# Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s hyperbolou

*Miroslava Jarešová, PedF UHK Hradec Králové*

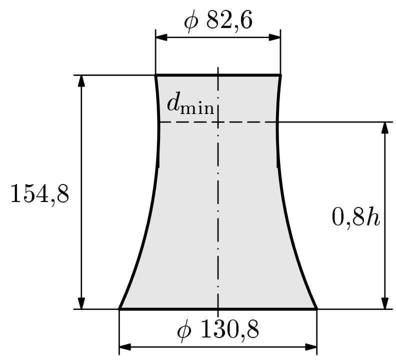
V minulých článcích jsme se zabývali řešením úloh, kde se vyskytovaly kuželosečky parabola, kružnice a elipsa. V tomto článku si opět ukážeme řešení tří náročnějších úloh. Tentokrát se budeme zabývat úlohami, ve kterých se můžeme setkat s hyperbolou.

Na úvod vyřešíme úlohu zaměřenou více matematicky, kde si zopakujeme základní poznatky z analytické geometrie hyperboly.

**1. Chladící věž jaderné elektrárny Temelín**

Chladící věže elektráren mají obvykle tvar rotačních hyperboloidů, jak je znázorněno na obr. 1. Rotační hyperboloid znázorňující chladící věž elektrárny vznikne rotací hyperboly kolem svislé osy. V případě jaderné elektrárny Temelín má chladící věž výšku 154,8 m, průměr v koruně věže je 82,6 m, patní průměr je 130,8 m. Nejmenší průměr má věž ve výšce 123,8 m, jak je znázorněno na obr. 2. Napište rovnici hyperboly (ve středovém tvaru), jejímž otáčením kolem svislé osy vznikne rotační hyperboloid chladící věže. Určete také minimální hodnotu průměru chladící věže.

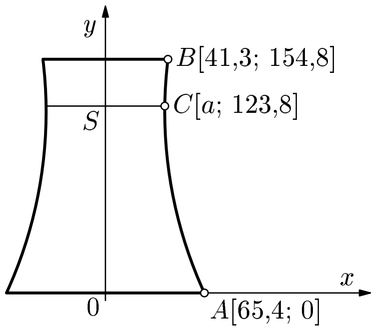
Obr. 1




Obr. 2

**Řešení**

K tomu, abychom mohli napsat požadovanou rovnici hyperboly, zavedeme soustavu souřadnic $Oxy$, jak je znázorněno na obr. 3. Všechny údaje jsou v metrech. Z důvodů zjednodušení a přehlednosti zápisu budeme uvádět pouze číselné hodnoty rozměrů, a ty budou vždy v metrech.




Obr. 3

Obecný tvar středové rovnice hyperboly je dán vztahem

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

kde $m$, $n$ jsou souřadnice středu, $a$ je hlavní poloosa, $b$ je vedlejší poloosa. Z obr. 3 je zřejmé, že $m = 0$, $n = 123{,}8$. Středová rovnice hyperboly pak bude mít tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-123{,}8)^2}{b^2} = 1.$$

Z podmínky, že bod $A$ leží na hyperbole, dostaneme rovnici

$$\frac{65{,}4^2}{a^2} - \frac{(0-123{,}8^2)^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Z podmínky, že bod $B$ leží na hyperbole, dostaneme rovnici

$$\frac{41{,}3^2}{a^2} - \frac{(154{,}8-123{,}8)^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic (2), (3) o dvou neznámých $a$, $b$. K tomu, abychom tuto soustavu co nejsnáze vyřešili, zavedeme substituci

$$t = \frac{1}{a^2}, \quad u = \frac{1}{b^2}.$$

Potom obdržíme

$$\begin{aligned} 65{,}4^2 t - 123{,}8^2 u &= 1, \\ 41{,}3^2 t - 31{,}0^2 u &= 1. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$t \doteq 6{,}518 \cdot 10^{-4}, \text{ z čehož } a = \sqrt{\frac{1}{t}} \doteq 39{,}2;$$

$$u \doteq 1{,}164 \cdot 10^{-4}, \text{ z čehož } b = \sqrt{\frac{1}{u}} \doteq 92{,}7.$$

Středová rovnice hyperboly tedy bude mít přibližně tvar

$$\frac{x^2}{39{,}2^2} - \frac{(y-123{,}8)^2}{92{,}7^2} = 1.$$

Odsud je $d_{\min} = 2a \doteq 78{,}4$. Nejmenšího průměru 78,4 m dosahuje chladící věž ve výšce 123,8 m.

Druhá úloha se bude týkat určení gravitační potenciální energie v případě, kdy již nelze považovat tíhové zrychlení za konstantní. K odvození vztahu pro gravitační potenciální energii použijeme Newtonův gravitační zákon: dva hmotné body o hmotnostech $m_1$ a $m_2$, jejichž vzájemná vzdálenost je $r$, na sebe navzájem působí gravitační silou, jejíž velikost je dána vztahem

$$F_{\mathrm{g}} = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

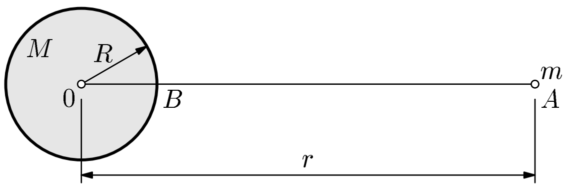
Zákon v tomto tvaru také platí pro dvě homogenní koule. S pojmem gravitační potenciální energie jste se již setkali v článku o elipse, nyní se na gravitační potenciální energii zaměříme podrobněji.

## 2. Gravitační potenciální energie

Odvoďte vztah pro výpočet gravitační potenciální energie ve vzdálenosti $r \geq R$ (kde $R$ je poloměr Země) od středu Země, pak vytvořte graf závislosti gravitační potenciální energie na vzdálenosti od středu Země. Při odvození uvažujte, že vzdálenost $r$ je natolik velká, že již nelze tíhové zrychlení považovat za konstantní.

### Řešení

Budeme uvažovat, že těleso o hmotnosti $m$ se nachází ve vzdálenosti $r$ od středu Země o hmotnosti $M$ a poloměru $R$. Vzdálenost $r$ je natolik značná, že již nelze považovat tíhové zrychlení za konstantní a použít vztahu $E_{\mathrm{p}} = mgh$. Změna potenciální energie je rovna práci, kterou vykoná gravitační pole. Tento problém lze velmi snadno vyřešit užitím integrálního počtu, my si ale ukážeme řešení bez užití integrálního počtu.




Obr. 4

K tomu použijeme následující úvahu. Úsečku $AB$ (obr. 4) rozdělíme na $n$ malých úseků stejné délky $\Delta r$. Úsek $\Delta r$ je natolik malý, že v něm můžeme gravitační sílu nahradit stálou silou, jejíž velikost se rovná aritmetickému průměru velikostí gravitačních sil působících v počátečním a koncovém bodu úseku $\Delta r$.

Za těchto předpokladů nyní dokážeme určit velikost prací $W_1$, $W_2$,..., $W_n$ vykonaných gravitační silou při posunutí hmotného bodu o hmotnosti $m$ po jednotlivých úsecích $\Delta r$ a celkovou práci

$$W = W_1 + W_2 + \ldots + W_n.$$

Velikosti gravitačních sil, které působí v dělících bodech úsečky $AB$ pak budou

$F_{g0} = \varkappa\dfrac{mM}{r^2} = \dfrac{k}{r^2}$,

$F_{g1} = \dfrac{k}{(r-\Delta r)^2} = \dfrac{k}{r_1^2}$,

$F_{g2} = \dfrac{k}{(r_1-\Delta r)^2}$,

$\vdots$

$F_{gn} = \dfrac{k}{R^2}$,

přičemž jsme označili $k = \varkappa mM$.

Práce vykonaná gravitační silou na prvním úseku $\Delta r$ je

$W_1 = \dfrac{F_{g0}+F_{g1}}{2}\Delta r = \dfrac{k\Delta r}{2}\cdot\dfrac{(R+\Delta r)^2+R^2}{R^2(R+\Delta r)^2}.$

$\quad = \dfrac{k\Delta r}{2}\dfrac{2r(r-\Delta r)+(\Delta r)^2}{r^2(r-\Delta r)^2}.$

Protože $\Delta r \ll r$, můžeme $(\Delta r)^2$ v čitateli zlomku zanedbat vzhledem k prvnímu členu. Pak můžeme psát

$$W_1 = k\frac{\Delta r}{r(r-\Delta r)} = k\frac{r-r_1}{rr_1} = k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right).$$

Obdobným způsobem bychom určili, že

$W_2 = k\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)$,

$\vdots$

$W_n = k\left(\dfrac{1}{r_n}-\dfrac{1}{r_{n-1}}\right) = k\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_{n-1}}\right).$

Celková práce vykonaná gravitační silou při přemístění hmotného bodu o hmotnosti $m$ z povrchu Země do místa vzdáleného $r$ od středu Země je pak dána vztahem

$$W = W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \varkappa mM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right).$$

Tato práce závisí jen na počáteční a koncové poloze hmotného bodu o hmotnosti $m$ vzhledem ke středu Země a je $W > 0$.

Protože práce $W$ byla vykonána působením vnitřní síly soustavy, zmenší se o stejnou hodnotu gravitační potenciální energie soustavy, tj. platí

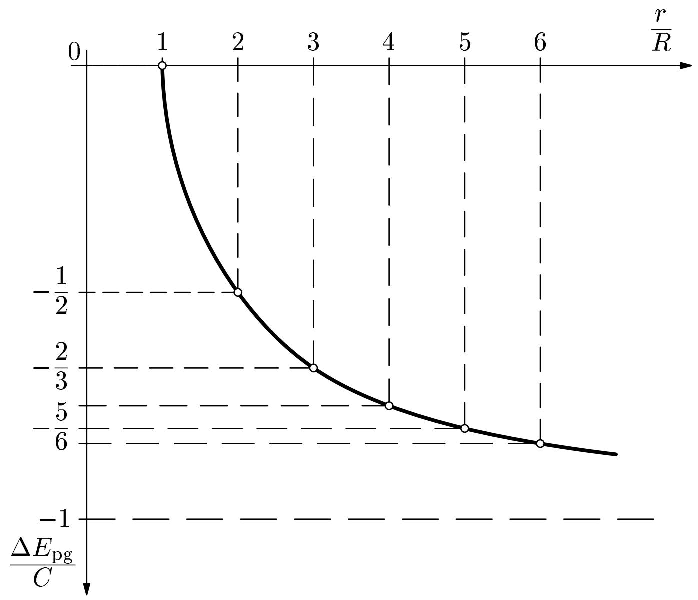
$$\Delta E_{pg} = -W = -\varkappa mM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right) = -\frac{\varkappa mM}{R} + \frac{\varkappa mM}{r}.$$

Pro konstrukci grafu označíme $C = \dfrac{\varkappa mM}{R}$. Pak můžeme vztah pro $\Delta E_{pg}$ přepsat do tvaru

$$\Delta E_{\mathrm{pg}} = \frac{\varkappa m M}{r} - C.$$

Dále vytvoříme tabulku hodnot potřebných k sestrojení grafu, potom sestrojíme požadovaný graf (obr. 5).

| $r$ | $R$ | $2R$ | $3R$ | $4R$ | $5R$ | $6R$ | $\dots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta E_{\mathrm{pg}}$ | $0$ | $-\frac{C}{2}$ | $-\frac{2}{3}C$ | $-\frac{3}{4}C$ | $-\frac{4}{5}C$ | $-\frac{5}{6}C$ | $\dots$ | $-C$ |

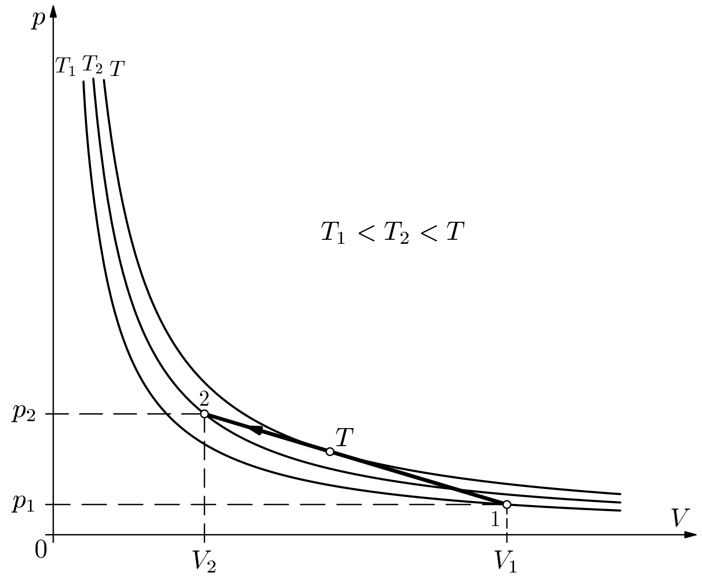



Obr. 5

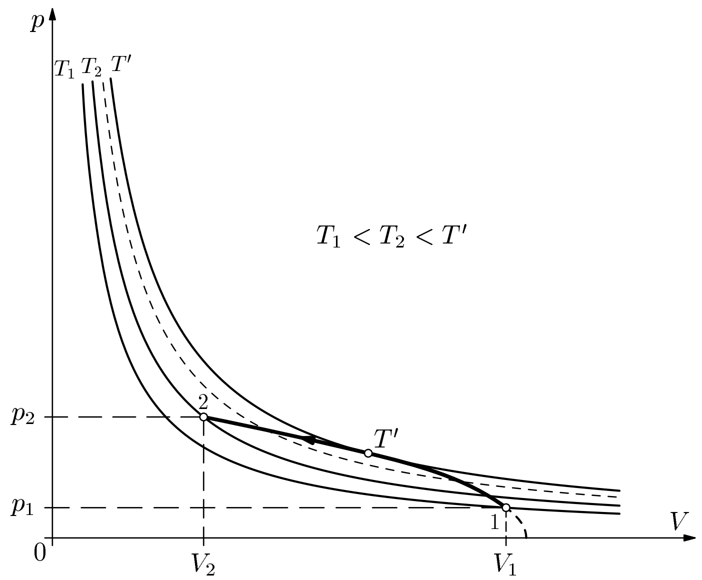
Třetí úloha se týká děje v ideálním plynu. Zde si ukážeme v části b) také situaci, kdy již nelze vše řešit prostředky elementární matematiky, zde už je nutné provést řešení pomocí diferenciálního počtu.

**3. Úloha o ideálním plynu**

Hélium o látkovém množství 1 mol je uzavřené pod válcovým pístem a velmi pomalu přechází ze stavu 1 ($p_1 = 0{,}4$ MPa, $V_1 = 6$ l) do stavu 2 ($p_2 = 4p_1$, $V_2 = \frac{1}{3}V_1$). Určete, jaké největší teploty může dosáhnout plyn při tomto ději, jestliže graf závislosti tlaku plynu na objemu je a) přímka nakreslená na obr. 6, b) parabola nakreslená na obr. 7, jejíž vrchol leží na ose $x$.




Obr. 6




Obr. 7

**Řešení**

a) Do grafu zakreslíme síť izoterm – hyperbol $pV = RT$ (obr. 6). Čím vyšší bude teplota plynu, tím dále se nachází vrchol hyperboly od počátku soustavy souřadnic. Proto je zřejmé, že v průběhu děje 1 – 2 plyn dosáhne takové nejvyšší teploty, při které odpovídající hyperbola nebude protínat přímku 1 – 2, ale pouze se jí bude dotýkat.

Bod o souřadnicích $p$, $V$ odpovídající maximální teplotě leží jak na hyperbole, tak i na přímce, a proto jeho souřadnice musí vyhovovat dvěma rovnicím, rovnici hyperboly

$$pV = RT, \tag{4}$$

i rovnici přímky

$$p = aV + b, \tag{5}$$

kde $a$ i $b$ jsou konstanty, které určíme později.

Dosadíme-li tlak $p$ z rovnice (5) do rovnice (4), dostaneme kvadratickou rovnici pro objem $V$

$$aV^2 + bV - RT = 0.$$

Protože přímka je tečnou hyperboly, musí být diskriminant této kvadratické rovnice roven nule, tj.

$$b^2 + 4aRT = 0.$$

Vyjádříme-li z této rovnice $T$, dostaneme

$$T = -\frac{b^2}{4aR}. \tag{6}$$

V tomto vztahu pro $T$ ještě neznáme hodnoty koeficientů $a$, $b$. Protože přímka $p = aV + b$ prochází body, které popisují stavy 1 a 2, můžeme psát

$$p_1 = aV_1 + b, \qquad p_2 = aV_2 + b.$$

Řešením této soustavy rovnic nalezneme

$$a = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2} = -\frac{9p_1}{2V_1}, \qquad b = \frac{p_2V_1 - p_1V_2}{V_1 - V_2} = \frac{11}{2}p_1. \tag{7}$$

Potom je po dosazení (7) do (6)

$$T = \frac{121}{72}\frac{p_1V_1}{R} \doteq 485{,}1\ \mathrm{K}.$$

Výpočtem jsme zjistili, že při výše uvedeném ději může plyn dosáhnout nejvýše teploty asi 485 K.

b) Nejprve napíšeme rovnici paraboly na obr. 7. Vrcholová rovnice paraboly ($c$ je parametr) je dána vztahem

$$(p-n)^2 = -2c(V-m).$$

Z podmínky, že vrchol paraboly leží na ose $x$ dostaneme $n = 0$; pak můžeme rovnici paraboly přepsat do tvaru

$$p^2 = -2c(V-m).$$

Z podmínky, že parabola prochází body 1 a 2 dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $c$ a $m$:

$$p_1^2 = -2c(V_1 - m) \quad p_2^2 = -2c(V_2 - m).$$

Dále ještě do druhé rovnice soustavy dosadíme vztahy $p_2 = 4p_1$, $V_2 = \dfrac{1}{3}V_1$, čímž obdržíme

$$p_1^2 = -2c(V_1 - m), \quad 16p_1^2 = -2c\left(\frac{V_1}{3} - m\right).$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$m = \frac{47}{45}V_1, \qquad c = \frac{45}{4}\frac{p_1^2}{V_1}.$$

Potom můžeme vrcholovou rovnici paraboly přepsat do tvaru

$$p^2 = -\frac{45}{2}\frac{p_1^2}{V_1}V + \frac{47}{2}p_1^2. \tag{8}$$

Tak jako v části a) nyní nalezneme souřadnice bodu dotyku tečny paraboly (8) a hyperboly o rovnici

$$pV = RT'. \tag{9}$$

Z rovnice (9) vyjádříme tlak $p$ a dosadíme do (8). Po úpravě a vyjádření $T'^2$ dostaneme

$$T'^2 = \frac{p_1^2}{2R^2}\left(47V^2 - 45\frac{V^3}{V_1}\right). \tag{10}$$

V dalším postupu je třeba určit $V$, pro které nabývá $T'$ (a tedy i $T'^2$) maximálních hodnot, což je nutné provést pomocí diferenciálního počtu. Platí

$$\frac{\mathrm{d}\,T'^2}{\mathrm{d}\,V} = \frac{p_1^2}{2R^2}\left(47 \cdot 2V - 45 \cdot 3\frac{V^2}{V_1}\right).$$

Aby nastal lokální extrém, musí být

$$\frac{\mathrm{d}\,T'^2}{\mathrm{d}\,V} = 0,$$

z čehož

$$V = \frac{47}{45} \cdot \frac{2}{3} V_1. \tag{11}$$

Pomocí druhé derivace nyní ověříme, že se jedná o lokální maximum:

$$\frac{\mathrm{d}^{\,2} T'^2}{\mathrm{d}\,V^{\,2}} = \frac{p_1^2}{2R^2} \left( 47 \cdot 2 - 45 \cdot 6 \frac{V}{V_1} \right)$$

Do této rovnice nyní dosadíme z (11); potom je

$$\frac{\mathrm{d}^{\,2} T'^2}{\mathrm{d}\,V^{\,2}} = -47 \frac{p_1^2}{2R^2} < 0,$$

což znamená, že pro $V$ určené vztahem (11) nastalo lokální maximum teploty. Po dosazení (11) do (10) a odmocnění dostaneme

$$T' = \frac{2}{3} \cdot \frac{47}{45} \sqrt{\frac{47}{6}} \cdot \frac{p_1 V_1}{R} \doteq 562{,}6\ \mathrm{K}.$$

Plyn v tomto případě tedy dosáhne maximální teploty asi 563 K.

Porovnáme-li výsledky řešení úloh a) a b), můžeme říci, že $T' > T$, což je možno fyzikálně zdůvodnit např. tím, že ve druhém případě b) je nutno pro přechod plynu ze stavu 1 do stavu 2 vykonat větší práci (větší plocha pod grafem křivky, po které přechází plyn).