Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s elipsou

Miroslava Jarešová – Ivo Volf, PedF UHK Hradec Králové

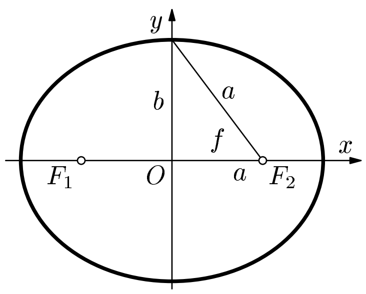
Řekne-li se elipsa v souvislosti s fyzikou, je možno si představit celou řadu situací, kde se s elipsou ve fyzice můžeme setkat. Někomu se vybaví skládání kolmých kmitů, je možno si také představit např. tyč, která se jedním koncem opírá o svislou stěnu a druhým koncem o podlahu a začne sjíždět po zdi dolů. Trajektorií pohybu libovolně zvoleného bodu tyče je také elipsa. My se ale zaměříme na případy, kde se elipsa asi vyskytuje nejčastěji – gravitační pole.

Než začneme řešit jednotlivé úlohy doplňme si poznatky z učiva fyziky střední školy ještě o některé další poznatky potřebné k vyřešení níže uvedených úloh.

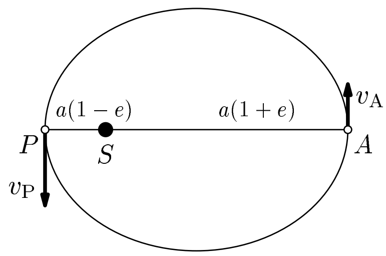
Elipsa je množina všech bodů X v rovině takových, že $|F_1X| + |F_2X| = 2a$. Označíme $|F_1O| = |F_2O| = f$ (obr. 1). Potom platí $a^2 = b^2 + f^2$, číselná výstřednost elipsy e je definována jako podíl $e = \dfrac{f}{a}$.

Pro perihelium elipsy pak platí vztah (obr. 2): $r_\mathrm{P} = a - f = a(1 - e)$, pro afélium elipsy platí $r_\mathrm{A} = a + f = a(1 + e)$. Z druhého Keplerova zákona pak plyne vztah

$$\frac{v_\mathrm{P}}{v_\mathrm{A}} = \frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{P}} = \frac{1+e}{1-e}. \tag{1}$$



Obr. 1



Obr. 2

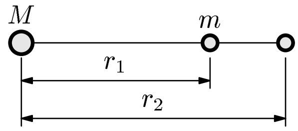
Dále ještě odvodíme obecný vztah, který platí pro výpočet rychlosti pohybu planety po eliptické trajektorii v libovolném bodě trajektorie. K tomuto odvození použijeme zákon zachování mechanické energie.

Víme, že pohybuje-li se hmotný bod po eliptické trajektorii, mění se jeho okamžitá rychlost i vzdálenost od středu centrálního tělesa. Mění se tedy i jeho kinetická a potenciální energie, ale celková mechanická energie zůstává konstantní. Připomeňme si, že pro výpočet kinetické energie platí nám dobře známý vztah

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2,$$

kde za v dosazujeme velikost okamžité rychlosti. Nyní si ještě odvodíme vztah pro výpočet *gravitační potenciální energie* E_pg tělesa o hmotnosti m v radiálním gravitačním poli tělesa o hmotnosti M.

Práce, kterou musíme vykonat, abychom těleso o hmotnosti m posunuli ve směru průvodiče ze vzdálenosti r_1 od středu centrálního tělesa do vzdálenosti r_2 (obr. 3), je rovna přírůstku jeho gravitační potenciální energie



Obr. 3

$$W_{12} = E_\mathrm{pg2} - E_\mathrm{pg1} = F_\mathrm{p}(r_2 - r_1),$$

kde F_p je velikost průměrné síly, kterou musíme působit. Z Newtonova gravitačního zákona dostaneme

$$F_1 = \varkappa \frac{Mm}{r_1^2}, \quad F_2 = \varkappa \frac{Mm}{r_2^2},$$

potom

$$F_\mathrm{p} = \sqrt{F_1 F_2} = \varkappa \frac{Mm}{r_1 r_2}.$$

Po dosazení je

$$E_\mathrm{pg} = E_\mathrm{pg2} - E_\mathrm{pg1} = \varkappa \frac{Mm}{r_1 r_2}(r_2 - r_1),$$

$$E_\mathrm{pg} = \varkappa \frac{Mm}{r_1} - \varkappa \frac{Mm}{r_2} = -\varkappa \frac{Mm}{r_2} - \left(-\varkappa \frac{Mm}{r_1}\right).$$

Při popisu pohybů v radiálním gravitačním poli volíme potenciální energii v nekonečné vzdálenosti rovnou nule. Pak ale je v konečné vzdálenosti záporná a platí

$$E_\mathrm{pg} = -\varkappa \frac{Mm}{r}. \tag{2}$$

Dále použijeme vztahy (1), (2) a zákon zachování mechanické energie, pomocí těchto vztahů odvodíme vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti v libovolném bodě eliptické trajektorie. Napíšeme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{A}} &= v_{\mathrm{P}}\frac{1-e}{1+e}, && (3)\\ \frac{1}{2}mv_{\mathrm{P}}^2-\varkappa\frac{Mm}{a(1-e)} &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2-\varkappa\frac{Mm}{a(1+e)}, && (4)\\ \frac{1}{2}mv^2-\varkappa\frac{Mm}{r} &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{P}}^2-\varkappa\frac{Mm}{a(1-e)}. && (5)\end{aligned}$$

Dosadíme-li z (3) do (4) a upravíme, dostaneme

$$v_{\mathrm{P}}=\sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{1+e}{1-e}}.$$

Po dosazení do (5) a příslušných úpravách obdržíme

$$v=\sqrt{\varkappa M\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}, \qquad (6)$$

což je vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti v libovolném bodě trajektorie, který použijeme při výpočtech v následujících dvou úlohách.

Výše uvedený postup odvození včetně dalších informací k této problematice je možno nalézt v [1].

První úloha je zaměřena na pohyb těles v naší sluneční soustavě, v tomto případě budeme řešit problémy pohybu nově objevených těles v naší sluneční soustavě.

1. Quaoar a Sedna

Počátkem října 2002 proběhla ve sdělovacích prostředcích zpráva o objevu „desáté" planety ve sluneční soustavě. Bylo to největší těleso objevené ve sluneční soustavě v posledních 72 letech (Pluto byl objeven v únoru 1930). Objevitelé tzv. „desáté planety" zvolili pro nově objevené těleso jméno boha indiánského kmene Tongva v Kalifornii, což je *Quaoar*.

Quaoar obíhá kolem Slunce po téměř kruhové dráze s číselnou výstředností $e = 0{,}04$ a hlavní poloosou 43 AU. Nyní už víme, že Quaoar je pravděpodobně ledové těleso, v němž jsou úlomky křemičitanů různé velikosti a je pošpiněné prachem, který zamrzl již při vzniku sluneční soustavy do ledů. Quaoar není planeta, ale velký *kuiperoid*, tj. ledové těleso v *Kuiperově pásu*. Také Pluto je dnes považován za velkého kuiperoida, ale byl objeven v roce 1930; protože se o něm v této době toto ještě nevědělo, byl zařazen mezi planety.

Pak ale přišlo pondělí 15. března 2004, kdy bylo oznámeno objevení „nové planety“ pojmenované *Sedna* (po inuitské bohyni moří a oceánů). V době svého objevu se Sedna nacházela 90 AU od Slunce, přísluní 76 AU dosáhne až v roce 2075, odsluní má ve vzdálenosti 915 AU od Slunce. Eliptická oběžná dráha Sedny je odlišná od všech dosud astronomy pozorovaných družic. Po Marsu se jedná o druhý nejčervenější objekt ve sluneční soustavě od roku 1930. Problém, zda je Sedna planeta nebo planetka, je dnes stále diskutován.

a) Na základě výše uvedených údajů vypočtěte oběžnou dobu kuiperoidu Quaoar a určete rychlosti, kterými prochází v periheliu a aféliu.

b) Určete oběžnou dobu planety Sedna, určete rychlosti v periheliu, aféliu a rychlost v době, kdy byla Sedna objevena.

Řešení

a) Podle zadání víme, že Quaoar má $a_2 = 43$ AU. K výpočtu oběžné doby použijeme 3. Keplerův zákon, ve kterém se vyskytují další údaje pro Zemi – $a_1 = 1$ AU, $T_1 = 1$ rok – a vyjádříme oběžnou dobu T_2. Dostaneme

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3} T_1 \doteq 282 \text{ let.}$$

K určení rychlosti pohybu kolem Slunce použijeme vztahu (6)

$$v = \sqrt{\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Poznámka

Odvození vztahu (1) je možno nalézt např. v [1].

Dosazením za $r = r_\mathrm{P} = a(1-e)$ do vztahu (6) dostaneme

$$v_\mathrm{P} = \sqrt{\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{a}\frac{1+e}{1-e}} \doteq 4\,550 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Do vztahu (6) dále dosadíme za $r = r_\mathrm{A} = a(1+e)$. Dostaneme

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{a}\frac{1-e}{1+e}} \doteq 4\,370 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Z výpočtu je vidět, že velikosti rychlostí při průchodu periheliem a aféliem se v případě kuiperoidu Quaoar od sebe příliš neliší.

b) Podle zadání víme, že pro Sednu je $r_\mathrm{P} = 76$ AU, $r_\mathrm{A} = 915$ AU. V době svého objevu byla vzdálenost Sedny od Slunce $r = 90$ AU. Po dosazení do vztahu (6) za $a = \frac{1}{2}(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})$ dostaneme

$$v = \sqrt{\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A}}\right)} = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A}}\right)}. \tag{7}$$

Po číselném dosazení do vztahu (7) obdržíme rychlost $v \doteq 4\,240\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, kterou se pohybovala Sedna v okamžiku svého objevení.

Dosadíme-li do vztahu (7) postupně za $r = r_\mathrm{P}$ a $r = r_\mathrm{A}$, dostaneme po úpravě

$$v_\mathrm{P} = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{P}(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})}}, \tag{8}$$

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\frac{r_\mathrm{P}}{r_\mathrm{A}(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})}}. \tag{9}$$

Po číselném dosazení je $v_\mathrm{P} \doteq 4\,650\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_\mathrm{A} \doteq 390\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. V tomto případě se na rozdíl od úlohy a) obě rychlosti velmi výrazně liší.

Oběžnou dobu dostaneme po dosazení do 3. Keplerova zákona

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2},$$

kde index jedna značí údaje pro Zemi, index dvě údaje pro Sednu. Po vyjádření oběžné doby T_2 a dosazení za $a_2 = \frac{1}{2}(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})$ obdržíme

$$T_2 = \sqrt{\frac{(r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A})^3}{8a_1^3}}T_1 \doteq 11\,030\ \text{let}.$$

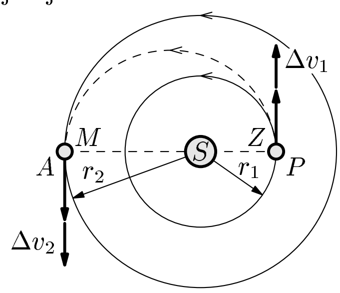
Druhá úloha se bude týkat popisu přechodu sondy z jedné oběžné dráhy na druhou.

2. Hohmannova trajektorie

Oběžná sonda pohybující se po kruhové dráze kolem Slunce ve vzdálenosti 1 AU (oběžná dráha Země) byla vyslána na kruhovou oběžnou dráhu Marsu, tj. na kruhovou dráhu o poloměru 1,52 AU. V průběhu letu této sondy se omezíme na situaci, že po celou dobu letu budeme zanedbávat gravitační působení planet a přihlížet pouze ke gravitačnímu působení Slunce. Dále budeme také uvažovat, že sonda má zapnuté motory pouze v okamžicích, kdy přechází z kruhové dráhy na eliptickou a naopak, ve zbývající části pohybu budou motory vypnuty. Německý fyzik Hohmann v roce 1925 dokázal, že energeticky nejvýhodnější pro takový přechod má eliptická přechodová dráha, která se dotýká trajektorie Země v místě startu a trajektorie Marsu v místě přistání. Tato místa musí ležet na opačných stranách od Slunce, jak je znázorněno na obr. 4. Aby vše mohlo dobře proběhnout, je třeba sondě na oběžné dráze Země zvýšit velikost rychlosti o hodnotu Δv_1 a pak na oběžné dráze Marsu zvýšit velikost rychlosti o hodnotu Δv_2.

a) Určete velikosti přírůstků rychlostí Δv_1, Δv_2.

b) Určete dobu letu po přechodové trajektorii.



Obr. 4

Řešení

a) Rychlost pohybu sondy po Hohmannově eliptické trajektorii je dána vztahem (6). Po dosazení za $a = \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$ dostaneme

$$v = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)}. \tag{10}$$

V příslunní (bod P na obr. 4) musí být $r = r_1$. Po dosazení do vztahu (10) dostaneme

$$v_\mathrm{P} = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)} = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}. \tag{11}$$

Na počátku před urychlením je sonda na kruhové dráze Země, a tudíž má počáteční rychlost

$$v_0 = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r_1}}.$$

Je tedy

$$\Delta v_1 = v_\mathrm{P} - v_0 = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r_1}},$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right) \doteq 2{,}9\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Na konci Hohmannovy trajektorie má sonda rychlost o velikosti v_{A} a je třeba ji zvýšit, aby přešla z eliptické trajektorie na kruhovou o poloměru r_2, tj. aby získala rychlost o velikosti

$$v_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{S}}}{r_2}}.$$

Rychlost v_{A} získáme dosazením za $r = r_2$ do vztahu (10)

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2\varkappa M_{\mathrm{S}}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)} = \sqrt{2\varkappa M_{\mathrm{S}}\frac{r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}.$$

Je tedy

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{S}}}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) \doteq 2{,}6\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

b) Chceme-li dále určit dobu letu po přechodové trajektorii, musíme nejprve určit dobu jednoho oběhu T po trajektorii. Doba letu pak bude $t_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}T$.

Protože pohyb sondy probíhá po elipse, jejímž jedním ohniskem je Slunce, můžeme použít pro výpočet doby oběhu Keplerovy zákony.

Podle 2. Keplerova zákona se musí sonda po eliptické trajektorii pohybovat konstantní plošnou rychlostí o velikosti w danou vztahem

$$w = \frac{1}{2}r_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{P}},$$

do kterého dosadíme za $r_{\mathrm{P}} = a(1-e)$, za v_{P} ze vztahu (6). Potom dostaneme

$$w = \frac{1}{2}a(1-e)\sqrt{\varkappa M_{\mathrm{S}}\left(\frac{2}{r_{\mathrm{P}}} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{2}a(1-e)\sqrt{\varkappa M_{\mathrm{S}}\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right)},$$

$$w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{S}}a^2(1-e^2)}{a}} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{S}}}{a}},$$

kde b je vedlejší poloosa elipsy.
Dobu oběhu pak vypočítáme, když plochu elipsy πab dělíme plošnou rychlostí. Dostaneme

$$T = \frac{\pi ab}{w} = \frac{\pi ab}{\frac{b}{2}\sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{S}}}{a}}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\varkappa M_{\mathrm{S}}}}.$$

Doba letu po přechodové trajektorii je pak dána vztahem

$$t_{\mathrm{L}} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\varkappa M_{\mathrm{S}}}} \doteq 22\,422\,981\ \mathrm{s} \doteq 260\ \text{dní}.$$

Podrobnější informace o této problematice je možno nalézt v publikaci:

Šedivý, P. – Volf, I.: *Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli*. Knihovnička FO č. 43. Hradec Králové, MAFY 2000. Tuto publikaci je rovněž možné stáhnout z Internetu – http://www.uhk.cz/fo nebo z http://fo.cuni.cz.

Poznámka

Úlohu b) je rovněž možné řešit velmi jednoduše přímým užitím 3. Keplerova zákona: označíme-li T dobu letu sondy po přechodové trajektorii,

$$a = \frac{1 + 1{,}52}{2}\ \mathrm{AU} = 1{,}26\ \mathrm{AU}$$

délku hlavní poloosy přechodové trajektorie. Pro Zemi pak je $a_1 = 1$ AU, $T_1 = 1$ rok. Potom

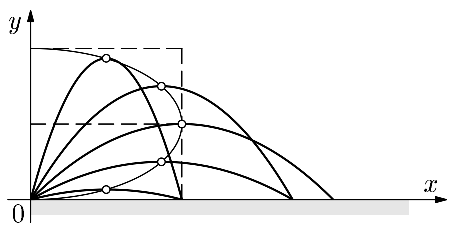
$$T = \left(\frac{a}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}} T_1,$$

$$t_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} T \doteq 260\ \text{dní}.$$

Ve třetí úloze se budeme zabývat vrhem šikmo vzhůru v homogenním tíhovém poli Země.

3. Elipsa jako geometrické místo bodů

Z odpalovacího zařízení je kulička (kterou je možno považovat za hmotný bod) vystřelována stejně velkou počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ pod různými úhly α. Dokažte, že geometrické místo vrcholů parabolických drah, po kterých se kulička pohybuje, je elipsa (obr. 5).



Obr. 5

Řešení

Pro souřadnice vrcholu paraboly při vrhu šikmo vzhůru platí vztahy

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}, \tag{12}$$

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{13}$$

Chtěli bychom dokázat, že pro různé úhly α leží vrcholy všech parabol na elipse. Z rovnic (12) a (13) můžeme vyjádřit

$$\cos\alpha = \frac{xg}{v_0^2 \sin\alpha}, \tag{14}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{2yg}{v_0^2}. \tag{15}$$

Rovnici (13) umocníme na druhou, pak do ní dosadíme za $\sin^2\alpha$ z rovnice (14). Dostaneme

$$\cos^2\alpha = \frac{x^2 g^2}{v_0^4 \frac{2yg}{v_0^2}} = \frac{x^2 g^2}{2v_0^2 yg} = \frac{x^2 g}{2yv_0^2}. \tag{16}$$

Dále použijeme vztahu

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

kam dosadíme z rovnic (14) a (15). Dostaneme

$$\frac{2yg}{v_0^2} + \frac{x^2 g}{2yv_0^2} = 1. \tag{17}$$

Rovnici (11) vynásobíme výrazem $2yv_0^2$ a dále upravíme na tvar

$$x^2 + 4y^2 = \frac{2yv_0^2}{g}.$$

Postupnými úpravami se nyní pokusíme provést doplnění na druhou mocninu dvojčlenu a dále upravovat, tj.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 2y\frac{v_0^2}{4g} + \left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2,$$

$$\frac{x^2}{4} + \left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2,$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2} = 1. \tag{18}$$

Rovnice (18) je rovnicí elipsy se středem $S = \left[0; \frac{v_0^2}{4g}\right]$ a poloosami $a = \frac{v_0^2}{2g}$, $b = \frac{v_0^2}{4g}$, tj. $a = \frac{b}{2}$.

Při vrhu šikmo vzhůru víme, že maximální dolet je pro úhel $\alpha = 45°$. Tomu odpovídají souřadnice vrcholu této paraboly $x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$, $y_{\max} = \frac{v_0^2}{4g}$. y-ová souřadnice vrcholu na ose y této paraboly je tedy vlastně y-ovou souřadnicí středu elipsy a zároveň určuje délku poloosy b, x-ová souřadnice určuje délku hlavní poloosy a (obr. 5).

Literatura:

[1] Šedivý, P. – Volf, I.: *Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli*. Knihovnička FO č. 43, Hradec Králové, MAFY 2000. http://www.uhk.cz/fo nebo http://fo.cuni.cz

[2] http://www.akademon.cz/source/qua.htm

[3] http://www.astrolexikon.webzdarma.cz/planety/quaoar/quaoar.htm

[4] http://cs.wikipedia.org/wiki/sedna_(planetka)

[5] http://www.stanford.edu/~klynn/mars_paper.htm