Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s parabolou

Miroslava Jarešová, PedF UHK Hradec Králové,
Jaroslav Zhouf, PedF UK Praha

Při řešení úloh z fyziky se v mnoha případech můžeme setkat s různými kuželosečkami. Asi nejčastěji se vyskytující kuželosečkou je parabola. My si v tomto textu takové tři náročnější úlohy, kde se vyskytuje parabola (nebo její část), ukážeme.

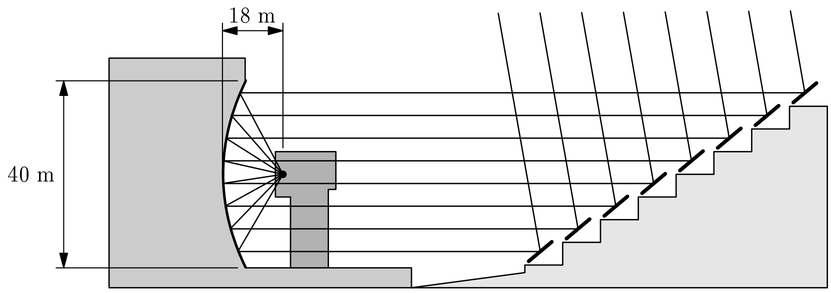
První úloha se týká určení normály a tečny paraboly.

1. Sluneční pec

Ve francouzských Pyrenejích v městečku Odeillo pracuje největší a nejvýkonnější sluncem vytápěná tavicí pec na světě. Úkolem zařízení je dosahovat nejvyšších tavicích teplot (až 3 800 °C), aniž by se materiály během tavení znečistily. Komplex tvoří obrovské parabolické zrcadlo o ohniskové vzdálenosti $f = 18$ m. Do něj vstupují paprsky dalších 63 otočných zrcadel (heliostarů) řízených počítačem. Na energii extrémně bohatý svazek světelných a tepelných paprsků dopadajících na pec dokáže během jedné minuty roztavit desku o průměru 30 cm o centimetrové tloušťce a počáteční teplotě 20 °C.

a) Dokažte, že všechny paprsky rovnoběžné s optickou osou zrcadla jsou koncentrovány do ohniska zrcadla umístěného v tavicí peci (obr. 1).

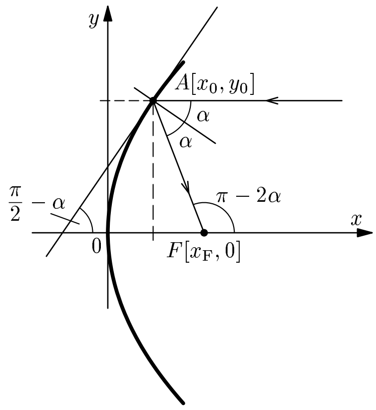
b) Parabolické zrcadlo nahradíme kulovým o poloměru $R = 2f$ tak, aby vrcholy obou zrcadel byly totožné. Poloměr podstavy kulového vrchlíku vymezeného zrcadlem bude 20 m. Určete interval na optické ose zrcadla, ve kterém paprsky odražené kulovým zrcadlem protínají optickou osu. Vysvětlete, proč není možno parabolické zrcadlo nahradit kulovým.



Obr. 1

Řešení:

a) Budeme uvažovat, že na parabolické zrcadlo dopadá soustava paprsků rovnoběžných s optickou osou. Chceme ukázat, že všechny tyto paprsky se po odrazu protínají v jednom bodě – ohnisku. Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby vrchol parabolického zrcadla byl v počátku soustavy souřadnic a jeho osa splývala s osou x (obr. 1). Nechť libovolný paprsek rovnoběžný s optickou osou dopadne na zrcadlo v bodě $A[x_0, y_0]$. Rovnice zrcadla je dána vztahem



Obr. 2

$$y^2 = 2px = 4fx. \qquad (1)$$

Rovnice paprsku dopadajícího na zrcadlo je

$$y = y_0.$$

Rovnice odraženého paprsku je

$$y - y_0 = \mathrm{tg}(\pi - 2\alpha) \cdot (x - x_0) \qquad (2)$$

a jeho průsečík s osou x dostaneme tak, že v rovnosti (2) položíme $y = 0$. Potom

$$x = -\frac{y_0}{\mathrm{tg}(\pi - 2\alpha)} + x_0 = \frac{y_0}{\mathrm{tg}\,2\alpha} + x_0. \qquad (3)$$

Dále použijeme součtový vzorec $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$. Po dosazení tohoto vzorce do rovnosti (1) dostaneme

$$x = \frac{y_0(1 - \mathrm{tg}^2\alpha)}{2\mathrm{tg}\,\alpha} + x_0. \qquad (4)$$

Z analytické geometrie víme, že rovnice tečny paraboly (1) v bodě $A[x_0, y_0]$ je dána vztahem

$$y_0 y = p(x + x_0) = 2f(x + x_0),$$

z čehož

$$y = \frac{2f}{y_0}x + \frac{2fx_0}{y_0}.$$

Odsud vidíme, že směrnice tečny je $k = \frac{2f}{y_0}$. Podle obr. 2 tedy platí, že

$$k = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{cotg}\,\alpha.$$

Protože bod $[x_0, y_0]$ leží na parabole, dostaneme po jeho dosazení do rovnice paraboly vztah

$$y_0^2 = 4fx_0,$$

z čehož

$$y_0 = 2\sqrt{fx_0}.$$

Nyní toto y_0 dosadíme do vztahu pro směrnici k:

$$k = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{2f}{2\sqrt{fx_0}} = \sqrt{\frac{f}{x_0}}.$$

Dále pak použitím vztahu $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ je

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\frac{f}{x_0}},$$

z čehož[1] $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{x_0}{f}}$.

Tento vztah nyní můžeme dosadit do rovnosti (4) a obdržíme

$$x = \frac{y_0\left(1 - \frac{x_0}{f}\right)}{2\sqrt{\frac{x_0}{f}}} + x_0 = \frac{y_0\left(1 - \frac{x_0}{f}\right)}{2\sqrt{\frac{y_0^2}{4f}\cdot\frac{1}{f}}} + x_0 = \frac{y_0\left(1 - \frac{x_0}{f}\right)}{\frac{y_0}{f}} + x_0.$$

Po odstranění složeného zlomku a dalších úpravách nakonec dostaneme

$$x = f\left(1 - \frac{x_0}{f}\right) + x_0 = f.$$

Výše uvedeným postupem jsme dokázali, že když na parabole zvolíme libovolně bod $A[x_0, y_0]$, pak všechny paprsky rovnoběžné s osou x dopadající na parabolické zrcadlo se protnou v ohnisku.

b) Parabolické zrcadlo nahradíme kulovým (obr. 3). Opět budeme uvažovat, že na zrcadlo dopadá svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou. Určíme polohu x_P průsečíku P libovolného paprsku s optickou osou.

Ze sinové věty pro trojúhelník APS postupnými úpravami dostáváme

$$\frac{\sin(\pi - 2\alpha)}{2f} = \frac{\sin\alpha}{n},$$

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2f} = \frac{\sin\alpha}{n},$$

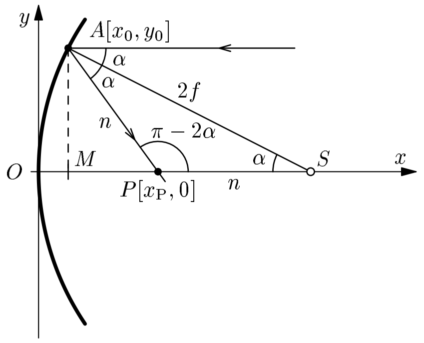
[1]Ke stejnému vztahu je možno také dospět užitím diferenciálního počtu.

z čehož

$$n = \frac{f}{\cos\alpha}. \tag{5}$$

Dále platí z trojúhelníku SAM, že

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{4f^2 - y_0^2}}{2f}. \tag{6}$$



Obr. 3

Po dosazení (6) do (5) a úpravě dostaneme

$$n = \frac{2f^2}{\sqrt{4f^2 - y_0^2}}. \tag{7}$$

Pro x_P platí: $x_P = 2f - n$, takže po dosazení ze (7) dostaneme

$$x_P = 2f - \frac{2f^2}{\sqrt{4f^2 - y_0^2}},$$

$$x_P = 2f\left(1 - \frac{f}{\sqrt{4f^2 - y_0^2}}\right). \tag{8}$$

Dle zadání úlohy je $y_0 \in (0\,\mathrm{m}; 20\,\mathrm{m}\rangle$, po dosazení do (8) je $x_P \in \langle 14{,}35\,\mathrm{m}; 18\,\mathrm{m})$. Průsečíky paprsků s optickou osou x leží tedy v intervalu $\langle 14{,}35\,\mathrm{m}; 18\,\mathrm{m})$, délka intervalu je 3,65 m.

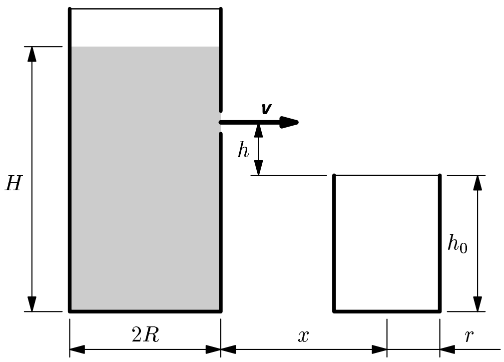
Druhá úloha se týká výtoku kapaliny z nádoby. Víme, že proud vytékající kapaliny se za ideálních podmínek (zanedbání odporu prostředí) pohybuje po části paraboly, která má vrchol v místě, odkud kapalina vytéká z nádoby.

2. Výtok kapaliny z nádoby

Z otevřené válcové nádoby o poloměru R vytéká postranním otvorem voda. Vedle této nádoby stojí otevřená válcová nádoba o poloměru r, jejíž horní okraj je o h níže než výtokový otvor první nádoby. Středy základen obou nádob leží v rovině vodního paprsku. Objem nižší nádoby je V_0. Při výtoku kapaliny z nádoby postupně klesá výška vodní hladiny v nádobě a mění se tvar paraboly, po níž se vodní paprsek pohybuje. Během doby, kdy vodní paprsek zasahoval do nižší nádoby, natekl do ní objem V vody ($V < V_0$).

a) Určete vzdálenost x středu podstavy nižší nádoby od stěny vyšší nádoby (obr 4).

b) Určete nejmenší počáteční výšku H_0 vodní hladiny v nádobě o poloměru R a vzdálenost x druhé nádoby, aby při výtoku kapaliny do menší nádoby se celá naplnila.



Obr. 4

Řešení:

a) Výtoková rychlost kapaliny z nádoby na počátku děje je dána vztahem

$$v_0 = \sqrt{2(H - h_0 - h)g},$$

kde H je počáteční výška hladiny kapaliny ve větší nádobě, h_0 je výška menší nádoby. Na konci děje se velikost výtokové rychlosti zmenší na hodnotu

$$v = \sqrt{2(H - h_0 - h - \Delta h)g},$$

kde Δh je pokles hladiny kapaliny ve větší nádobě v okamžiku, kdy do menší nádoby natekl objem V vody. Jedná se o vrh vodorovný. Dolet je vymezen horními okraji menší nádoby. Doba pohybu jednotlivých částic kapaliny z otvoru po horní okraj menší nádoby je dána vztahem $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Platí

$$L_1 = x + r = \sqrt{2(H - h_0 - h)g} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H - h_0 - h)},$$

$$L_2 = x - r = \sqrt{2(H - h_0 - h - \Delta h)g} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H - h_0 - h - \Delta h)}.$$

Postupnými úpravami vyjádříme z těchto rovnic neznámou x (každou rovnici nejprve umocníme na druhou a pak druhou rovnici odečteme od první). Dostaneme

$$L_1^2 - L_2^2 = (x + r)^2 - (x - r)^2 = 4h\Delta h,$$
$$4xr = 4h\Delta h.$$

Za Δh dosadíme $\Delta h = \frac{V}{\pi R^2}$, takže

$$x = \frac{h}{r}\frac{V}{\pi R^2}.$$

b) Aby se menší nádoba celá naplnila, musí být $V = V_0$. Minimální výšku hladiny H_0 ve větší nádobě určíme ze vztahu

$$L_1 = x + r = 2\sqrt{h(H_0 - h_0 - h)},$$

kam za x dosadíme $x = \frac{h}{r}\frac{V_0}{\pi R^2}$. Potom

$$\frac{h}{r}\cdot\frac{V_0}{\pi R^2} + r = 2\sqrt{h\left(H_0 - \frac{V_0}{\pi r^2} - h\right)}.$$

Po umocnění dostaneme

$$\left(\frac{hV_0}{\pi R^2 r} + r\right)^2 = 4h\left(H_0 - \frac{V_0}{\pi r^2} - h\right),$$

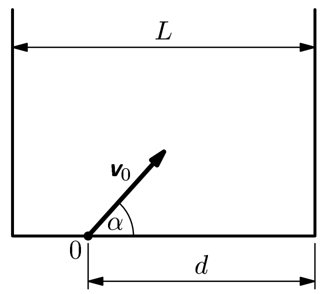
$$H_0 = \frac{1}{4h}\left(\frac{hV_0}{\pi R^2 r} + r\right)^2 + \frac{V_0}{\pi r^2} + h.$$

O třetí úloze bychom mohli říci, že je to typ úlohy, jejíž řešení může usnadnit nápad, který „přijde v pravou chvíli“.

3. Míček mezi stěnami

Je dán prostor ohraničený dvěma rovnoběžnými svislými stěnami vzdálenými od sebe L. V tomto prostoru z podlahy ze vzdálenosti d od pravé stěny je vržen šikmo vzhůru pod úhlem α míček (v rovině kolmé na stěnu a podlahu) s počáteční rychlostí o velikosti v_0 (obr. 5).

Míček dopadne na stěnu, odrazí se od ní, dopadne na protější stěnu a potom zpět do původního místa, odkud byl vržen. Předpokládejme, že odrazy míčku od stěny jsou dokonale pružné. Určete počáteční vzdálenost d a velikost počáteční rychlosti v_0 (při daném úhlu α), kterou musí být míček vržen, aby nastala výše popsaná situace.

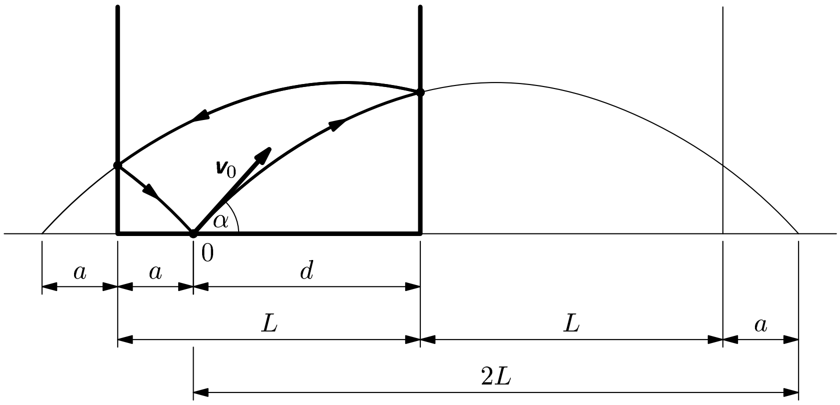


Obr. 5

Řešení

Protože srážky míčku se stěnou jsou dokonale pružné, bude velikost rychlosti před odrazem rovna velikosti rychlosti po odrazu, úhel dopadu bude stejně velký jako úhel odrazu. Oba úhly budou souměrně sdružené podle horizontální roviny procházející bodem dopadu. Dále při řešení uplatníme osovou souměrnost podle jednotlivých stěn.

Po této úvaze lze zadanou úlohu převést na úlohu nalézt velikost rychlosti v_0 (při daném úhlu α) tak, aby míček vržený šikmo vzhůru dopadl do vodorovné vzdálenosti $2L$ od místa vrhu (pokud by tam samozřejmě nebyla stěna).



Obr. 6

Délka dopadu ve vodorovném směru při vrhu šikmo vzhůru je dána vztahem

$$X = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

V našem případě jsme došli k závěru, že délka dopadu musí být $2L$. Potom můžeme napsat

$$2L = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Po úpravě dostaneme

$$2L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha,$$

odkud

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gL}{\sin 2\alpha}}.$$

Tento výsledek je zajímavý především tím, že velikost rychlosti v_0 nezávisí na poloze místa, odkud je míček vržen šikmo vzhůru. Velikost rychlosti v_0 závisí pouze na tíhovém zrychlení, vzdálenosti stěn L a úhlu α.

Můžeme tedy říci, že změnou počáteční polohy bodu vrhu se mění pouze polohy míst, kde se míček odrazí na stěnách. Znamená to, že d může mít libovolnou hodnotu z intervalu $(0; L)$.

Výše uvedenou úlohu je možno řešit také na základě poznatků z analytické geometrie paraboly a pomocí osové souměrnosti, ale řešení je složitější a pracnější. Vyzkoušejte si to sami.