na trajektorii pohybu, kde je tečná složka zrychlení rovna nule. Má tedy platit

$$a_t = 0,$$

$$-\frac{g(v_0 \sin\alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = 0,$$

z čehož

$$v_0 \sin\alpha - gt = 0.$$

Z toho $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Tento vztah určuje nejvyšší bod trajektorie (doba stoupání).

Tečná složka zrychlení je tedy rovna nule v nejvyšším bodě trajektorie (vrchol paraboly).

*Poznámka*

K tomuto závěru lze také dospět na základě jednoduché úvahy: vzhledem k tomu, že hledáme místo, kde je tečná složka rovna nule, musí v tomto místě být normálová složka $a_n = a = g$. Toto je ale splněno pouze v nejvyšším bodě trajektorie, tj. vrcholu paraboly.

**Toto byla ukázka dvou úloh zaměřených na práci s vektorovými veličinami a jejich derivacemi. Další úlohy na užití diferenciálu funkce jsou uvedeny na CD ROMu.**

## 3.3 Úlohy vedoucí ke zjišťování lokálních extrémů funkcí

V této části si ukážeme, jak řešit úlohy, kde je nutno nalézt lokální extrémy funkcí.

Nejprve si uvedeme obecný postup, jak takové úlohy řešit:

1. Zavedeme proměnné a přiřadíme jim symboly.
2. Vyjádříme veličinu, jejíž maximum nebo minimum budeme hledat, pomocí těchto proměnných.
3. Zjistíme vztahy mezi proměnnými ze zadání problému, abychom je mohli převést všechny na jedinou proměnnou.
4. Vyjádříme veličinu, která se má maximalizovat nebo minimalizovat pomocí jediné proměnné.

*Poznámka*

Proměnnou ve 3. kroku se snažíme zvolit tak, aby funkční závislost ve 4. kroku byla co nejjednodušší.

Následující, spíš matematický příklad, nám bude tento postup ilustrovat.

**Příklad 10 – povrch nádoby**

Jaký je nejekonomičtější tvar válcové nádoby (např. hrnce bez pokličky) s daným objemem, tj. jaký je nejmenší povrch?

**Řešení**

1. krok. Nechť $r$ je poloměr a $h$ je výška nádoby.
2. krok. Povrch nádoby je dán součtem obsahu dna a stěn pláště, tj.

$$S = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi(r^2 + 2rh).$$

3. krok. Proměnné $r$ a $h$ jsou vázány vztahem pro objem nádoby (válce), tj.

$$V = \pi r^2 h,$$

což lze upravit na tvar

$$\frac{V}{\pi} = r^2 h = K, \qquad \text{(konstanta)}.$$

4. krok. Výraz pro další postup řešení úlohy bude jednodušší, když vyjádříme neznámou $h$:
$$h = \frac{K}{r^2},$$
než kdybychom vyjadřovali $r$. Potom
$$S = \pi \left( r^2 + \frac{2K}{r} \right).$$

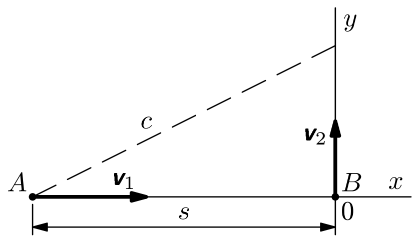
Nyní už můžeme říci, že se nám podařilo zformulovat matematický problém: hledat minimum funkce $S$ pro $r > 0$.

Funkci $S$ nyní zderivujeme podle $r$:
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = \pi \left( 2r - \frac{2K}{r^2} \right).$$
Pak položíme $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 0$. Dostaneme
$$r^3 = K \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$
odtud
$$h = \frac{K}{r^2} = r.$$

Dalším výpočtem musíme zjistit, zda se jedná o lokální maximum nebo lokální minimum funkce $S$. V příkladu 5 jsme si ukazovali dvě možnosti, jak lze toto zjistit, my v tomto případě použijeme výpočet pomocí druhé derivace. Platí
$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} = 2\pi \left( 1 + \frac{2K}{r^3} \right) > 0,$$
protože $r > 0$. Vypočtené $r = \sqrt[3]{K}$ je tedy lokálním minimem funkce $S$.

**Příklad 11 – pohyb automobilů**

Ve čtyři hodiny odpoledne vyjelo auto $A$ rychlostí 60 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ ke křižovatce vzdálené 125 km na východ. Ve stejném okamžiku projede po této křižovatce auto $B$ rychlostí 30 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na sever (obr. 7). Kdy budou tato auta nejblíže k sobě a jaká bude mezi nimi vzdálenost?



**Obr. 7** Pohyb automobilů

### Řešení

Pro pohyb prvního auta platí $x = v_1 t - s$, pro pohyb druhého auta platí $y = v_2 t$. Okamžitá vzdálenost obou aut je dána vztahem $c = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Po dosazení do vztahu pro $c$ dostaneme

$$c = \sqrt{(v_1 t - s)^2 + (v_2 t)^2}.$$

Nyní bychom chtěli vyšetřit, kdy bude vzdálenost $c$ minimální. Výpočet zjednodušíme pomocí následující úvahy: bude-li $c$ minimální, bude minimální také $c^2$. Zaměříme se tedy na zjišťování minima funkce $c^2$. Je tedy

$$c^2 = (v_1 t - s)^2 + (v_2 t)^2,$$

$$\dot{c^2} = \frac{\mathrm{d}(c^2)}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot (v_1 t - s) \cdot v_1 + 2 v_2 t \cdot v_2 = -2 s v_1 + 2 v_1^2 t + 2 v_2^2 t.$$

Položíme $\dot{c^2} = 0$. Pak dostaneme

$$-2 s v_1 + 2 v_1^2 t + 2 v_2^2 t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2} s.$$

Nyní pomocí druhé derivace ověříme, zda pro výše vypočtené $t$ skutečně nastává lokální minimum funkce $c^2$.

$$\ddot{c^2} = 2 v_1^2 + 2 v_2^2 > 0.$$

Je vidět, že nastalo skutečně lokální minimum.

Dále určíme, jaká bude minimální vzdálenost obou aut:

$$c_{\min} = \sqrt{\left(s - v_1 \cdot \frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2} s\right)^2 + \left(v_2 \cdot \frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2} s\right)^2},$$

$$c_{\min} = \frac{v_2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} s.$$

Pro dané hodnoty je $t = 1{,}67$ hod $= 1$ hod 40 minut, $c_{\min} = 55{,}9$ km. Auta budou k sobě nejblíže v 17 hodin 40 minut.

### Příklad 12 – dokonale pružný ráz

Dvě částice o hmotnostech $m_1$ a $m_2$ ($m_1 > m_2$) se pohybují po přímce rychlostmi o velikostech $v_1$ a $v_2$ stejné orientace tak, že dojde k jejich pružnému rázu (srážce). Ukažte, že nárůst kinetické energie částice o hmotnosti $m_1$ bude maximální, jestliže se před srážkou pohybovala rychlostí

$$v_{01} = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_2}{2m_1}.$$

Při řešení předpokládejte, že ráz je dokonale pružný.

**Řešení**

Označme $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ rychlosti částic o hmotnostech $m_1$, $m_2$ po srážce.
Při srážce platí zákon zachování hybnosti

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

a zákon zachování mechanické energie (vzhledem k tomu, že srážka je dokonale pružná)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Tím jsme dostali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $u_1$, $u_2$. V dalším postupu budeme potřebovat nalézt neznámou $u_1$. Soustavu rovnic upravíme na tvar

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2), \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2). \end{aligned}$$

Dále druhou rovnici vydělíme první a upravíme

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2 - u_1^2}{v_1 - u_1} &= \frac{u_2^2 - v_2^2}{u_2 - v_2}, \\ v_1 + u_1 &= u_2 + v_2. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice vyjádříme $u_2 = v_1 + u_1 - v_2$.
Po dosazení za $u_2$ do první rovnice dostaneme

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2(v_1 + u_1 - v_2),$$

z čehož

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Změna kinetické energie

$$\Delta E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\left\{\left[\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}\right]^2 - v_1^2\right\}.$$

Nyní budeme pomocí derivace hledat, kdy bude změna kinetické energie první částice největší:

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta E_{\mathrm{k1}})}{\mathrm{d}v_1} = m_1\frac{m_1-m_2}{(m_1+m_2)^2}[(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2] - m_1v_1.$$

Po úpravě (je uvedena na CD ROMu) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta E_{\mathrm{k1}})}{\mathrm{d}v_1} = \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(2m_1v_1 - m_1v_2 + m_2v_2).$$

Nyní položíme první derivaci rovnou nule a vyjádříme $v_1$:

$$2m_1v_1 - m_1v_2 + m_2v_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{(m_1-m_2)v_2}{2m_1}.$$

Nakonec ještě pomocí druhé derivace ověříme, zda pro výše uvedené $v_1$ nastane skutečně lokální maximum:

$$\frac{\mathrm{d}^2(\Delta E_{\mathrm{k1}})}{\mathrm{d}v_1^2} = -\frac{4m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{nastalo lokální maximum.}$$

**Cvičení – dokonale nepružný ráz**

Dvě částice o hmotnostech $m_1$ a $m_2$ ($m_1 > m_2$) se pohybují po přímce rychlosti o velikostech $v_1$ a $v_2$ stejné orientace tak, že dojde k jejich nepružnému rázu (srážce). Ukažte, že nárůst kinetické energie částice o hmotnosti $m_1$ bude maximální, jestliže se před srážkou pohybovala rychlostí

$$v_{01} = \frac{m_1v_2}{2m_1+m_2}.$$

Při řešení předpokládejte, že ráz je dokonale nepružný.

**Řešení**

Naleznete na CD ROMu.

**Na přiloženém CD ROMu také naleznete další úlohy vedoucí k nutnosti hledat lokální extrémy funkcí. Kromě toho na CD ROMu také naleznete celou řadu úloh na lokální extrémy z předchozích ročníků FO.**

## Závěr

Tento studijní text si kladl za úkol seznámit vás se základy diferenciálního počtu ve fyzikálních úlohách v rozsahu pro úplné začátečníky. Vzhledem k tomu, že fyzikálních aplikací používajících diferenciální počet ke svému řešení je velké množství, umístili jsme ještě celou řadu úloh na přiložený CD ROM, kde je zadání úlohy – v případě, že byste si s řešením úlohy nevěděli rady, stačí kliknout na odkaz řešení. Na CD ROMu je k jednotlivým částem uveden také stručný teoretický výklad. CD ROM vám umožní samostatně se učit řešit úlohy z fyziky pomocí diferenciálního počtu. Řešení jsou uvedena podrobně se všemi patřičnými úpravami.

CD ROM dále také obsahuje další celky souvisejících velmi úzce s infinitezimálním počtem a pro získání všeobecného přehledu je zde také prezentace popisující vztah matematiky a fyziky z historického hlediska až po současnost.

Přejeme mnoho úspěchů a pěkné matematické a fyzikální zážitky při studiu těchto materiálů.

## Literatura


[1] Gillman, L. – Dowell, R.: *Matematická analýza.* SNTL, Praha, 1983.

[2] Kejla, F. a kol.: *Matematika pro SPŠ - III. díl* SNTL, Praha, 1955.

[3] Tarasov, N., P.: *Základy vyšší matematiky.* SNTL, Praha, 1954.

[4] Baník, I. – Baník, R. – Zámečník, J.: *Fyzika netradičně - mechanika.* Alfa, Bratislava, 1989.

[5] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* SPN, Praha, 1991.

[6] Ungermann, Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh.* SPN, Praha, 1990.

[7] CD ROM - Matematika a fyzika. (Příloha textu)