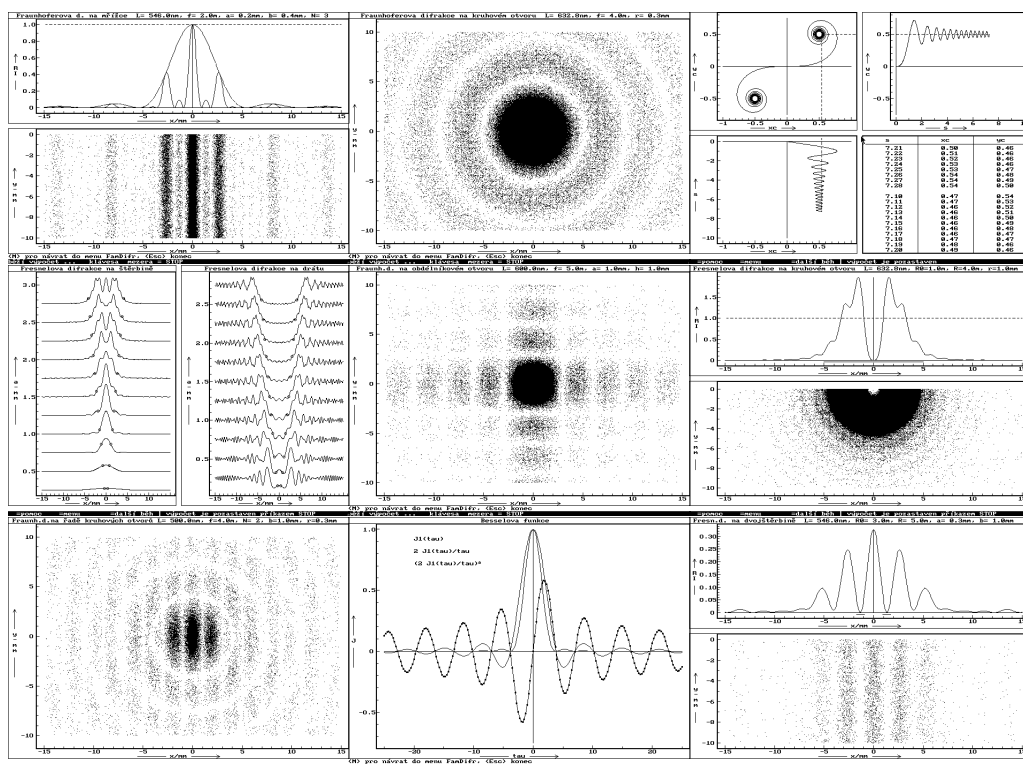


FamDifr

komplet programů pro Famulus 3.5
modelování optických difrakčních jevů



© Přemysl Šedivý, Miroslav Brož 1994
Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové

Vyrobeno ve spolupráci s firmou Famulus Etc.,
Weilova 2, areál Vltava, budova č.5, 102 05 Praha 10 – Hostivař.

Všechna práva vyhrazena.

Obsah

1	Charakteristika kompletu <i>FamDifr</i>	3
2	Instalace, spouštění a ovládání programového kompletu <i>FamDifr</i>	6
2.1	Pro ty, kdo se chtějí podrobněji seznámit s programy	6
3	Odvození fyzikálních vztahů a rozbor numerických metod	7
3.1	Charakteristika modelových situací. Fázor světelného kmitání	7
3.2	Použití Huygensova-Fresnelova principu	8
3.3	Výpočet relativní intenzity ozáření u Fresnelových difrakčních jevů	9
3.3.1	Cornuova spirála. Fresnelovy integrály	9
3.3.2	Posunutí vyšetřovaného bodu do středu stínítka. Výpočet intenzity ozáření ve středu stínítka	10
3.3.3	Fresnelova difrakce na obdélníkovém otvoru se středem v bodě O . Intenzita záření na stínítku před vložením překážky	12
3.3.4	Fresnelova difrakce na polovině	13
3.3.5	Fresnelova difrakce na šterbině a na drátu	14
3.3.6	Fresnelova difrakce na dvojšterbině	15
3.3.7	Praktický výpočet modelů Fresnelovy difrakce na lineárních překážkách v programovém kompletu <i>FamDifr</i>	15
3.3.8	Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru a kruhovém terčíku	17
3.3.9	Intenzita ozáření uprostřed stínítka při Fresnelově difrakci na kruhovém otvoru a kruhovém terčíku. Fresnelovy zóny	19
3.4	Výpočet relativní intenzity ozáření u Fraunhoferových difrakčních jevů	21
3.4.1	Fraunhoferova difrakce na obdélníkovém otvoru	22
3.4.2	Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru	23
3.4.3	Posunutí otvoru v rovině difrakční překážky. Fraunhoferova difrakce na N otvorech	26
3.4.4	Fraunhoferova difrakce na řadě stejných otvorů	27
3.4.5	Symetrie Fraunhoferových difrakčních jevů	29
3.4.6	Fraunhoferova difrakce na šterbině a na řadě rovnoběžných šterbin při použití šterbinového zdroje světla	30
A	Seznam souborů programového kompletu <i>FamDifr</i>	31
B	Výčet procedur a funkcí z knihoven	32
C	Difraktografické album	33

1 Charakteristika kompletu *FamDifr*

Programový komplet ***FamDifr*** slouží k modelování výsledků fyzikálních pokusů z vlnové optiky, při kterých demonstrujeme difrakci (ohyb) světla na různých překážkách. Počítačové modely mohou velmi dobře doplnit reálné difrakční pokusy prováděné v hodinách experimentální fyziky a v laboratorních cvičeních. Srovnáním modelů s výsledky pokusů ověříme přesvědčivě platnost fyzikálních zákonů, které difrakční jevy popisují. Komplet ***FamDifr*** může být ovšem použit i pro samostatné studium nebo opakování a procvičování učiva a pro přípravu různých studijních materiálů (obrázky jevů, grafy, tabulky).

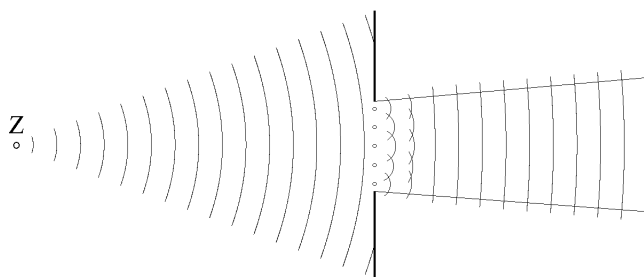
Modelované situace jsou jednoduché a modelům snadno porozumí i studenti středních škol. Výpočty modelů, které jsou podrobně popsány v třetí kapitole této příručky, však rámec střední školy poněkud překračují a předpokládají některé vysokoškolské znalosti z fyziky a matematiky (teorie elektromagnetického pole, komplexní symbolika pro popis kmitavých dějů, plošný integrál a jeho vyčíslení numerickými metodami). Třetí kapitola je tedy určena především učitelům fyziky a studentům s určitou matematickou přípravou.

Modelované difrakční jevy dělíme na *Fresnelovy* a *Fraunhoferovy*. Uživatel si může vybrat z následující nabídky:

Druh jevu	Překážka
Fresnelova difrakce (bodový nebo štěrbinový zdroj monochrom. světla)	polorovina štěrbina drát dvojštěrbina
Fresnelova difrakce (bodový monochrom. zdroj)	kruhový otvor kruhový terčik
Fraunhoferova difrakce (štěrbinový monochrom. zdroj)	štěrbina řada štěrbin
Fraunhoferova difrakce (bodový monochrom. zdroj)	obdélníkový otvor řada obdélníkových otvorů kruhový otvor řada kruhových otvorů kruhovité otvory na kružnici zvolené kruhové otvory
Fraunhoferova difrakce (štěrbinový složený zdroj)	štěrbina řada štěrbin

Před každým výpočtem se zadávají rozměry experimentální aparatury v mezích obvyklých při demonstračních pokusech. Vzdálenost stínítka od zdroje světla bývá několik metrů, rozměry difrakční překážky měříme v milimetrech. Zobrazovaná část stínítka je velká 30 krát 20 mm, je tedy o něco menší než políčko kinofilmu. Vlnovou délku světla volíme v intervalu (200 nm; 1000 nm). Některé jevy se dají modelovat i ve světle složeném ze tří monochromatických světél. Barva modelu na obrazovce počítače přibližně odpovídá barvě světla o zvolené vlnové délce (v případě infračerveného a ultrafialového světla je model černobílý).

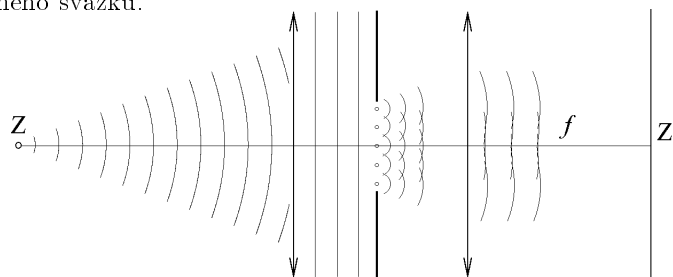
Fresnelova difrakce se demonstruje v uspořádání podle obr. 1-1. Mezi bodový zdroj světla a stínítko vložíme pouze difrakční překážku, jejíž šířka je malá v porovnání se vzdálenostmi překážky od zdroje a od stínítka. Pokud je překážkou polorovina, drát, štěrbinu nebo několik rovnoběžných štěrbin, můžeme použít i štěrbinový zdroj světla rovnoběžný s překážkou.



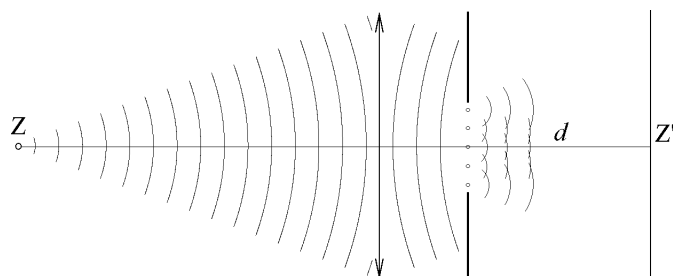
Obr. 1-1

Model Fresnelova difrakčního jevu zobrazuje graf relativní intenzity ozáření uprotřed stínítka a vzhled stínítka v oblasti geometrického stínu a jeho blízkého okolí. Hranice geometrického stínu je vyznačena na okraji modelu. Intenzita ozáření I v různých místech modelu je znázorněna tečkováním. Hustota teček závisí na relativní intenzitě ozáření I/I_0 , kde I_0 je intenzita ozáření stínítka před vložením překážky. Nejjasnější místa jsou "přeexponována".

Fraunhoferova difrakce se demonstruje v uspořádání podle obr. 1-2, kde na difrakční překážku dopadají rovinné vlnoplochy, nebo podle obr. 1-3, kde se difrakční překážka umísťuje do sbíhavého světelného svazku.



Obr. 1-2



Obr. 1-3

Pokud je ohnisková dálka f v prvním uspořádání stejná jako vzdálenost difrakční překážky od stínítka d v druhém uspořádání, je výsledný interferenční jev na stínítku v obou případech stejný. V programech kompletu **FamDifr** předpokládáme uspořádání podle obr. 1-2.

V modelech Fraunhoferovy difrakce je rozložení světelného záření dopadajícího na stínítko znázorněno (podle volby uživatele) *tečkováním* nebo *tónováním*. První způsob je vhodný u jednoduchých modelů, druhý použijeme u modelů složitějších s velkým počtem detailů.

Při Fraunhoferově difrakci naměříme největší intenzitu ozáření I_m uprostřed stínítka. Chceme-li v modelu zachytit i mnohem slabší vedlejší maxima interferenčního jevu, musíme relativní intenzitu ozáření I/I_m zobrazit až do hodnoty 10^{-5} .

Pokud znázorňujeme relativní intenzitu tečkováním, volíme hustotu teček úměrnou druhé odmocnině z relativní intenzity a celý model poněkud "přeexponujeme". Při tónování se vychází z logaritmické stupnice relativních intenzit ozáření.

Fraunhoferovu difrakci na šterbině a na řadě rovnoběžných šterbin můžeme modelovat i ve světle složeném ze tří monochromatických světél o vlnových délkách 430 nm, 540 nm a 650 nm. Relativní intenzita ozáření je u těchto modelů znázorněna pouze tečkováním, přičemž hustota teček je přímo úměrná relativní intenzitě ozáření a celý model je poněkud "přeexponovaný".

Programový komplet **FamDifr** vznikl přepracováním samostatného programu DIFRAKČNÍ JEVY (autoři Přemysl Šedivý a Vladimír Arnošt, dodává B&BjL Hradec Králové, Markovická 669). Nabídka modelovaných situací je stejná a také vzhled modelů je velmi podobný. Program Difrakční jevy lze použít samostatně a jeho předností je velká rychlost výpočtu ve srovnání s kompletem **FamDifr** a bohatší barevná paleta. Struktura programu je však pevně dána a použité algoritmy jsou před uživatelem skryty.

Naproti tomu **FamDifr** je komplet jednoduchých programů, které mohou být samostatně použity v systému Famulus. Jejich struktura je přístupná v editoru a může být uživatelem studována a případně i upravena podle jeho potřeb. Část kompletu je věnována popisu matematických funkcí použitých při výpočtech. **FamDifr** využívá všech možností, které Famulus poskytuje pro prohlížení modelů a grafů (transfokace, čtení hodnot z grafu pomocí záměrného kříže apod.) a pro jejich reprodukci pomocí tiskárny.

Program DIFRAKČNÍ JEVY a komplet **FamDifr** se vhodně doplňují.

2 Instalace, spouštění a ovládání programového kompletu *FamDifr*

Instalace programového kompletu je velice jednoduchá. Z distribuční diskety spustíte instalaci příkazem A:\INSTALL nebo B:\INSTALL. V instalačním programu zvolte disk a adresář, kde máte uložen Famulus, kde jsou uloženy knihovny a kam chcete programový komplet instalovat.

Programový komplet *FamDifr* můžete spustit jedním z následujících způsobů:

- Z příkazové řádky DOSu spustíte dávkový soubor FAMDIFR.BAT. Tento soubor je vhodné zkopírovat do adresáře, k němuž je nastavena cesta v souboru AUTOEXEC.BAT. Pak stačí jen napsat FAMDIFR a stisknout klávesu <Enter>.
- Ve Famulovi spustíte program MENU, který je součástí kompletu *FamDifr*. Ten Vám umožní spustit všechny ostatní programy (o spouštění modelů se více dozvíte v Příručce uživatele Famula).
- Ve Famulovi můžete spouštět jednotlivé programy modelující difrakční jevy. Jejich nabídka se objeví po stisku klávesy <F3>.

Po spuštění programu zadáte vlnovou délku světla, rozměry aparatury a další volby. Ná-pověda se zobrazuje na spodním řádku.

Graf číslo 1 ukazuje vzhled stínítka. Některé programy zobrazují i graf číslo 2, který znázorňuje rozložení relativní intenzity ozáření v ose x . U Fresnelových difrakčních jevů je pod osou x vyznačena žlutou barvou hranice geometrického stínu. Chcete-li zobrazit pouze graf číslo 1 nebo 2, přerušte výpočet stiskem <Esc> a z hlavního menu Famula zvolte jiné rozložení grafů na obrazovce.

U modelů Fresnelovy difrakce na kruhovém otvoru a terčiku trvá výpočet poměrně dlouho, proto je umožněno výsledky výpočtu pro dané zadání uložit a při dalším spuštění je načíst.

2.1 Pro ty, kdo se chtějí podrobněji seznámit s programy

Výpočet můžete kdykoliv přerušit stiskem klávesy <Esc>, stiskem klávesy <E> skočit do editoru a podívat se do programu. Ten je psán přehledně a s mnoha komentáři. Stlačené bloky můžete expandovat stiskem <Ctrl><E>.

Program modelující difrakční jev se skládá z několika částí, které obsahují:

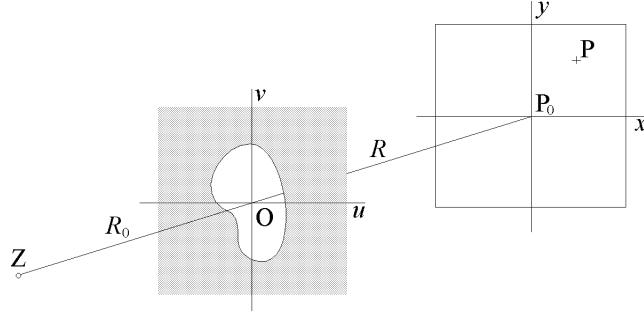
- název programu, pod kterým je uložen na disku, a stručnou charakteristiku
- volání potřebných knihoven, deklarace proměnných, polí a procedur
- dialog s uživatelem, načtení parametrů s ošetřením vstupních hodnot
- výpočet relativních intenzit a jejich uložení do pole
- zobrazení grafu relativní intenzity
- zobrazení vzhledu stínítka tečkováním nebo tónováním
- ukončení výpočtu zvukovým signálem a návrat do menu

V dodatku A je seznam souborů programového kompletu *FamDifr* se stručnou charakteristikou. Dodatek B obsahuje výčet procedur a funkcí z knihoven.

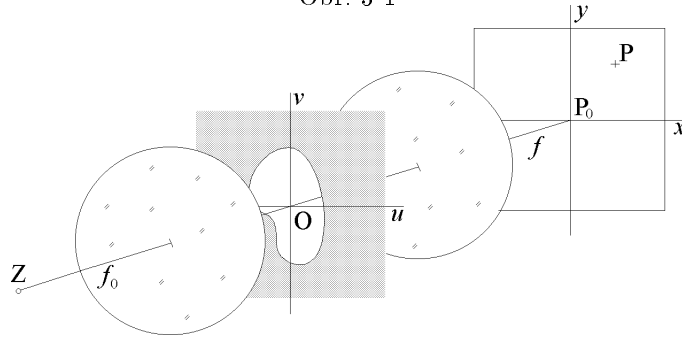
3 Odvození fyzikálních vztahů a rozbor numerických metod

3.1 Charakteristika modelových situací. Fázor světelného kmitání

Fresnelovy difrakční jevy demonstrujeme aparaturou uspořádanou podle obr. 3-1; u Fraunhoferových jevů budeme předpokládat uspořádání podle obr. 3-2.



Obr. 3-1



Obr. 3-2

V obou případech je spojnice monochromatického bodového zdroje Z se středem stínítka kolmá k rovině stínítka i k rovině difrakční překážky. Difrakční překážka je neprůhledná a její rozměry (např. šířka štěrby, poloměr kruhového terčíku) jsou velké v porovnání s vlnovou délkou světla a malé v porovnání se vzdálenostmi R_0 , R u difrakcí Fresnelových a s ohniskovými dálkami f_0 , f u difrakcí Fraunhoferových. V rovině stínítka zavedeme souřadnicovou soustavu P_0xy a v rovině difrakční překážky souřadnicovou soustavu Ouv .

Monochromatické světelné vlnění přicházející na stínítko přes difrakční překážku vyvolává ve zvoleném bodě $P = [x, y]$ stínítka harmonické elektromagnetické kmitání s elektrickou složkou o intenzitě $\mathbf{E}$ a k ní kolmou magnetickou složkou o intenzitě $\mathbf{H}$ (obr. 3-3). Pro jejich okamžité hodnoty platí

$$E = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E = A \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

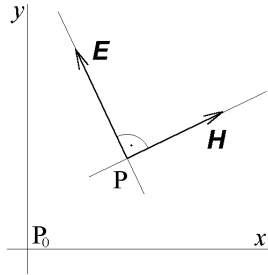
kde A je amplituda intenzity elektrického pole, ω je úhlová frekvence světelných kmitů a φ_0 je jejich počáteční fáze. Intenzita ozáření v daném místě stínítka je

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{A^2}{2}.$$

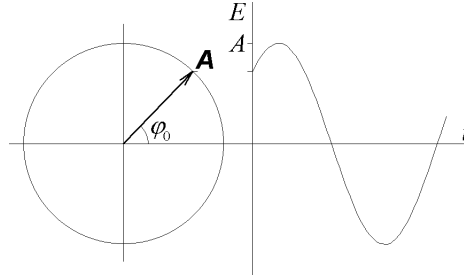
Kmitání intenzity elektrického pole můžeme v Gaussově rovině přiřadit fázor

$$\mathbf{A} = A e^{i\varphi_0} = A (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0),$$

jehož velikost je rovna amplitudě kmitů a argument je roven jejich počáteční fázi (obr. 3-4).



Obr. 3-3



Obr. 3-4

3.2 Použití Huygensova-Fresnelova principu

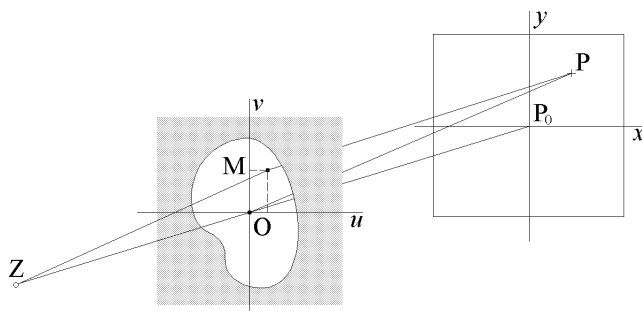
Podle Huygensova-Fresnelova principu:

1. Každá malá oblast o plošném obsahu dS v rovině difrakční překážky, která není difrakční překážkou zakryta, se chová jako samostatný elementární zdroj světelného vlnění, které dopadá na celé stínítko.
2. Amplituda kmitání vyvolaného tímto elementárním vlněním je stejná ve všech bodech stínítka (vzhledem k malým rozměrům stínítka). Je úměrná plošnému obsahu dS elementárního zdroje.
3. Výsledné kmitání ve vyšetřovaném bodě P stínítka vzniká složením všech elementárních kmitání, vyvolaných v tomto bodě působením elementárních vlnění přicházejících z elementárních zdrojů v rovině difrakční překážky. Tato elementární kmitání mají stejný směr.

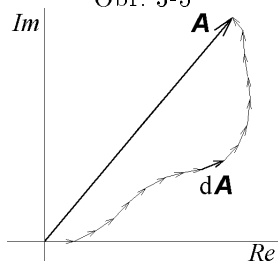
Pro zjednodušení výpočtu budeme předpokládat, že kmitání vyvolané v bodě P elementárním vlněním přicházejícím z okolí bodu O má nulovou počáteční fázi. Elementární vlnění přicházející z okolí dS bodu $M \neq O$ způsobí v bodě P kmitání, kterému přísluší elementární fázor

$$d\mathbf{A} = B e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta} dS.$$

Konstanta B závisí na použitém zdroji světla a na rozměrech experimentální aparatury. U Fraunhoferovy difrakce se uplatní i ztráty na čočkách. δ je dráhový rozdíl, o který je optická dráha ze zdroje přes bod M do bodu P kratší než optická dráha ze zdroje přes bod O do bodu P (obr. 3-5).



Obr. 3-5



Obr. 3-6

Fázor výsledného kmitání v bodě P je vektorovým součtem všech těchto elementárních fázorů (obr. 3-6). Vypočítáme jej integrací přes celou nezakrytou plochu S v rovině difrakční překážky

$$\mathbf{A} = B \iint_S e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta} dS.$$

3.3 Výpočet relativní intenzity ozáření u Fresnelových difrakčních jevů

3.3.1 Cornuova spirála. Fresnelovy integrály

U všech Fresnelových difrakcí použijeme integrál

$$\mathbf{z}_c(s) = \int_0^s e^{i \frac{\pi s^2}{2}} ds = x_c(s) + i y_c(s),$$

který můžeme interpretovat jako parametrické vyjádření Cornuovy spirály v Gaussově rovině (obr. 3-7). Fresnelovy integrály

$$x_c(s) = \int_0^s \cos \frac{\pi s^2}{2} ds, \quad y_c(s) = \int_0^s \sin \frac{\pi s^2}{2} ds$$

určují reálnou a imaginární souřadnici bodu $Z(s)$ spirály.

Cornuova spirála prochází počátkem soustavy souřadnic O_c a je podle něj středově souměrná. Absolutní hodnota parametru s je rovna délce oblouku měřené od bodu O_c , neboť

$$dx_c = \cos \frac{\pi s^2}{2} ds, \quad dy_c = \sin \frac{\pi s^2}{2} ds,$$

$$(dx_c)^2 + (dy_c)^2 = (ds)^2.$$

Úhel, který svírá tečna Cornuovy spirály v bodě $Z(s)$ s osou x_c , je

$$\alpha = \frac{\pi s^2}{2}, \quad \text{neboť} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy_c}{dx_c} = \operatorname{tg} \frac{\pi s^2}{2}.$$

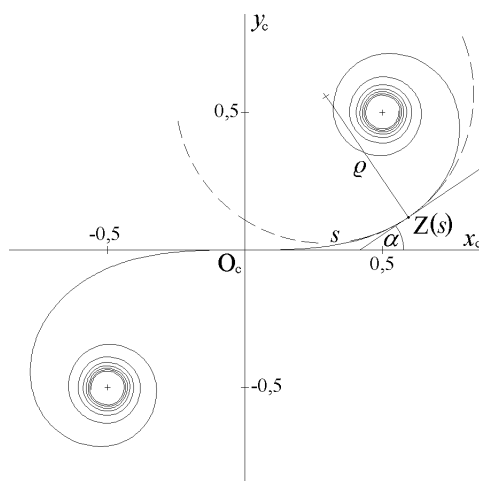
Poloměr ϱ oskulační kružnice v bodě $Z(s)$ je

$$\varrho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{ds}} = \frac{1}{\pi s}.$$

Asymptotické body Cornuovy spirály jsou

$$A_1 = \int_0^\infty \cos \frac{\pi s^2}{2} ds + i \int_0^\infty \sin \frac{\pi s^2}{2} ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad A_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Při vytváření modelu kterékoliv Fresnelovy difrakce musíme opakovaně použít Fresnelovy integrály $x_c(s)$, $y_c(s)$ pro různé hodnoty parametru s . Proto je výhodné nejprve připravit tabulku Fresnelových integrálů pro vhodný interval $\langle 0, s_{max} \rangle$.



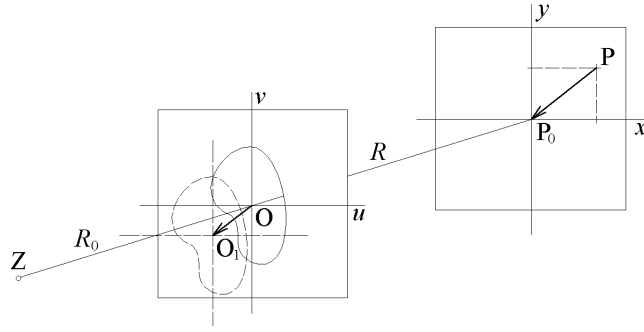
Obr. 3-7

3.3.2 Posunutí vyšetřovaného bodu do středu stínítka. Výpočet intenzity ozáření ve středu stínítka

Posuneme-li difrakční překážku v rovině Ouv , posune se stejným směrem i Fresnelův difrakční jev v rovině P_0xy . Posunutí difrakčního jevu je $(R_0 + R)/R_0$ krát větší než posunutí překážky. Intenzitu ozáření v bodě P stínítka můžeme tedy určit jako intenzitu, kterou bychom zjistili v bodě P_0 , kdybychom difrakční překážku posunuli o vektor

$$\vec{OO}_1 = \vec{PP}_0 \frac{R_0}{R_0 + R} \quad (\text{obr. 3-8}).$$

Takovýmto posunutím dosáhneme zjednodušení výpočtu intenzity ozáření.



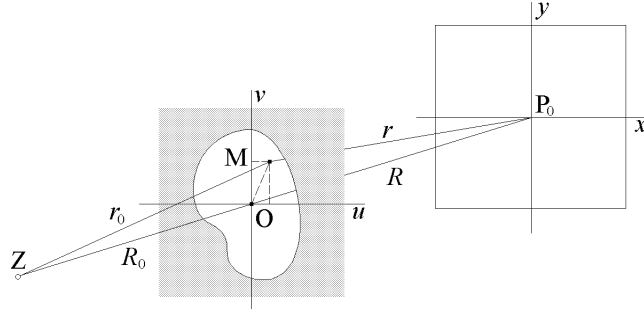
Obr. 3-8

Nejkratší optická dráha mezi zdrojem světla Z a bodem P_0 je $R_0 + R$ (obr. 3-9). Elementární vlnění, které do bodu P_0 přichází z okolí bodu $M = [u, v]$, má záporný dráhový rozdíl

$$\delta = R_0 + R - (r_0 + r) = R_0 + R - \sqrt{R_0^2 + u^2 + v^2} - \sqrt{R^2 + u^2 + v^2},$$

který můžeme aproximovat jako

$$\delta = -\left(\frac{u^2 + v^2}{2R_0} + \frac{u^2 + v^2}{2R}\right) = -\frac{(u^2 + v^2)(R_0 + R)}{2R_0 R}.$$



Obr. 3-9

Fázor výsledného kmitání v bodě P_0 určíme jako dvojný integrál

$$\mathbf{A} = B \iint_S e^{-i \frac{\pi(u^2 + v^2)(R_0 + R)}{\lambda R_0 R}} du dv.$$

Pokud je difrakční překážkou otvor ohraničený křivkami

$$v = v_1(u), \quad v = v_2(u) \quad \text{v intervalu } \langle u_1, u_2 \rangle,$$

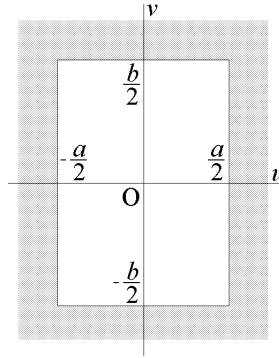
použijeme integrál

$$\mathbf{A} = B \int_{u_1}^{u_2} e^{-i \frac{\pi u^2 (R_0 + R)}{\lambda R_0 R}} \left[\int_{v_1(u)}^{v_2(u)} e^{-i \frac{\pi v^2 (R_0 + R)}{\lambda R_0 R}} dv \right] du.$$

3.3.3 Fresnelova difrakce na obdélníkovém otvoru se středem v bodě O . Intenzita záření na stínítku před vložením překážky

Je-li difrakční překážkou obdélníkový otvor o rozměrech a , b se středem v bodě O (obr. 3-10), definujeme

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{a}{2}, & u_2 &= \frac{a}{2}, \\ v_1(u) &= -\frac{b}{2} = \text{konst.}, \\ v_2(u) &= \frac{b}{2} = \text{konst.} \end{aligned}$$



Obr. 3-10

Fázor kmitání v bodě P_0 určíme jako integrál

$$\mathbf{A} = B \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i \frac{\pi u^2 (R_0 + R)}{\lambda R_0 R}} du \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i \frac{\pi v^2 (R_0 + R)}{\lambda R_0 R}} dv.$$

Zavedením substituce

$$s = Ku, \quad t = Kv, \quad s_1 = \frac{Ka}{2}, \quad t_1 = \frac{Kb}{2}, \quad K = \sqrt{\frac{2(R_0 + R)}{\lambda R_0 R}}$$

dostaneme

$$\mathbf{A} = \frac{B}{K^2} \int_{-s_1}^{s_1} e^{-i \frac{\pi s^2}{2}} ds \int_{-t_1}^{t_1} e^{-i \frac{\pi t^2}{2}} dt.$$

Tento výraz můžeme vyjádřit pomocí souřadnic bodů Cornuovy spirály

$$\mathbf{A} = \frac{4B}{K^2} [x_c(s_1) - iy_c(s_1)][x_c(t_1) - iy_c(t_1)].$$

Zvětšujeme-li oba rozměry obdélníka, zvětšují se i hodnoty parametrů s_1 , t_1 a výraz velmi rychle konverguje k mezní hodnotě

$$\mathbf{A}_0 = \frac{4B}{K^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)^2 = -\frac{2B}{K^2} i = -A_0 i,$$

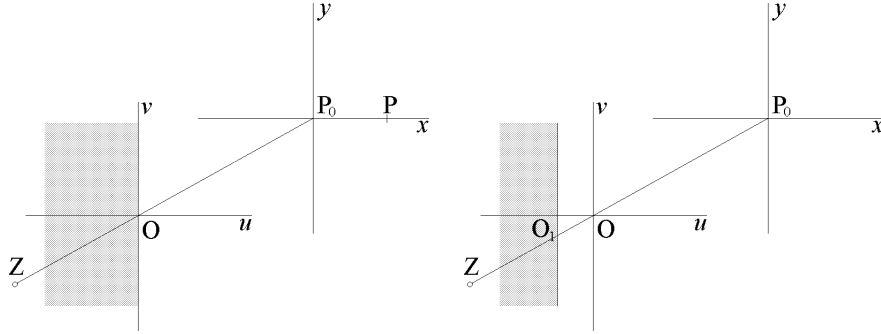
což je fázor kmitání v bodě P_0 před vložením difrakční překážky. Intenzita ozáření stínítka před vložením difrakční překážky je

$$I_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{A_0^2}{2} = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{B^2}{K^4}.$$

3.3.4 Fresnelova difrakce na polorovině

Zvolme jako difrakční překážku polorovinu v základní poloze, která zakrývá body, pro něž $u \leq 0$. Posunutím překážky ve směru osy v se situace nezmění. Intenzita ozáření stínítka proto závisí jen na souřadnici x vyšetřovaného bodu P . Zvolme $P = [x, 0]$. Pro zjednodušení výpočtu provedeme posunutí difrakční překážky podle obr. 3-11, při kterém bod O přejde do bodu $O_1 = [-u_1, 0]$,

$$u_1 = \frac{xR_0}{R_0 + R}.$$



Obr. 3-11

Tomu odpovídá v rovině stínítka posunutí bodu P do bodu P_0 , kde dostaneme

$$\mathbf{A} = B \int_{-u_1}^{\infty} e^{-i \frac{\pi u^2 (R_0 + R)}{\lambda R_0 R}} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{\pi v^2 (R_0 + R)}{\lambda R_0 R}} dv.$$

Zavedením substituce

$$s = Ku, \quad t = Kv, \quad s_1 = Ku_1, \quad \text{kde} \quad K = \sqrt{\frac{2(R_0 + R)}{\lambda R_0 R}},$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{B}{K^2} \int_{-s_1}^{\infty} e^{-i \frac{\pi s^2}{2}} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{\pi t^2}{2}} dt = \frac{B}{K^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-i \frac{\pi s^2}{2}} ds + \int_0^{s_1} e^{-i \frac{\pi s^2}{2}} ds \right] (1 - i) = \\ &= \frac{B(1 - i)}{K^2} \{0,5 + x_c(s_1) - i[0,5 + y_c(s_1)]\}. \end{aligned}$$

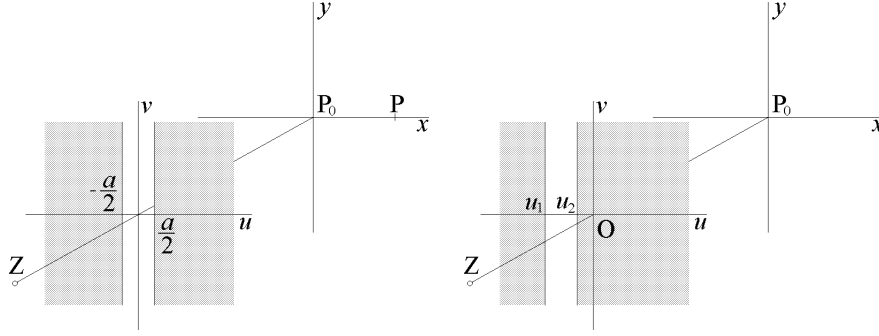
Relativní intenzita ozáření je

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{A^2}{A_0^2} = \frac{\left| \frac{B(1 - i)}{K^2} \right|^2 \{[0,5 + x_c(s_1)]^2 + [0,5 + y_c(s_1)]^2\}}{\left| \frac{2B i}{K^2} \right|^2}, \\ \frac{I}{I_0} &= \frac{[0,5 + x_c(s_1)]^2 + [0,5 + y_c(s_1)]^2}{2}. \end{aligned}$$

3.3.5 Fresnelova difrakce na štěrbině a na drátu

V základní poloze odkrývá štěrbinu o šířce a body v rovině Ouv , pro které $-\frac{a}{2} < u < \frac{a}{2}$. Vyšetřujeme relativní intenzitu ozáření v bodě $P = [x, 0]$ (obr. 3-12). Stejný výsledek dostaneme v bodě P_0 , posuneme-li štěrbinu tak, aby odkrývala body, pro které

$$-\frac{xR_0}{R_0 + R} - \frac{a}{2} = u_1 < u < u_2 = -\frac{xR_0}{R_0 + R} + \frac{a}{2}.$$



Obr. 3-12

Označme $s_1 = Ku_1$, $s_2 = Ku_2$. Pak

$$\mathbf{A} = \frac{B}{K^2} \int_{s_1}^{s_2} e^{-i\frac{\pi s^2}{2}} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi t^2}{2}} dt = \frac{B(1-i)}{K^2} \{x_c(s_2) - x_c(s_1) - i[y_c(s_2) - y_c(s_1)]\}.$$

Relativní intenzita ozáření je

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A_0^2} = \frac{\left| \frac{B(1-i)}{K^2} \right|^2 \{[x_c(s_2) - x_c(s_1)]^2 + [y_c(s_2) - y_c(s_1)]^2\}}{\left| \frac{2Bi}{K^2} \right|^2},$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[x_c(s_2) - x_c(s_1)]^2 + [y_c(s_2) - y_c(s_1)]^2}{2}.$$

Nahradíme-li štěrbinu drátem stejné tloušťky, jako je šířka štěrbin, dostaneme obdobným způsobem vztahy

$$\mathbf{A} = \frac{B}{K^2} \left[\int_{-\infty}^{s_1} e^{-i\frac{\pi s^2}{2}} ds + \int_{s_2}^{\infty} e^{-i\frac{\pi s^2}{2}} ds \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi t^2}{2}} dt,$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[1 - x_c(s_2) + x_c(s_1)]^2 + [1 - y_c(s_2) + y_c(s_1)]^2}{2}.$$

3.3.6 Fresnelova difrakce na dvojštěrbině

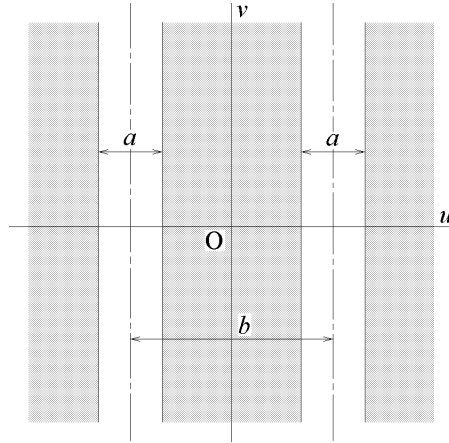
V základní poloze je dvojštěrbina umístěna souměrně podle osy v (obr. 3-13). Abychom posunuli bod P difrakčního jevu do bodu P_0 , změníme souřadnice dvojštěrbiny na

$$u_1 = -\frac{b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{xR_0}{R_0 + R}, \quad u_2 = -\frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{xR_0}{R_0 + R},$$

$$u_3 = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{xR_0}{R_0 + R}, \quad u_4 = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{xR_0}{R_0 + R}.$$

Označme $s_1 = Ku_1$, $s_2 = Ku_2$, $s_3 = Ku_3$, $s_4 = Ku_4$. Pak

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[x_c(s_4) - x_c(s_3) + x_c(s_2) - x_c(s_1)]^2 + [y_c(s_4) - y_c(s_3) + y_c(s_2) - y_c(s_1)]^2}{2}.$$



Obr. 3-13

3.3.7 Praktický výpočet modelů Fresnelovy difrakce na lineárních překážkách v programovém kompletu **FamDifr**

V programech se počítá rozložení relativní intezity ozáření na obdélníkové oblasti stínítka široké 30 mm a vysoké 20 mm. Reálné souřadnice bodu P na stínítku x, y jsou vázány k indexům pole X, Y (relativní souřadnice bodu modelu P' vzhledem ke středu obrazovky), v němž jsou uloženy hodnoty relativní intezity ozáření podle vztahů

$$x = 0,050\text{mm} \cdot X, \quad y = 0,050\text{mm} \cdot Y.$$

Posunutí bodu P v rovině stínítka o vzdálenost $\Delta x = 0,050\text{mm}$ odpovídá v rovině překážky posunutí

$$\Delta u = \Delta x \frac{R_0}{R_0 + R}$$

a na Cornuově spirále změna parametru

$$\Delta s = \Delta u K = \Delta u \sqrt{\frac{2(R_0 + R)}{\lambda R_0 R}} = 0,050 \text{ mm} \sqrt{\frac{2R_0}{\lambda R(R_0 + R)}}.$$

Při numerickém výpočtu tabulkových hodnot Fresnelových integrálů volíme krok čtyřikrát menší

$$Q = \frac{\Delta s}{4} = \frac{5 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{4} \sqrt{\frac{2R_0}{R(R_0 + R)\{L\} \cdot 10^{-9} \text{ m}}} = \sqrt{\frac{5\{R_0\}}{16\{L\}\{R\}(\{R_0\} + \{R\})}},$$

kde $\{L\}$ je číselná hodnota vlnové délky světla v nanometrech, $\{R\}, \{R_0\}$ jsou číselné hodnoty rozměrů aparatury v metrech.

Posloupnost tabulkových hodnot

$$C_x(n) = x_c(nQ), \quad C_y(n) = y_c(nQ), \quad n \in \langle 0; 2000 \rangle$$

počítáme podle rekurentních vzorců

$$C_x(0) = 0, \quad C_y(0) = 0$$

$$C_x(n+1) = C_x(n) + Q \cos(\pi Q^2(n+0,5)^2/2)$$

$$C_y(n+1) = C_y(n) + Q \sin(\pi Q^2(n+0,5)^2/2)$$

Tento výpočet provede procedura **Corn** z knihovny DIFR. Rozšíření tabulky pro záporné hodnoty indexu n provádíme pomocí funkcí **CornX** a **CornY**.

Má-li být výpočet tabulkových hodnot v celém intervalu dostatečně přesný, musí být krok Q menší než polovina poloměru oskulační kružnice v koncovém bodu vypočítaného úseku Cornuovy spirály. Pro $s_{max} = 2000Q$ dostáváme

$$Q < \frac{\varrho_{min}}{2} = \frac{1}{2\pi s_{max}} = \frac{1}{4000\pi Q}$$

$$Q < \frac{1}{\sqrt{4000\pi}} = 0,009$$

V programech jsou vstupní hodnoty L, R_0, R ošetřeny tak, aby $Q \leq 0,01$, neboli $s_{max} \leq 20$.

Při výpočtu relativní intenzity ozáření v bodě modelu P o relativní souřadnici X používáme následující vztahy ($\{a\}, \{b\}$ jsou číselné hodnoty šířky štěrbin, tloušťky drátu a vzdálenosti os štěrbin v milimetrech, funkce **trunc** je celá část čísla):

1. Difrakce na polorovině

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[\text{CornX}(4X) + 0,5]^2 + [\text{CornY}(4X) + 0,5]^2}{2}.$$

2. Difrakce na šterbině

$$N = \text{trunc} \left(10\{a\} \frac{R_0 + R}{R_0} + 0,5 \right), \quad N \leq 200,$$

$$J_1 = 4(X - N), \quad J_2 = 4(X + N),$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[\text{CornX}(J_2) - \text{CornX}(J_1)]^2 + [\text{CornY}(J_2) - \text{CornY}(J_1)]^2}{2}.$$

3. Difrakce na drátu

$$N = \text{trunc} \left(10\{a\} \frac{R_0 + R}{R_0} + 0,5 \right), \quad N \leq 200,$$

$$J_1 = 4(X - N), \quad J_2 = 4(X + N),$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[1 + \text{CornX}(J_1) - \text{CornX}(J_2)]^2 + [1 + \text{CornY}(J_1) - \text{CornY}(J_2)]^2}{2}.$$

4. Difrakce na dvojšterbině

$$N_1 = \text{trunc} \left[10(\{b\} + \{a\}) \frac{R_0 + R}{R_0} + 0,5 \right], \quad N_1 \leq 200,$$

$$N_2 = \text{trunc} \left[10(\{b\} - \{a\}) \frac{R_0 + R}{R_0} + 0,5 \right],$$

$$J_1 = 4(X - N_1), \quad J_2 = 4(X - N_2),$$

$$J_3 = 4(X + N_1), \quad J_4 = 4(X + N_2),$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[\text{CornX}(J_4) - \text{CornX}(J_3) + \text{CornX}(J_2) - \text{CornX}(J_1)]^2}{2} +$$

$$+ \frac{[\text{CornY}(J_4) - \text{CornY}(J_3) + \text{CornY}(J_2) - \text{CornY}(J_1)]^2}{2}.$$

3.3.8 Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru a kruhovém terčiku

Difrakční překážka ve tvaru kruhového otvoru o poloměru a má v základní poloze střed v bodě O a difrakční jev na stínítku je rotačně symetrický podle bodu P_0 . Relativní intenzitu ozáření budeme vyšetřovat v bodě $P_1 = [-x, 0]$ (obr. 3-14). Má-li se bod P_1 posunout do bodu P_0 , musíme střed překážky posunout do bodu $O_1 = [u_1, 0]$,

kde $u_1 = \frac{xR_0}{R_0 + R}$. Difrakční překážka je pak ohraničena půlkružnicemi, jejichž rovnice jsou

$$v_1(u) = -\sqrt{a^2 - (u - u_1)^2}, \quad v_2(u) = \sqrt{a^2 - (u - u_1)^2}, \quad u \in \langle u_1 - a, u_1 + a \rangle.$$

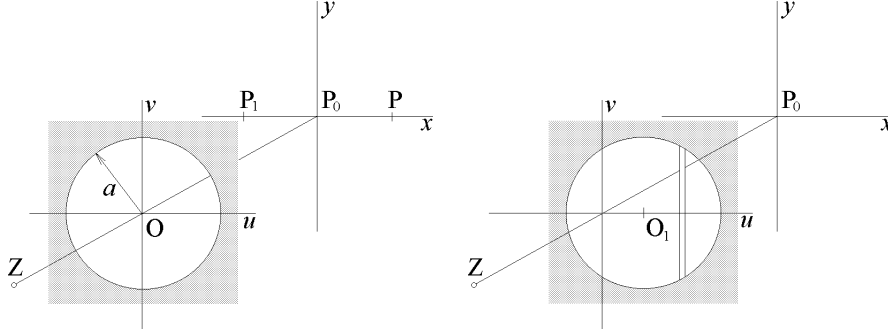
Označme

$$s_r = Ka, \quad s = Ku, \quad t = Kv_2(u), \quad s_1 = Ku_1.$$

Fázor kmitání určíme jako integrál

$$\mathbf{A} = \frac{B}{K^2} \int_{s_1 - s_r}^{s_1 + s_r} e^{-i \frac{\pi s^2}{2}} \left[2 \int_0^t e^{-i \frac{\pi t^2}{2}} dt \right] ds,$$

$$\mathbf{A} = \frac{B}{K^2} \int_{s_1 - s_r}^{s_1 + s_r} \left(\cos \frac{\pi s^2}{2} - i \sin \frac{\pi s^2}{2} \right) [x_c(t) - i y_c(t)] ds.$$



Obr. 3-14

V programech **FamDifr** dělíme otvor na 200 svislých pruhů a integrál nahrazujeme součtem

$$\mathbf{A} = \frac{2B}{K^2} \sum_{j=0}^{199} (\cos \beta - i \sin \beta) [C_x(T) - i C_y(T)] \frac{s_r}{100}$$

kde

$$\beta = \frac{\pi}{2} (s_1 + s)^2, \quad s_r = K a, \quad s_1 = 4QX, \quad s = s_r \left(\frac{J}{100} - 0,995 \right),$$

$$T = \text{trunc} \left(\frac{\sqrt{s_r^2 - s^2}}{Q} + 0,5 \right) \quad (\text{celočíslné zaokrouhlení}).$$

Po roznásobení dostáváme složky fázoru $\mathbf{A}$:

$$A_{re} = \frac{2R}{K^2} \sum_{j=0}^{199} \cdot \frac{s_r}{100} [C_x(T) \cos \beta - C_y(T) \sin \beta] = \frac{2B}{K^2} \Sigma_{re},$$

$$A_{im} = \frac{2R}{K^2} \sum_{j=0}^{199} \cdot \frac{s_r}{100} [-C_y(T) \cos \beta - C_x(T) \sin \beta] = \frac{2B}{K^2} \Sigma_{im}.$$

Před vložení difrakční překážky je fázor intenzity elektrického pole

$$\mathbf{A}_0 = -\frac{2B}{K^2} i.$$

Relativní intenzitu ozáření vypočítáme při Fresnelově difrakci na kruhovém otvoru pomocí vztahu

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A_0^2} = \Sigma_{re}^2 + \Sigma_{im}^2.$$

Nahradíme-li kruhový otvor kruhovým terčíkem, změní se podle *Babinetovy věty*¹ fázor intenzity elektrického pole na *fázor doplňkový do $\mathbf{A}_0$* :

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_0 - \mathbf{A} = \frac{2B}{K^2} [-\Sigma_{re} - i(\Sigma_{im} + 1)].$$

Při Fresnelově difrakci na kruhovém terčíku vypočítáme relativní intenzitu ozáření pomocí vztahu

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A_T^2}{A_0^2} = \Sigma_{re}^2 + (\Sigma_{im} + 1)^2.$$

Výpočet provedeme pro celočíselná X z intervalu $\langle 0; 375 \rangle$ a uložíme je do pole $\mathbf{F}[\]$. Hodnota $X = 375$ je relativní souřadnice bodu na vodorovné ose modelu, jehož vzdálenost od bodu P'_0 je stejná jako vzdálenost vrcholového bodu $[300; 150]$. Relativní intenzitu ozáření v bodě $P' = [X, Y]$ určíme jako

$$\frac{I}{I_0} = \mathbf{F}[D],$$

kde

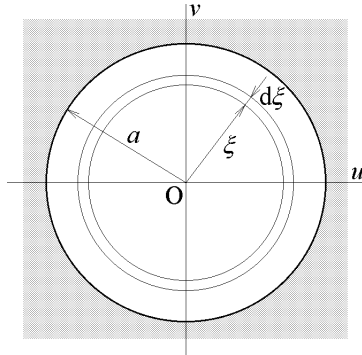
$$D = \text{trunc} \left(\sqrt{X^2 + Y^2} + 0,5 \right)$$

je vzdálenost $P'P'_0$ vyjádřená jako násobek vodorovné mezibodové vzdálenosti a zaokrouhlená na celé číslo.

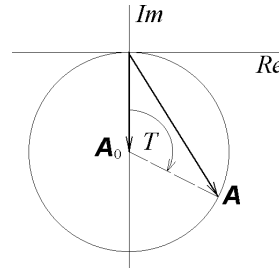
3.3.9 Intenzita ozáření uprostřed stínítka při Fresnelově difrakci na kruhovém otvoru a kruhovém terčíku. Fresnelovy zóny

Fázor výsledného kmitání v bodě P_0 při difrakci na kruhovém otvoru o poloměru a se středem v bodě O můžeme vypočítat způsobem naznačeným na obr. 3-15. Celý kruh rozdělíme na elementární světelné zdroje ve tvaru úzkých soustředných mezikruží o plošném obsahu

$$dS = 2\pi\xi d\xi.$$



Obr. 3-15



Obr. 3-16

¹Babinetovu větu můžeme formulovat takto: složením světelných kmitů, které v bodě P stínítka vzniknou při difrakci na určité překážce, a kmitů, které vzniknou při použití překážky komplementární, dostaneme kmity, které by v bodě P vznikly bez difrakční překážky. Komplementární překážky jsou například štěrbina a drát stejné velikosti nebo kruhový otvor a terčík téhož poloměru.

Elementární vlnění z takového zdroje přichází do bodu P_0 s dráhovým rozdílem

$$\delta = -\frac{\xi^2(R_0 + R)}{2R_0R}.$$

Fázor výsledného kmitání v bodě P_0 určíme jako integrál

$$\mathbf{A} = B \int_0^a 2\pi\xi e^{-i\frac{\pi\xi^2(R_0+R)}{\lambda R_0R}} d\xi.$$

Po substituci

$$t = \frac{\pi\xi^2(R_0 + R)}{\lambda R_0R}, \quad dt = 2\pi\xi \frac{R_0 + R}{\lambda R_0R} d\xi, \quad T = \frac{\pi a^2(R_0 + R)}{\lambda R_0R},$$

dostaneme

$$\mathbf{A} = \frac{B\lambda R_0R}{R_0 + R} \int_0^T e^{-i t} dt = \frac{2B}{K^2} \int_0^T e^{-i t} dt = i \frac{2B}{K^2} (e^{-i T} - 1) = A_0(\sin T - i \cos T - i).$$

Koncový bod fázoru $\mathbf{A}$ leží v Gaussově rovině na kružnici se středem v bodě $\mathbf{A}_0 = -i A_0$ a poloměrem A_0 (obr. 3-16). Zvětšujeme-li poloměr otvoru a při neměnných vzdálenostech R_0 a R , roste i úhel T a velikost fázoru $\mathbf{A}$ kolísá. Extrémní případy nastávají, jestliže

$$T = k\pi \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{\lambda R_0R}{R_0 + R}} \sqrt{k} = a_1 \sqrt{k}.$$

Pro k sudé je $A = 0$; intenzita ozáření uprostřed difrakčního jevu je nulová. Pro k liché platí

$$A = 2A_0, \quad \frac{I}{I_0} = \left(\frac{2A_0}{A_0}\right)^2 = 4;$$

intenzita ozáření v bodě P_0 je čtyřikrát větší než před vložením difrakční překážky.

Kružnice o poloměrech $a_k = a_1 \sqrt{k}$ vymezují v rovině difrakční překážky *Fresnelovy zóny* o stejném plošném obsahu (obr. 3-17). Poloměr první zóny a počet zón v otvoru o poloměru a určíme ze vztahů

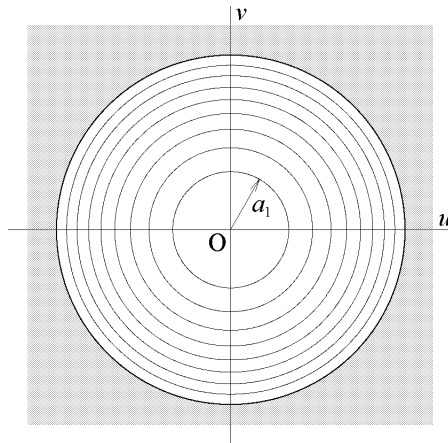
$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda R_0R}{R_0 + R}}, \quad N = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \frac{a^2(R_0 + R)}{\lambda R_0R}.$$

Z předchozích výpočtů plyne, že každá zóna samostatně vyvolá v bodě P_0 kmitání s fázorem o velikosti $2A_0$, ale účinek sousedních zón se v bodě P_0 ruší. Zakrytím sudých nebo lichých zón v otvoru bychom dostali *Fresnelovu čočku*, která by světelné kmitání v bodě P_0 mnohonásobně zesílila.

Za kruhovým terčíkem dostáváme v bodě P_0 doplňkový fázor kmitání

$$\mathbf{A}_T = i A_0 - A_0(\sin T - i \cos T - i) = A_0(-\sin T + i \cos T).$$

Jeho velikost $A_T = A_0$ nezávisí na úhlu T a tedy ani na poloměru terčíku a . Uprostřed difrakčního jevu za kruhovým terčíkem vzniká výrazné interferenční maximum, kde je intenzita ozáření stejná jako před vložením difrakční překážky.

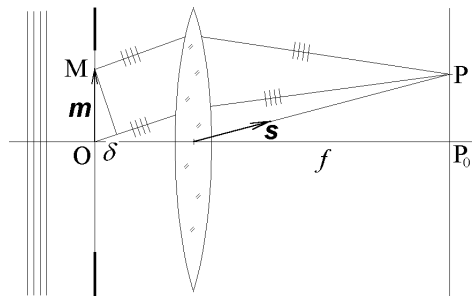


Obr. 3-17

3.4 Výpočet relativní intenzity ozáření u Fraunhoferových difrakčních jevů

V kompletu **FamDifr** předpokládáme takové uspořádání aparatury, při kterém na rovinu difrakční překážky dopadají rovinné vlnoplochy. Difrakční jev pozorujeme na stínítku v ohniskové rovině čočky umístěné za difrakční překážkou (obr. 3-18). Všechna místa v rovině difrakční překážky, která nejsou překážkou zakryta, se chovají jako koherentní světelné zdroje kmitající se stejnou fází. V bodě $P = [x, y]$ v rovině stínítka se setkávají ty části elementárních vlnění, které z jednotlivých elementárních zdrojů přicházejí na čočku ve směru určeném jednotkovým směrovým vektorem

$$\mathbf{s} = \frac{(x, y, f)}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}.$$



Obr. 3-18

Pro zjednodušení výpočtu přiřadíme nulovou počáteční fázi kmitání, které v bodě P vyvolává elementární vlnění přicházející z bodu $O = [0, 0]$ v rovině překážky. Elementární vlnění z bodu $M = [u, v]$ přichází do bodu P s dráhovým rozdílem, který je roven délce kolmého průmětu úsečky OM do směru $\mathbf{s}$

$$\delta = \mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = \frac{(u, v, 0)(x, y, f)}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} = \frac{ux + vy}{f}.$$

Fázor výsledného kmitání intenzity elektrického pole v bodě $P = [x, y]$ určíme jako integrál

$$\mathbf{A}(x, y) = B \iint_S e^{i \frac{2\pi\delta}{\lambda}} ds = B \iint_S e^{i G(xu+yv)} du dv, \quad \text{kde} \quad G = \frac{2\pi}{\lambda f}.$$

Uprostřed stínítka v bodě P_0 se všechna elementární vlnění setkávají se stejnou fází a výsledný fázor má velikost

$$|\mathbf{A}(0, 0)| = BS.$$

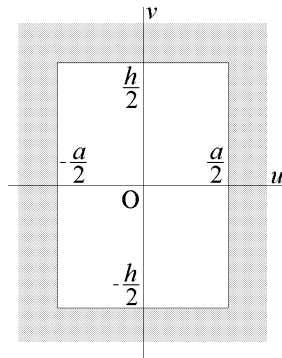
Zde je také maximální intenzita ozáření I_m . Relativní intenzita ozáření v bodě P je

$$\frac{I}{I_m} = \frac{|\mathbf{A}(x, y)|^2}{|\mathbf{A}(0, 0)|^2} = \frac{1}{S^2} \left| \iint_S e^{i G(xu+yv)} du dv \right|^2.$$

3.4.1 Fraunhoferova difrakce na obdélníkovém otvoru

Obdélníkový otvor šířky a a výšky h umístíme do základní polohy (obr. 3-19). Fázor kmitání v bodě $P = [x, y]$ určíme jako integrál

$$\mathbf{A}(x, y) = B \iint_S e^{i G(xu+yv)} du dv = B \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i Gxu} du \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{i Gyv} dv.$$



Obr. 3-19

Pro $x = y = 0$

$$\mathbf{A}(0, 0) = Bah,$$

jinak

$$\mathbf{A} = B \left[\frac{e^{i Gxu}}{i Gx} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{e^{i Gyv}}{i Gy} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{2 \sin \frac{Gax}{2}}{Gx} \cdot \frac{2 \sin \frac{Ghy}{2}}{Gy}.$$

Po substituci

$$\alpha = \frac{Gax}{2}, \quad \beta = \frac{Ghy}{2}$$

dostáváme

$$\mathbf{A}(x, y) = B a h \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta},$$

$$\frac{I}{I_m} = \frac{|\mathbf{A}(x, y)|^2}{|\mathbf{A}(0, 0)|^2} = \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2.$$

Relativní intenzita ozáření je vyjádřena jako součin dvou funkcí, z nichž první závisí jen na x a druhá jen na y . Průběh funkce $f(\alpha) = ((\sin(\alpha))/\alpha)^2$ ukazuje obr. 3-20. V kompletu **FamDifr** vypočítáme nejprve tyto funkce pro všechny relativní souřadnice z intervalů

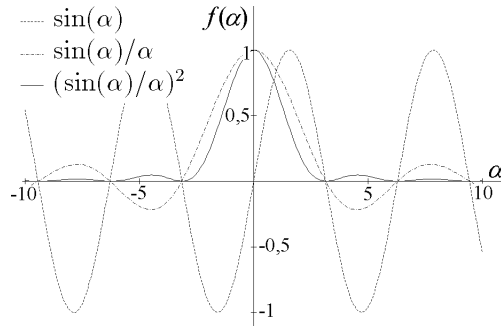
$$X \in \langle 0; 299 \rangle, \quad Y \in \langle 0; 199 \rangle$$

a hodnoty uložíme do polí $F_1[]$, $F_2[]$. Použijeme vztahy

$$F_1[X] = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad F_2[Y] = \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \alpha = \frac{50\pi\{a\}}{\{L\}\{f\}}X, \quad \beta = \frac{50\pi\{h\}}{\{L\}\{f\}}Y,$$

kde $\{L\}$ je číselná hodnota vlnové délky v nanometrech, $\{a\}$ je číselná hodnota šířky obdélníka v milimetrech, $\{h\}$ je číselná hodnota výšky obdélníka v milimetrech a $\{f\}$ je číselná hodnota ohniskové dálky čočky v metrech. Relativní intenzita ozáření v bodě $P' = [X, Y]$ modelu je

$$\frac{I}{I_m} = F_1[X] \cdot F_2[Y].$$

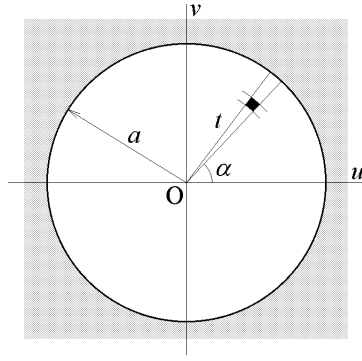


Obr. 3-20

3.4.2 Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru

Kruhový otvor o poloměru a umístíme do základní polohy se středem v bodě O a zavedeme polární souřadnice t , α (obr. 3-21). Platí

$$u = t \cos \alpha, \quad v = t \sin \alpha, \quad 0 < t < a, \quad 0 < \alpha < 2\pi.$$



Obr. 3-21

Relativní intenzitu ozáření budeme nejprve vyšetřovat v bodě $P = [x, 0]$. Fázor kmitání určíme jako integrál

$$\mathbf{A}(x, 0) = B \iint_S e^{i G x u} dS = B \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i G x t \cos \alpha} d\alpha t dt.$$

Po substituci

$$q = \frac{t^2}{a^2}, \quad dq = \frac{2t dt}{a^2}, \quad \tau = G a x$$

dostaneme

$$\mathbf{A}(x, 0) = \frac{B a^2}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i \tau \sqrt{q} \cos \alpha} d\alpha dq.$$

Integrovaný výraz rozvineme v mocninnou řadu:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, 0) = \frac{B a^2}{2} \int_0^1 dq \left[\int_0^{2\pi} d\alpha + \frac{i \tau \sqrt{q}}{1!} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha + \right. \\ \left. + \frac{(i \tau \sqrt{q})^2}{2!} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha + \dots + \frac{(i \tau \sqrt{q})^n}{n!} \int_0^{2\pi} \cos^n \alpha d\alpha + \dots \right]. \end{aligned}$$

Z rekurentního vztahu

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \alpha d\alpha = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} \alpha d\alpha$$

můžeme odvodit

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \alpha d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n} & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Po dosazení dostaneme

$$\mathbf{A}(x, 0) = Ba^2\pi \int_0^1 \left[1 - \frac{\tau^2 q}{2^2} + \frac{\tau^4 q^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\tau^6 q^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right] dq,$$

$$\mathbf{A}(x, 0) = Ba^2\pi \left[1 - \frac{\tau^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{\tau^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3} - \frac{\tau^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 4} + \dots \right].$$

Relativní intenzita ozáření v bodě P je

$$\frac{I}{I_m} = \left[1 - \frac{\tau^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{\tau^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3} - \frac{\tau^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 4} + \dots \right]^2 = \left[\frac{2J_1(\tau)}{\tau} \right]^2.$$

($J_1(\tau)$ je *Besselova funkce* prvního druhu, řádu 1. (obr. 3-22))

Hodnotu výrazu v závorce vypočítáme pro $\tau < 10$ nejrychleji jako součet nekonečné řady definované rekurentně

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -a_n \frac{\tau^2}{4n(n+1)}.$$

Výpočet ukončíme, když $|a_{n+1}| < 10^{-7}$.

V kompletu **FamDifr** vypočítáme nejprve relativní intenzitu ozáření pro body na ose X obrazovky s celočíselnou souřadnicí $X \in \langle 0; 375 \rangle$, kterým je hodnota τ přiřazena vztahem

$$\tau = \frac{100\pi\{a\}}{\{L\}\{f\}}X.$$

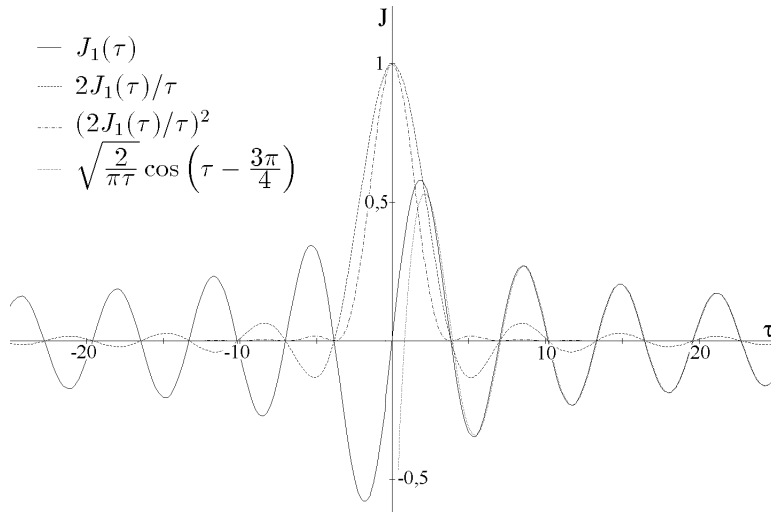
($\{a\}$ je číselná hodnota poloměru otvoru v milimetrech, $\{L\}$ je číselná hodnota vlnové délky v nanometrech a $\{f\}$ je číselná hodnota ohniskové dálky v metrech.)

Pro $\tau > 10$ dojdeme k dostatečně přesnému výsledku rychleji, použijeme-li aproximační vztah

$$J_1(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}} \cos\left(\tau - \frac{3\pi}{4}\right), \quad \text{takže} \quad \frac{I}{I_m} = \frac{8}{\pi\tau} \left[\frac{\cos\left(\tau - \frac{3\pi}{4}\right)}{\tau} \right]^2.$$

Volba poloměru otvoru je v programu omezena tak, aby platilo $\tau_{max} \leq 100$. Vypočítané hodnoty vložíme do pole $\mathbf{F}[\]$. Relativní intenzitu ozáření v bodě $P' = [X, Y]$ určíme jako

$$\frac{I}{I_m} = \mathbf{F}[D], \quad \text{kde} \quad D = \text{trunc}\left(\sqrt{X^2 + Y^2} + 0,5\right).$$



Obr. 3-22

3.4.3 Posunutí otvoru v rovině difrakční překážky. Fraunhoferova difrakce na N otvorech

Nechť je difrakční překážka tvořena jediným otvorem v základní poloze se středem v bodě O . Fázor elektrických kmitů v bodě $P = [x, y]$ označme $\mathbf{A}_0(x, y)$. Posuneme-li otvor v rovině Ouv tak, že jeho střed přejde do bodu $O_1 = [u_1, v_1]$, změní se optické dráhy mezi elementárními zdroji světla v otvoru a bodem P o tutéž hodnotu

$$\delta_1 = \overrightarrow{OO_1} \cdot \mathbf{s} = \frac{u_1 x + v_1 y}{f}.$$

Všechny elementární fázory se pootočí o úhel

$$\frac{2\pi\delta_1}{\lambda} = G(u_1 x + v_1 y)$$

a s nimi i výsledný fázor

$$\mathbf{A}_1(x, y) = \mathbf{A}_0(x, y) e^{i G(u_1 x + v_1 y)}.$$

Velikost fázoru a intenzita vlnění v bodě P se tím ovšem nezmění. U Fraunhoferovy difrakce nemá posunutí difrakční překážky v rovině Ouv vliv na vzhled difrakčního jevu.

Tvoří-li difrakční překážku N stejných nepřekrývajících se otvorů, je fázor výsledného kmitání v bodě $P = [x, y]$ určen součtem

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y) &= \mathbf{A}_0(x, y) \sum_{k=1}^N e^{i G(u_k x + v_k y)} = \\ &= \mathbf{A}_0(x, y) \left[\sum_{k=1}^N \cos[G(u_k x + v_k y)] + i \sum_{k=1}^N \sin[G(u_k x + v_k y)] \right]. \end{aligned}$$

V bodě $P_0 = [0, 0]$ dostaneme fázor $\mathbf{A}(0, 0) = N \mathbf{A}_0(0, 0)$. Relativní intenzita ozáření v bodě P

$$\frac{I}{I_m} = \left| \frac{\mathbf{A}_0(x, y)}{\mathbf{A}_0(0, 0)} \right|^2 \cdot \frac{\left[\sum_{k=1}^N \cos[G(u_k x + v_k y)] \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^N \sin[G(u_k x + v_k y)] \right]^2}{N^2}$$

je součinem dvou funkcí, z nichž první představuje relativní ozáření při difrakci na jednom otvoru. Druhá funkce nezávisí na tvaru otvorů, ale jen na rozmístění otvorů v rovině difrakční překážky. Při pravidelném uspořádání otvorů vede ke vzniku zajímavých interferenčních obrazců.

3.4.4 Fraunhoferova difrakce na řadě stejných otvorů

Řadu stejných obdélníkových nebo kruhových otvorů umístíme podél osy u tak, že pro souřadnice jejich středů platí

$$u_1 = 0, \quad u_2 = b, \quad u_3 = 2b, \dots, u_N = (N-1)b.$$

V takovém případě

$$\sum_{k=1}^N e^{i G(u_k x + v_k y)} = \sum_{k=1}^N e^{i (k-1) G b x} = \sum_{k=1}^N e^{i 2(k-1) \Omega},$$

kde

$$\Omega = \frac{G b x}{2}.$$

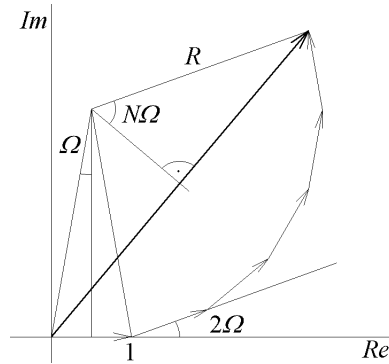
Tento součet komplexních jednotek je v *Gaussově rovině* zobrazen lomenou čarou (obr. 3-23), jejíž vrcholy leží na kružnici o poloměru

$$R = \frac{1}{2|\sin \Omega|}.$$

Výsledné komplexní číslo má pro $\Omega \neq k\pi$ absolutní hodnotu

$$2R|\sin(N\Omega)| = \left| \frac{\sin(N\Omega)}{\sin \Omega} \right|.$$

Pro $\Omega = k\pi$ je součet N .



Obr. 3-23

Relativní intenzitu ozáření při Fraunhoferově difrakci **na řadě obdélníkových otvorů** vypočítáme pomocí vztahu

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\Omega)}{N \sin \Omega} \right]^2.$$

(Pokud $\alpha = 0$, $\beta = 0$ nebo $\Omega = k\pi$, je příslušný činitel roven jedné.) V kompletu **FamDifr** počítáme nejprve pro $X \in \langle 0; 299 \rangle$ funkci

$$F_1[X] = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\Omega)}{N \sin \Omega} \right]^2,$$

kterou uložíme do pole $F_1[]$, a pro $Y \in \langle 0; 199 \rangle$ počítáme funkci

$$F_2[Y] = \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2,$$

kterou uložíme do pole $F_2[]$. Přitom

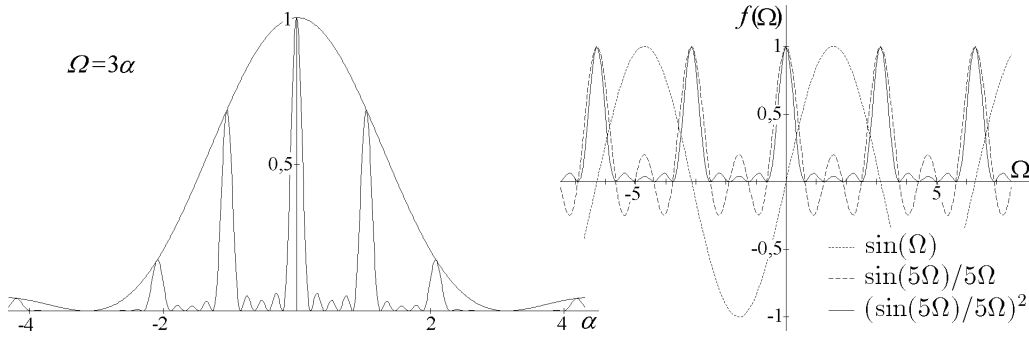
$$\alpha = \frac{50\pi\{a\}}{\{L\}\{f\}}X, \quad \Omega = \frac{50\pi\{b\}}{\{L\}\{f\}}X, \quad \beta = \frac{50\pi\{h\}}{\{L\}\{f\}}Y,$$

kde $\{L\}$ je číselná hodnota vlnové délky v nanometrech, $\{a\}$ je číselná hodnota šířky obdélníka v milimetrech, $\{h\}$ je číselná hodnota výšky obdélníka v milimetrech, $\{b\}$ je číselná hodnota vzdálenosti středů otvorů v milimetrech a $\{f\}$ je číselná hodnota ohniskové dálky čočky v metrech.

Relativní intenzitu ozáření v bodě $P' = [X, Y]$ vypočítáme jako součin

$$\frac{I}{I_m} = F_1[X] \cdot F_2[Y].$$

Průběh relativní intenzity podél osy x v případě $\Omega = 3\alpha$ vysvětluje obr. 3-24.



Obr. 3-24

Relativní intenzitu ozáření při difrakci **na řadě kruhových otvorů** určíme v kompletu **FamDifr** s užitím předchozích postupů jako

$$\frac{I}{I_m} = F_1[X] \cdot F[D],$$

kde

$$\Omega = \frac{50\pi\{b\}}{\{L\}\{f\}}X \quad F_1[X] = \begin{cases} \left[\frac{\sin(N\Omega)}{N \sin \Omega} \right]^2 & \text{pro } \Omega \neq k\pi \\ 1 & \text{pro } \Omega = k\pi \end{cases}$$

$$D = \text{trunc} \left(\sqrt{X^2 + Y^2} + 0,5 \right), \quad \tau = \frac{100\pi\{a\}}{\{L\}\{f\}}X.$$

$$F[D] = \left[1 - \frac{\tau^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{\tau^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3} - \frac{\tau^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 4} + \dots \right]^2.$$

($\{a\}$ je číselná hodnota poloměru otvoru v milimetrech, $\{b\}$ je číselná hodnota vzdálenosti středů sousedních otvorů v milimetrech, $\{L\}$ je číselná hodnota vlnové délky v nanometrech a $\{f\}$ je číselná hodnota ohniskové dálky v metrech.)

3.4.5 Symetrie Fraunhoferových difrakčních jevů

Aparatura, pomocí které demonstrujeme Fraunhoferovy difrakční jevy, je rotačně symetrická podle osy OP_0 . Sama proto neovlivňuje symetrii difrakčního jevu. Na difrakční jev se přenáší především symetrie difrakční překážky. Difrakce na kruhovém otvoru je rotačně symetrická podle bodu P_0 ; difrakce na obdélníkovém otvoru s osami u , v je osově symetrická podle os x , y a středově symetrická podle bodu P_0 .

Středová symetrie podle bodu P_0 vzniká však i za překážkami, které samy středově symetrické nejsou, protože

$$\left[\sum_{k=1}^N \cos[G(u_k x + v_k y)] \right]^2 = \left[\sum_{k=1}^N \cos\{G[u_k(-x) + v_k(-y)]\} \right]^2,$$

$$\left[\sum_{k=1}^N \sin[G(u_k x + v_k y)] \right]^2 = \left[\sum_{k=1}^N \sin\{G[u_k(-x) + v_k(-y)]\} \right]^2.$$

To má za důsledek zvýšení četnosti symetrie difrakčních jevů u difrakčních překážek s lichochetnou symetrií. (Např. lichý počet kruhových otvorů umístěných na kružnici.) U těchto objektů je četnost symetrie difrakčního jevu dvakrát větší než četnost symetrie překážky.

Je-li difrakční překážka středově symetrická podle bodu O , je výraz

$$\sum_{k=1}^N \cos[G(u_k x + v_k y)] + i \sum_{k=1}^N \sin[G(u_k x + v_k y)]$$

reálný, protože

$$\sin[G(u_k x + v_k y)] = -\sin\{G[(-u_k)x + (-v_k)y]\}.$$

Za středově souměrnou difrakční překážkou vzniká výrazný difrakční obrazec protkaný sítí čar s nulovou intenzitou ozáření. Tyto čáry jsou řešením rovnice

$$\sum_{k=1}^N \cos[G(u_k x + v_k y)] = 0.$$

Pokud není difrakční překážka středově symetrická, vznikají v difrakčním jevu jen osamocené body s nulovou intenzitou ozáření.

Využitím symetrie při počítačovém modelování difrakčního jevu můžeme podstatně zkrátit dobu výpočtu.

3.4.6 Fraunhoferova difrakce na štěrbině a na řadě rovnoběžných štěrbin při použití štěrbinového zdroje světla

Jako difrakční překážku použijeme dlouhou štěrbinu rovnoběžnou s osou v nebo řadu štěrbin rovnoběžných s osou v (mřížku). Bodový zdroj světla nahradíme zdrojem štěrbinovým, rovněž rovnoběžným s osou v . V těchto případech závisí intenzita ozáření bodů na stínítku pouze na jejich souřadnici x . Platí podobné vztahy jako při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru nebo na řadě obdélníkových otvorů. U štěrbin je průběh relativní intenzity ozáření popsán *štěrbinovou funkcí*.

$$\frac{I}{I_m} = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{50\pi\{a\}}{\{L\}\{f\}}X$$

U mřížky použijeme součin štěrbinové funkce a *mřížkové funkce*.

$$\frac{I}{I_m} = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\Omega)}{N\Omega} \right]^2, \quad \Omega = \frac{50\pi\{b\}}{\{L\}\{f\}}X,$$

$\{a\}$ je číselná hodnota poloměru otvoru v milimetrech, $\{b\}$ je číselná hodnota vzdálenosti středů sousedních otvorů v milimetrech, $\{L\}$ je číselná hodnota vlnové délky v nanometrech a $\{f\}$ je číselná hodnota ohniskové délky v metrech.

Průběh štěrbinové funkce ukazuje obr. 3-20, mřížková funkce pro $N = 5$ je na obr. 3-24.

Dodatky

A Seznam souborů programového kompletu *FamDifr*

DIFR.FML	-	základní knihovna pro komplet <i>FamDifr</i> (výpočet Cornuovy spirály, Besselovy funkce, nastavení barev, grafů)
GRAF3D.FML	-	knihovna pro vykreslení dvojrozměrného pole do 3D grafu (škálování, stínování)
DIFR_A.FM	-	Fresnelova difrakce na polorovině
DIFR_B.FM	-	Fresnelova difrakce na štěrbině
DIFR_C.FM	-	Fresnelova difrakce na drátu
DIFR_D.FM	-	Fresnelova difrakce na dvojštěrbině
DIFR_E.FM	-	Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru
DIFR_F.FM	-	Fresnelova difrakce na kruhovém terčíku
DIFR_G.FM	-	Fraunhoferova difrakce na štěrbině
DIFR_H.FM	-	Fraunhoferova difrakce na řadě štěrbin
DIFR_I.FM	-	Fraunhoferova difrakce na obdélníkovém otvoru
DIFR_J.FM	-	Fraunhoferova difrakce na řadě obdélníkových otvorů
DIFR_K.FM	-	Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru
DIFR_L.FM	-	Fraunhoferova difrakce na řadě kruhových otvorů
DIFR_M.FM	-	Fraunhoferova difrakce na kruhových otvorech na kružnici
DIFR_N.FM	-	Fraunhoferova difrakce na zvolených kruhových otvorech
DIFR_O.FM	-	Fraunhoferova difrakce na štěrbině s trojbarevným zdrojem
DIFR_P.FM	-	Fraunhoferova difrakce na řadě štěrbin s trojbarevným zdrojem
DIFR_3DE.FM	-	Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru - 3D graf
DIFR_3DF.FM	-	Fresnelova difrakce na kruhovém terčíku - 3D graf
DIFR_3DK.FM	-	Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru - 3D graf
DIFR_3DL.FM	-	Fraunhoferova difrakce na řadě kruhových otvorů - 3D graf
DIFR_VBC.FM	-	Fresnelova difrakce na štěrbinách a drátech různé velikosti
CORN.FM	-	vykreslení Cornuovy spirály - klotoidy
BESSEL.FM	-	výpočet Besselovy funkce
FUNKCE_S.FM	-	zobrazení štěrbinové funkce
FUNKCE_M.FM	-	zobrazení mřížkové funkce
INFO.FM	-	informace o difrakčních jevech (odpovídá 1. kapitole příručky)
MENU.FM	-	volání ostatních programů z přehledných nabídek
DIFR_E1.DAT	-	Fresnelova difrakce na kruh.otvoru - vypočtené rel. intenzity
DIFR_E2.DAT	-	Fresnelova difrakce na kruh.otvoru - vypočtené rel. intenzity
DIFR_F1.DAT	-	Fresnelova difrakce na kruh.terčíku - vypočtené rel. intenzity
CTI.MNE	-	poznámky ke spouštění
SOUBORY.FMN	-	seznam souborů programového kompletu <i>FamDifr</i>

B Výčet procedur a funkcí z knihoven

Knihovna DIFR obsahuje základní konstanty, funkce a procedury, které jsou využívány v programech. Slouží také k inicializaci grafiky. Popis procedur a funkcí je k dispozici v knihovně.

```
PROCEDURE Corn(REAL L,R0,R);  
REAL FUNCTION CornX(INT n);  
REAL FUNCTION CornY(INT n);  
PROCEDURE Bessel(REAL L,f,a);  
PROCEDURE NastavBarvy(REAL L,VAR INT Barva1,Barva2);
```

Knihovna GRAF3D obsahuje procedury pro zobrazení dvojrozměrného pole do třírozměrného grafu. Pro popis grafu a škálování os je využita knihovna SCALEAX, která je standartně dodávána s Famulem. Bližší popis procedur je k dispozici v samotné knihovně.

```
PROCEDURE SetGraph3D( INT GrNo );  
PROCEDURE SetColor3D( INT Color1,Color2 );  
PROCEDURE SetBox3D( x,y,z );  
PROCEDURE SetView3D( azimuth,vyska );  
PROCEDURE SetLight3D( azimuth_svetla,vyska_svetla );  
PROCEDURE SetShadow3D( INT MinRastr,MaxRastr );  
PROCEDURE SetScale3D( BOOLEAN skalovat );  
PROCEDURE SetAxis3D( INT Color,Font, CHAR nadpisx[],nadpisy[],nadpiz[] );  
PROCEDURE Array3D( z[i=mini TO maxi,j=minj TO maxj],minx,maxx,miny,maxy );
```