Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s kružnicí

Miroslava Jarešová, PedF UHK Hradec Králové

Při řešení úloh z fyziky se v mnoha případech setkáváme s kuželosečkami. V minulém článku jsme se zabývali úlohami, kde se můžeme setkat s parabolou. V tomto článku se zaměříme na úlohy, v nichž se vyskytuje kružnice. Opět jako minule si ukážeme řešení tří náročnějších úloh.

První úloha se týká situace, kdy je kružnice přímo trajektorií pohybu.

1. Pohyb hodinových ručiček

Koncový bod P velké ručičky hodin je ve vzdálenosti $R = 1{,}00$ m od osy otáčení. Koncový bod Q malé ručičky je ve vzdálenosti $r = 0{,}75$ m od osy otáčení. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic v rovině ciferníku s počátkem ve středu ciferníku tak, že osa x směřuje k hodnotě 3 hodiny a osa y k hodnotě 12 hodin. Za počáteční okamžik budeme považovat 12:00 hodin.

a) Určete časové okamžiky a tomu odpovídající úhly ve stupních, ve kterých se obě ručičky překrývají.

b) Napište funkci určující časovou závislost vzdálenosti d bodů P a Q obou ručiček.

c) Nakreslete graf funkce $d = d(t)$ pro $t \in \langle 0 \text{ hodin}; 12 \text{ hodin}\rangle$ od začátku pohybu.

Řešení:

a) Označíme $T_1 = 1$ hod periodu pohybu velké ručičky, $T_2 = 12$ hod periodu pohybu malé ručičky. Pro poměr period pak platí $\frac{T_2}{T_1} = 12$, z čehož $T_1 = \frac{1}{12}T_2$. Mají-li se obě ručičky překrývat, musí se velká ručička vždy po každém překrytí pootočit o stejný úhel jako malá a vykonat ještě o jednu otáčku navíc. Musí platit

$$\frac{2\pi}{T_1}t_k + 2\pi k = \frac{2\pi}{T_2}t_k,$$

kde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 11$ určuje počet otáček a t_k značí časový okamžik, kdy se obě ručičky překrývají při k-té otáčce. Po dosazení za $T_1 = \frac{1}{12}T_2$ dostaneme

$$k = \left(\frac{12}{T_2} - \frac{1}{T_2}\right)t_k,$$

z čehož

$$t_k = \frac{T_2}{11}k.$$

Po dosazení $T_2 = 12$ hod dostaneme jednotlivé doby (měřené od počátečního okamžiku). Patřičné doby jsou přibližně (převedené na hodiny a minuty):
$t_0 = 0$ min, $t_1 = 1$ hod 5,5 min, $t_2 = 2$ hod 10,9 min, $t_3 = 3$ hod 16,4 min, $t_4 =$ $= 4$ hod 21,8 min, $t_5 = 5$ hod 27,3 min, $t_6 = 6$ hod 32,7 min, $t_7 =$ $= 7$ hod 38,2 min, $t_8 = 8$ hod 43,6 min, $t_9 = 9$ hod 49,1 min, $t_{10} =$ $= 10$ hod 54,5 min, $t_{11} = 12$ hod 0 min.

Odpovídající úhly α_k v radiánech pak vypočteme pomocí vztahu

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{T_2} \cdot t_k = \frac{2\pi}{T_2} \cdot \frac{T_2}{11} k = \frac{2\pi}{11} k,$$

odkud po převodu na stupně můžeme psát

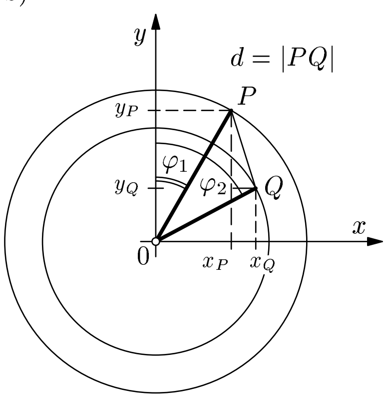
$$\alpha_k = \frac{360°}{11} k.$$

Po dosazení za $k = 0, 1, 2, \ldots 11$ dostaneme přibližně:
$\alpha_0 = 0°$, $\alpha_1 = 32{,}7°$, $\alpha_2 = 65{,}5°$, $\alpha_3 = 98{,}2°$, $\alpha_4 = 130{,}9°$, $\alpha_5 = 163{,}6°$, $\alpha_6 = 196{,}4°$, $\alpha_7 = 229{,}1°$, $\alpha_8 = 261{,}8°$, $\alpha_9 = 294{,}5°$, $\alpha_{10} = 327{,}3°$, $\alpha_{11} = 360°$.

Poznámka

Úlohu je možno řešit i jednoduchou úvahou. Je zřejmé, že obě ručičky se za dvanáct hodin setkají 11krát: mezi 1. a 11. hodinou se setkají 10krát a pak ještě přesně ve 12 hodin. Interval mezi dvěma následujícími setkáními ručiček je vždy stejný (když pootočíme ciferník tak, aby dvanáctka přešla z jednoho místa potkání ke druhému, nic se nezmění - problém je vůči této transformaci symetrický). Odtud je jasné, že tento interval musí být 12 h : 11 = (1+1/11) hodiny a úhel mezi místy setkání je jedenáctina plného úhlu.

b)



Obr. 1

Pro každý okamžik t dle obr. 1 platí

$$x_P = R \sin \varphi_1 = R \sin \frac{2\pi}{T_1} t,$$

$$y_P = R \cos \varphi_1 = R \cos \frac{2\pi}{T_1} t,$$

$$x_Q = r \sin \varphi_2 = r \sin \frac{2\pi}{T_2} t,$$

$$y_Q = r \cos \varphi_2 = r \cos \frac{2\pi}{T_2} t,$$

Dále můžeme psát

$$|PQ|^2 = d^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2,$$

$$d^2 = (R\sin\varphi_1 - r\sin\varphi_2)^2 + (R\cos\varphi_1 - r\cos\varphi_2)^2,$$

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

Poznámka

Pokud bychom označili $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ úhel mezi ručičkami, mohli bychom tento vztah napsat už přímo pomocí kosinové věty.

Tento vztah je možno dále upravit užitím součtového vzorce

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

na tvar

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr + 4Rr\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

neboli

$$d^2 = (R-r)^2 + 4Rr\sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2} - \frac{\varphi_1}{2}\right),$$

$$d^2 = (R-r)^2 + 4Rr\sin^2\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\pi t.$$

V dalším postupu dosadíme za $T_1 = \frac{1}{12}T_2$. Po úpravě vzniklého výrazu a odmocnění dostaneme

$$d = \sqrt{(R-r)^2 + 4Rr\sin^2\frac{11\pi}{T_2}t}.$$

Pro dané hodnoty je

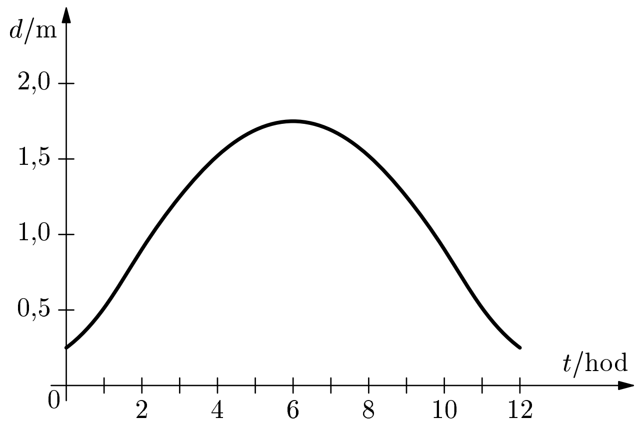
$$\{d\} = \sqrt{(1{,}00 - 0{,}75)^2 + 4\cdot 1{,}00\cdot 0{,}75\cdot\ \sin^2\frac{11\pi}{12}\{t\}},$$

po úpravě je

$$\{d\} = \sqrt{\frac{1}{16} + 3\sin^2\frac{11\pi}{12}\{t\}}, \tag{1}$$

kde vzdálenost d ručiček dostaneme v metrech, za čas t je nutno dosazovat v hodinách.

c) Graf závislosti vzdálenosti konců ručiček na čase sestrojíme užitím vztahu (1), hodnoty pro sestrojení grafu získáme postupným dosazováním za čas t po jednotlivých hodinách. K sestrojení grafu je vhodné použít např. tabulkový procesor Excel (obr. 2).

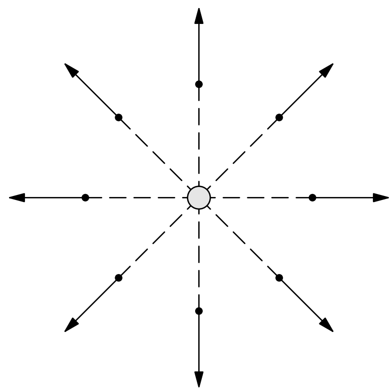


Obr. 2

Druhá úloha se týká určení vnější obalové křivky nábojů vystřelených z odpalovacího zařízení. Náboje jsou vystřeleny ve svislé rovině všemi směry stejně velkou rychlostí.

2. Pohyb nábojů

Z odpalovacího zařízení (jehož rozměry budeme považovat pro naši úlohu za zanedbatelné), které se nachází ve výšce H nad zemským povrchem (v homogenním gravitačním poli), jsou současně všemi směry v téže svislé rovině, vystřeleny stejně velkou počáteční rychlostí v_0 náboje (obr. 3). Dokažte, že náboje se nacházejí v každém okamžiku na společné kružnici. Určete, jak závisí poloměr této kružnice na čase a jaký pohyb koná střed této kružnice. Odpor vzduchu zanedbejte. Uvažujte, že všechny náboje padají se stejným zrychlením.



Obr. 3

Řešení:

Ukážeme si dva způsoby, jak řešit takovou úlohu.

1. způsob - řešení pomocí analytické geometrie.

Postup řešení v této části spočívá v popisu pohybu náboje vystřeleného z odpalovacího zařízení pod libovolně zvoleným úhlem α. Soustavu souřadnic

Oxy zvolíme tak, aby náboj byl vystřelen z počátku této soustavy, aby osa x byla vodorovná a aby letící náboj ležel v rovině xy. Úhel α budeme měřit od osy x jako kladný proti směru chodu hodinových ručiček. Tento libovolně vybraný náboj se v čase t bude nacházet v bodě, jehož souřadnice jsou

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Protože jsme úhel α zvolili libovolně, popisují výše uvedené vztahy polohu všech nábojů při vhodně zvoleném úhlu α. Z těchto rovnic nyní vyloučíme úhel α, a to tak, že z prvního vztahu vyjádříme $\cos\alpha$, z druhého vztahu $\sin\alpha$, potom obě rovnice umocníme na druhou a sečteme. Při tomto postupu ještě dále využijeme vztah, který platí na jednotkové kružnici:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Dostaneme

$$\cos\alpha = \frac{x}{v_0 t}, \qquad \sin\alpha = \frac{y + \frac{1}{2} g t^2}{v_0 t},$$

$$\frac{x^2}{v_0^2 t^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2}{v_0^2 t^2} = 1,$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2 = (v_0 t)^2. \tag{2}$$

Rovnice (2) je rovnicí kružnice se středem $S\left[0; -\frac{1}{2} g t^2\right]$ a poloměrem $r = v_0 t$. Poloměr kružnice se s časem mění. Střed kružnice padá svisle dolů volným pádem.

2. způsob - řešení pomocí neinerciální soustavy souřadnic.

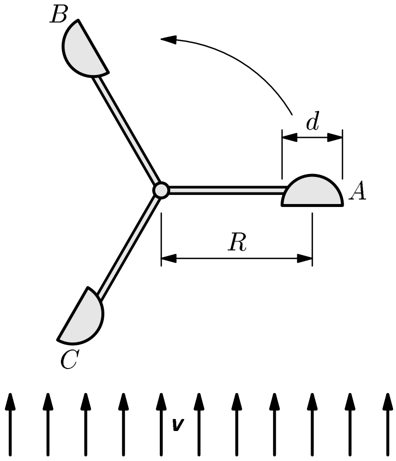
Pohyb nábojů budeme popisovat vzhledem k neinerciální soustavě souřadnic spojené s myšlenou kuličkou (kterou můžeme vzhledem ke vzdálenostem považovat za hmotný bod), která začne v okamžiku, kdy byly všechny náboje vystřeleny všemi směry, padat z odpalovacího zařízení volným pádem. Vzhledem k odpalovacímu zařízení se každý náboj bude pohybovat po parabole – jedná se o šikmé nebo vodorovné vrhy kromě svislého směru, kdy se jedná o vrh svisle vzhůru, resp. volný pád. Vzhledem ke kuličce budou ale všechny náboje konat rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí v_0, takže každý z nábojů nezávisle na směru, kterým je vystřelen, bude mít v libovolném časovém okamžiku od kuličky stejně velkou vzdálenost $r = v_0 t$.

Můžeme tedy říci, že každý náboj se v libovolném čase t nachází na kružnici o poloměru $v_0 t$, jejímž středem je kulička, která se nachází na svislé polopřímce (začínající ve středu odpalovacího zařízení) směřující svisle dolů. Kulička má vzhledem k tomu, že padá svisle dolů volným pádem, vzdálenost $s = \frac{1}{2}gt^2$ od středu odpalovacího zařízení. Protože s kuličkou je také spojen střed kružnice, na které se nacházejí náboje v každém okamžiku, můžeme říci, že střed této kružnice také padá svisle dolů volným pádem.

Třetí úloha popisuje činnost anemometru.

3. Miskový anemometr

Na obr. 4 je nakreslen anemometr, což je zařízení sloužící k měření rychlosti větru. Misky anemometru jsou na počátku v klidu, pak na ně začne foukat vítr a uvede anemometr do otáčivého pohybu. Hustota vzduchu je 1,3 kg $\cdot$ m^{-3}, ramena anemometru svírají úhly 120°, R = 70 mm, d = 28 mm. Součinitel odporu pro misku A je $C_A =$ $= 1{,}35$, pro misky B a C (pro daný úhel) je $C_B = C_C = 0{,}45$. Určete velikost výsledného momentu sil působících na hřídel anemometru v okamžiku, kdy na misky začne foukat vítr rychlostí o velikosti $v = 72$ km $\cdot$ h^{-1} v poloze anemometru znázorněné na obr. 4.



Obr. 4

Řešení:

Síla působící na misku A je dána vztahem

$$F_A = C_A \cdot \frac{1}{2}\varrho S v^2,$$

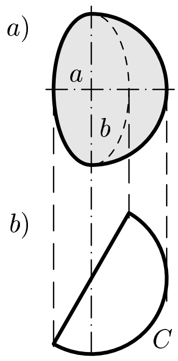
na misku B vztahem

$$F_B = C_B \cdot \frac{1}{2}\varrho S_1 v^2 = C_B \cdot \frac{1}{2}\varrho S_1 v^2$$

a na misku C vztahem

$$F_C = C_B \cdot \frac{1}{2}\varrho S_2 v^2 = C_B \cdot \frac{1}{2}\varrho S_2 v^2,$$

kde S_1 je obsah průmětu misky B do směru kolmého na směr proudění a S_2 je obsah průmětu misky C do směru kolmého na směr proudění (obr. 5 a)). Platí $S_1 = S_2$.



Obr. 5

Průmět misky A do směru kolmého na směr proudění je kruh o plošném obsahu $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Nyní potřebujeme zjistit obsah plochy $S_1 = S_2$. Plochu na obr. 5 a) je možno složit ze dvou ploch – jedna část je polovina elipsy s poloosami $a = \frac{d}{2} \cdot \cos 60^\circ = \frac{d}{4}$ a $b = \frac{d}{2}$ a druhá část je polovina kruhu o poloměru $b = \frac{d}{2}$. Obsah S_1 je pak dán vztahem

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi ab + \frac{1}{2}\pi b^2 = \frac{1}{16}\pi d^2 + \frac{1}{8}\pi d^2 = \frac{3}{16}\pi d^2.$$

Po úpravě a dosazení za jednotlivé plochy dostaneme

$$F_A = \frac{1}{8} C_A \varrho \pi d^2 v^2,$$

$$F_B = F_C = \frac{3}{32} C_B \varrho \pi d^2 v^2.$$

Výsledný moment všech sil vzhledem k podélné ose hřídele pak je dán vztahem

$$M = F_A R - 2F_B R \cos 60^\circ = (F_A - F_B)R = \frac{1}{8}\varrho \pi d^2 v^2 R \left(C_A - \frac{3}{4} C_B\right).$$

Pro dané hodnoty je

$$M = 1{,}13 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Nm}.$$