KAPITOLY ZE SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Přemysl Šedivý

Obsah

Úvod

Tento studijní text je určen k přípravě účastníků Fyzikální olympiády na řešení úloh z relativistické mechaniky. Navazuje na učebnice fyziky pro gymnázia [1] a [5] [1]). Přináší jiný pohled na relativistickou kinematiku a doplňuje učivo z relativistické dynamiky na úrovni, pro kterou postačí matematické znalosti studenta střední školy.

1 Výklad relativistické kinematiky pomocí časoprostorových grafů a metody koeficientu k

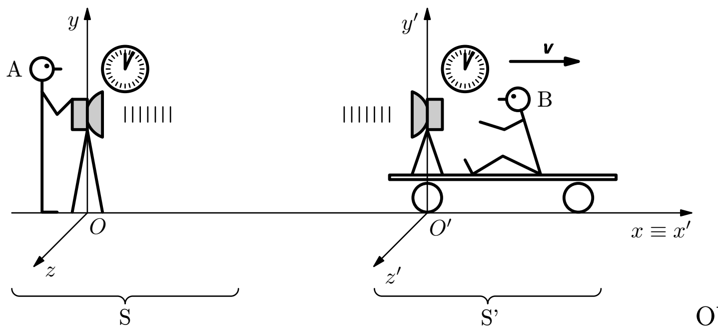
1.1 Východiska speciální teorie relativity

Einsteinova speciální teorie relativity vychází ze dvou experimentálně ověřených základních principů, kterými jsou

1. Princip relativity: Všechny inerciální soustavy jsou stejně vhodné pro popis fyzikálních dějů. Ve všech platí stejné fyzikální zákony.

2. Princip stálé rychlosti světla: Ve všech inerciálních soustavách je rychlost světla ve vakuu ve všech směrech stejná a má tutéž velikost c.

Poznatky relativistické kinematiky jednoduše odvodíme metodou koeficientu k, kterou popsal r. 1964 *Herman Bondi* ve své populární knize *Relativita a zdravý smysl* [2]. Přitom využijeme časoprostorové grafy, jakési „grafické jízdní řády“.



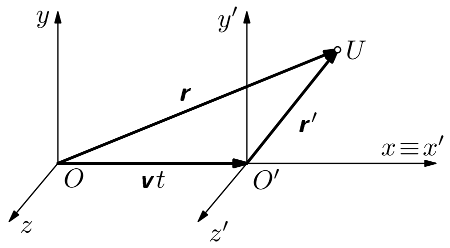
Obr. 1

[1]Použijeme také stejné značky pro fyzikální veličiny, např. l_0 a m_0 pro klidovou délku a hmotnost, l a m pro relativistickou délku a hmotnost.

Budeme vycházet z modelové situace znázorněné na obr. 1. Dva pozorovatelé A, B jsou vybaveni přesnými hodinami a radiotechnickými přístroji pro vzájemnou komunikaci. Pozorovatel A je v klidu v inerciální vztažné soustavě S, ve které zvolíme kartézskou souřadnicovou soustavu $Oxyz$. Pozorovatel B se pohybuje rovnoměrně po ose x soustavy S stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Vztažná soustava S' spojená s pozorovatelem B, ve které zavedeme podle obr. 1 souřadnicovou soustavu $O'x'y'z'$, je ovšem rovněž inerciální. V okamžiku, kdy se pozorovatelé míjejí, nastavíme na jejich hodinách stejný čas $t = t' = 0$.

V klasické Newtonově mechanice se předpokládá, že pokud dojde k nějaké *události*, bude ji v obou vztažných soustavách příslušet stejný čas $t = t'$ a polohové vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ určující místo události v obou vztažných soustavách budou splňovat vztah $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}t$, který plyne z obr. 2. Pro přepočet údajů charakterizujících událost ve vztažné soustavě S' na údaje, které platí ve vztažné soustavě S, tedy použijeme soustavu rovnic nazývanou *Galileova transformace*:

$$x = x' + vt', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t'. \tag{1}$$



Obr. 2

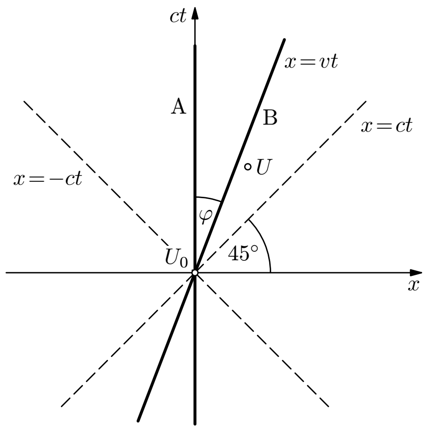
Princip konstantní rychlosti světla je v rozporu s Galileovou transformací. Jestliže vyšleme v čase $t = t' = 0$ světelný signál, který se ve vztažné soustavě S' bude pohybovat ve směru kladné poloosy x' rychlostí c, bude jeho pohyb v obou vztažných soustavách popsán rovnicemi

$$x' = ct', \qquad x = x' + vt = ct' + vt = ct + vt = (c+v)t. \tag{2}$$

Ve vztažné soustavě S se tedy bude signál pohybovat rychlostí $c + v$. Abychom překonali tento rozpor, musíme připustit, že Galileova transformace nepopisuje při velkých rychlostech dostatečně přesně přechod z jedné inerciální vztažné soustavy do druhé. Především však musíme opravit naše představy o prostoru a čase, které jsme získali při každodenním pozorování pohybů, jejichž rychlost je nepatrná ve srovnání s rychlostí světla.

1.2 Co je to koeficient k

Vraťme se k situaci na obr. 1. Omezíme se na děje, které probíhají na ose $x \equiv x'$ a zobrazíme je v dvojrozměrném časoprostorovém grafu (obr. 3) tak, jak se jeví pozorovateli A ve vztažné soustavě S. Každý bod U roviny je obrazem nějaké události, která se stala v určitém okamžiku někde na ose x. Na vodorovnou osu budeme v určitém měřítku nanášet polohovou souřadnici x události a na svislou ve stejném měřítku čas události vynásobený rychlostí světla ve vakuu, tedy dráhu ct, kterou by urazil světelný nebo rádiový signál (dále jen signál) od okamžiku $t = 0$, kdy se oba pozorovatelé míjeli. Tato událost U_0 je zobrazena v počátku grafu. Pro události spojené s šířením signálů vyslaných pozorovatelem A v čase $t = 0$ oběma směry podél osy x platí



Obr. 3

$$x = \pm ct\,. \tag{3}$$

V grafu je tedy jejich pohyb zobrazen osami kvadrantů. Pohyb pozorovatele B je zobrazen přímkou o rovnici $x = vt$ kterou budeme nazývat *světočára* pozorovatele B. Tato přímka svírá s časovou osou úhel φ, o kterém platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}\,. \tag{4}$$

Relativní klid pozorovatele A vzhledem k vztažné soustavě S je zobrazen přímkou o rovnici $x = 0$. Světočára pozorovatele A splývá tedy se svislou osou grafu.

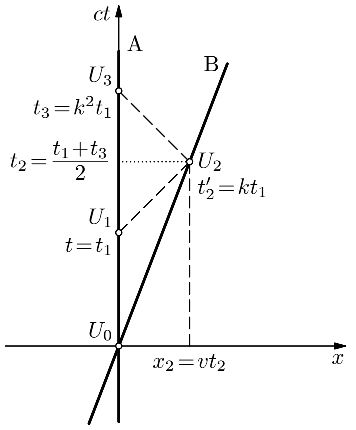
Vyšleme signál od pozorovatele A k pozorovateli B a zpět (obr. 4). Koeficient, kterým musíme vynásobit čas na hodinách u vysílače v okamžiku vyslání signálu, abychom dostali čas na hodinách u přijímače v okamžiku příjmu signálu, budeme nazývat *koeficient k*. Podle principu konstantní rychlosti světla se signál šíří stejně z hlediska obou pozorovatelů a podle principu relativity musí být koeficient k stejný v případě, kdy signál vyšle pozorovatel A, jako když jej vyšle pozorovatel B. Jestliže pozorovatel vyšle signál v čase $t = t_1$ (událost U_1), doletí k pozorovateli B v čase $t'_2 = kt_1$ (událost U_2) a odpověď se vrátí k pozorovateli A v čase $t_3 = kt_2' = k^2 t_1$ (událost U_3) [2]). V grafu je pohyb signálu zobrazen úsečkami rovnoběžnými s osami kvadrantů. Z obr. 4 je zřejmé, že podle pozorovatele A nastala událost U_2 v čase $t_2 = (t_1 + t_3)/2$ ve vzdálenosti x_2, kterou signál urazil za dobu $(t_3 - t_1)/2$. Z toho

$$x_2 = v\frac{t_1 + t_3}{2} = c\frac{t_3 - t_1}{2}\,. \tag{5}$$

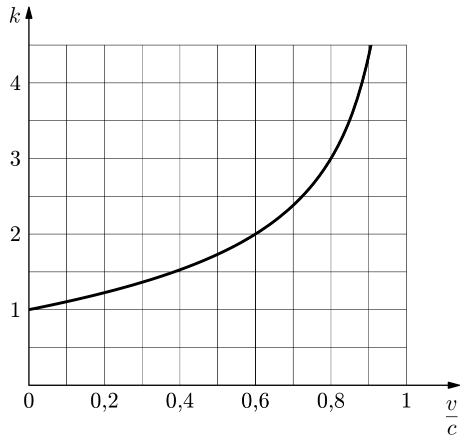
Dosazením za t_3 a úpravou dostaneme

$$vt_1\frac{k^2 + 1}{2} = ct_1\frac{k^2 - 1}{2}\,, \qquad \boxed{k = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}} \tag{6}$$

Závislost koeficientu k na relativní rychlosti v obou pozorovatelů znázorňuje graf na obr. 5.



Obr. 4



Obr. 5

Známe-li hodnotu koeficientu k, můžeme vypočítat rychlost v užitím vztahu

$$\boxed{v = c \cdot \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}} \tag{7}$$

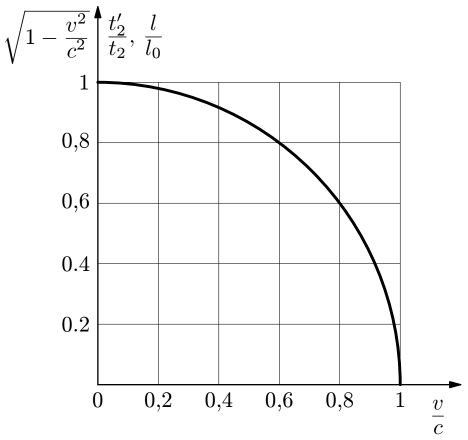
[2]Pro větší přehlednost jsou časové relace připsány k obrazům jednotlivých událostí. Na svislou osu ovšem nevynášíme čas, ale veličinu ct.

1.3 Dilatace času

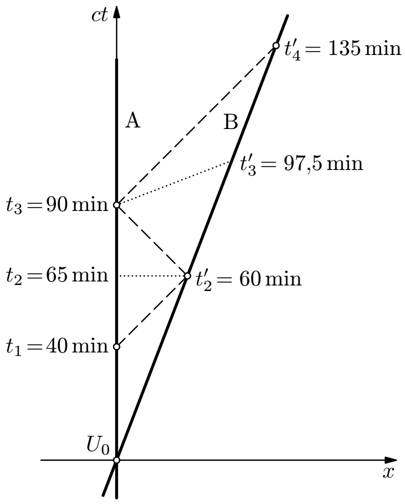
Vraťme se ještě jednou k ději znázorněnému na obr. 4. Podle pozorovatele A zachytil pozorovatel B signál v čase $t_2 = (t_1 + k^2 t_1)/2$. Víme také, že v okamžiku příjmu ukazovaly hodiny pozorovatele B čas $t_2' = kt_1$, a tento údaj může být uveden v signálu, který se vrátil k pozorovateli A. Ten může porovnat oba časové údaje:

$$\frac{t_2'}{t_2} = \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}}{\dfrac{2c}{c-v}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1\,, \qquad \boxed{t_2' = t_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1} \tag{8}$$

Pozorovatel A dojde k závěru, že hodiny pozorovatele B jdou pomaleji. Z grafu na obr. 6 je zřejmé, že tento výsledek bude tím markantnější, čím více se bude rychlost pozorovatele B blížit k rychlosti světla ve vakuu.



Obr. 6



Obr. 7

Pozorovatel B ovšem v souladu s principem relativity zjistí, že vzhledem k jeho vztažné soustavě S' jdou pomaleji hodiny pozorovatele A. Ukažme si to na konkrétním příkladě (obr. 7). Nechť

$$k = \frac{3}{2} \text{ tj. } v = \frac{5}{13}c = 1{,}16 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Signál, který pozorovatel A vyšle v čase $t_1 = 40$ min, dorazí k pozorovateli B, když jeho hodiny ukazují $t_2' = 60$ min. Zpětný signál, který nese informaci o čase t_2' dorazí k pozorovateli A v čase $t_3 = 90$ min. Vyšleme-li v tomto okamžiku k pozorovateli B další signál s informací o čase t_3, dorazí k němu v okamžiku, kdy jeho hodiny ukazují čas $t_4' = 135$ min. Podle pozorovatele A nastala druhá událost v čase

$$t_2 = (40 \text{ min} + 90 \text{ min})/2 = 65 \text{ min}\,,$$

ale podle pozorovatele B nastala třetí událost v čase

$$t_3' = (60 \text{ min} + 135 \text{ min})/2 = 97{,}5 \text{ min}\,.$$

Oba pozorovatelé dojdou ke stejnému výsledku: $\dfrac{t_3}{t_3'} = \dfrac{t_2'}{t_2} = \dfrac{12}{13} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2}$.

1.4 Dopplerův jev

Jestliže pozorovatel A vysílá pravidelné signály s periodou T_0 (obr. 8), přijímá je pozorovatel B, který se vzdaluje rychlostí v, s periodou

$$\boxed{T = kT_0 = T_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}} \qquad (9)$$

Frekvence vysílače f_0 a frekvence přijímaného signálu f jsou ve vztahu

$$\boxed{f = \frac{f_0}{k} = f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}} \qquad (10)$$

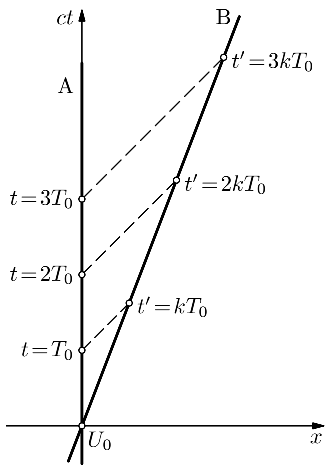
Ke stejnému výsledku dojdeme samozřejmě i v případě, že signály bude vysílat pozorovatel B a přijímat pozorovatel A.

Úlohy

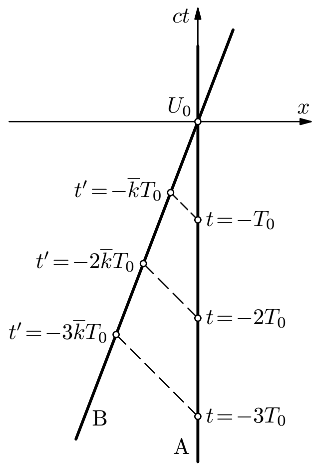
1. Jakou rychlostí by se od Země vzdalovala kosmická loď, jestliže signály vysílané z lodi s frekvencí přesně 1 MHz by na Zem přicházely s frekvencí 950 kHz? Obíhání Země kolem Slunce zanedbejte.

2. Na obr. 9 je časoprostorový graf pro dobu před událostí U_0, kdy se pozorovatel B přibližuje k pozorovateli A rychlostí v. Jestliže pozorovatel A vysílá signály s periodou T_0, přijímá je pozorovatel B s periodou $T = \overline{k}T_0$. Dokažte, že platí

$$\overline{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,. \qquad (11)$$



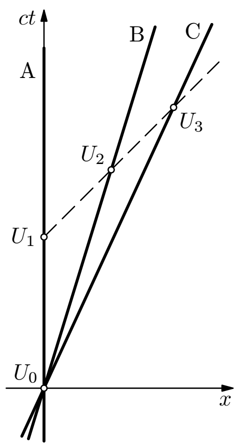
Obr. 8



Obr. 9

1.5 Skládání rychlostí

Nechť současně s pozorovatelem B se pohybuje po ose x ještě pozorovatel C stálou rychlostí u vzhledem k soustavě S. V okamžiku $t = 0$ také pozorovatel C minul právě pozorovatele A a na jeho hodinách byl nastaven čas $t'' = 0$ (Obr. 10). Rychlost pozorovatele C vzhledem ke vztažné soustavě S', kterou by naměřil pozorovatel B, označíme u'. Signál vyslaný pozorovatelem A v čase $t = t_1$ (událost U_1) přijme pozorovatel B v čase $t'_2 = k(v) \cdot t_1$ a pozorovatel C v čase $t''_3 = k(u) \cdot t_1$. Na druhou část pohybu signálu se ovšem můžeme dívat také tak, jako by jej vyslal pozorovatel B v čase t'_2 a platí tedy $t''_3 = k(u') \cdot t'_2$. Příslušné koeficienty jsou



Obr. 10

$$k(v) = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \qquad k(u) = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}, \qquad k(u') = \sqrt{\frac{c+u'}{c-u'}}. \tag{12}$$

Porovnáním uvedených vztahů a úpravami dostaneme:

$$k(u) \cdot t_1 = k(u') \cdot t_2' = k(u') \cdot k(v) \cdot t_1 \,, \qquad k(u) = k(u') \cdot k(v) \,, \tag{13}$$

$$\sqrt{\frac{c+u}{c-u}} = \sqrt{\frac{c+u'}{c-u'}} \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \,, \tag{14}$$

$$(c+u)(c-u')(c-v) = (c-u)(c+u')(c+v) \,, \qquad u(c^2+u'v) = c^2(u'+v) \,, \tag{15}$$

$$\boxed{u = \frac{u'+v}{1+\dfrac{u'v}{c^2}}} \tag{16}$$

Získali jsme relativistický vzorec pro skládání rychlostí rovnoběžných s osou x.

Úlohy

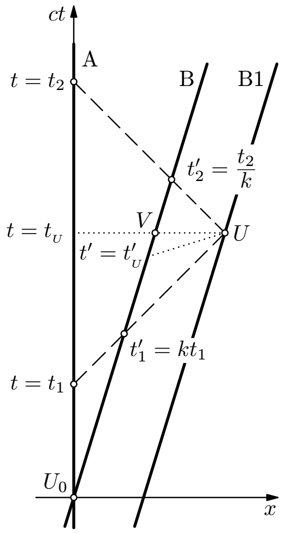
3. Ze vzorce (16) vyjádřete rychlost u'. Nový vzorec porovnejte s výchozím.

4. Jestliže do pravé strany vzorce (16) dosadíme rychlosti, pro které platí $0 < v < c$ a $0 < u' < c$, pak také platí $0 < u < c$. Složením dvou podsvětelných rychlostí dostaneme opět podsvětelnou rychlost. Dokažte.

1.6 Kontrakce délky

Se vztažnou soustavou S' nechť se pohybuje tyč rovnoběžná s osou x, jejíž jeden konec je v místě pozorovatele B a druhý má konstantní souřadnici $x' = l_0$ rovnou klidové délce tyče. Pohyb druhého konce tyče zobrazíme v grafu světočárou B1 (obr. 11). Chce-li pozorovatel A změřit délku tyče, musí *v tomtéž okamžiku* podle svých hodin určit polohu obou konců. Za tím účelem vyšle v čase $t = t_1$ signál, který se odrazí na konci tyče (událost U) a vrátí se v čase $t = t_2$. K odrazu tedy došlo v čase t_U a ve vzdálenosti x_U, kde

$$t_U = \frac{t_1 + t_2}{2}\,, \qquad x_U = c\,\frac{t_2 - t_1}{2}\,. \tag{17}$$



Obr. 11

V tomtéž okamžiku se pozorovatel B a s ním i začátek tyče nacházel ve vzdálenosti

$$x_V = v \cdot t_U = v\,\frac{t_1 + t_2}{2} \quad \text{(událost } V\text{)}\,. \tag{18}$$

Z hlediska pozorovatele A má tedy tyč délku

$$l = x_U - x_V = c\frac{t_2 - t_1}{2} - v\frac{t_2 + t_1}{2} = (c - v)\frac{t_2}{2} - (c + v)\frac{t_1}{2} = \frac{c - v}{2}(t_2 - k^2 t_1). \tag{19}$$

Signál vyslaný pozorovatelem A minul pozorovatele B v čase $t'_1 = kt_1$ a po odrazu od konce tyče v čase $t'_2 = t_2/k$. Z toho pozorovatel B určí klidovou délku tyče

$$l_0 = c\,\frac{t'_2 - t'_1}{2} = \frac{c}{2k}(t_2 - k^2 t_1)\,. \tag{20}$$

porovnáním obou výsledků dostaneme

$$\frac{l}{l_0} = \frac{(c - v)k}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1\,, \qquad \boxed{l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{21}$$

Délka tyče l naměřená pozorovatelem A je tedy menší než její klidová délka l_0.

U pohybujících se těles se zmenšují jen rozměry ve směru pohybu, zatímco rozměry kolmé ke směru pohybu se zachovávají. K tomu dojdeme jednoduchou úvahou: Připevněme k vozíku pozorovatele B svislou tyč délky l_0 tak, že její dolní konec se bude pohybovat po ose x, a stejnou svislou tyčí opatřeme i stanoviště pozorovatele A. Kdyby se tyč pozorovatele B při pohybu zkrátila, její konec by v čase $t = 0$ proběhl pod koncem tyče pozorovatele A. Podle pozorovatele B ovšem jeho tyč stojí v klidu a tyč pozorovatele A se pohybuje rychlostí o velikosti v ve směru záporné poloosy x'. Podle principu relativity by měl horní konec tyče pozorovatele A proběhnout pod horním koncem tyče pozorovatele B, což nesouhlasí s předcházejícím předpokladem. Ke stejnému rozporu dojdeme i když budeme předpokládat, že se svislá tyč při pohybu prodlouží. Z toho je zřejmé, že délka pohybující se tyče kolmé ke směru pohybu je stejná jako její délka klidová.

1.7 Relativistické efekty při malých rychlostech, přibližné výpočty

Při řešení úloh ze speciální teorie relativity, ve kterých se jedná o pohyby s rychlostí mnohem menší než rychlost světla ve vakuu, nebo s rychlostí, která se k rychlosti světla ve vakuu přibližuje, je účelné používat přibližných vzorců. Ty umožňují jednodušším výpočtem získat prakticky stejné výsledky jako při použití vzorců původních. V tomto studijním textu použijeme přibližné vzorce

$$\sqrt{1 \pm A} \approx 1 \pm \frac{A}{2}\,, \qquad \frac{1}{1 \pm A} \approx 1 \mp A\,, \qquad (1 \pm A)^2 \approx 1 \pm 2A\,, \tag{22}$$

$$\frac{1+A}{1+B} \approx 1 + A - B\,, \qquad \frac{1+A}{1-A} \approx 1 + 2A \tag{23}$$

platné pro $|A| \ll 1$ a $|B| \ll 1$. Tyto vzorce a jejich kombinace jsou vhodné nejen pro numerické výpočty, ale i pro úpravy složitějších výrazů.

Vztah (21) pro výpočet kontrakce délky můžeme při malých rychlostech upravit na tvar

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx l_0\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = l_0 - \frac{l_0 v^2}{2c^2}\,. \tag{24}$$

Délka ve směru pohybu se tedy zkrátí o

$$\Delta l \approx l_0 - l = \frac{l_0 v^2}{2c^2}\,. \tag{25}$$

Podobně zjednodušíme výpočet dilatace času podle (8):

$$t_2' = t_2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx t_2\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = t_2 - \frac{t_2 v^2}{2c^2}\,. \tag{26}$$

Hodiny pozorovatele B budou tedy podle pozorovatele A ukazovat méně o

$$\Delta t = t_2 - t_2' \approx \frac{t_2 v^2}{2c^2}\,. \tag{27}$$

Výpočet koeficientu k podle (6) při malých rychlostech zjednodušíme na

$$k = \sqrt{\frac{1+\dfrac{v}{c}}{1-\dfrac{v}{c}}} \approx \sqrt{1+2\frac{v}{c}} \approx 1+\frac{v}{c}\,. \tag{28}$$

Jestliže pozorovatel A vysílá periodický signál s periodou T_0 a vlnovou délkou $\lambda_0 = cT_0$, bude jej pozorovatel B, který se vzdaluje od pozorovatele A rychlostí $v \ll c$, přijímat s periodou a vlnovou délkou

$$T \approx T_0\left(1+\frac{v}{c}\right), \qquad \lambda = cT \approx cT_0\left(1+\frac{v}{c}\right) = \lambda_0\left(1+\frac{v}{c}\right). \tag{29}$$

Vlnová délka se zvětší o

$$\Delta\lambda = \frac{v}{c}\lambda_0\,. \tag{30}$$

Při skládání malých rychlostí upravíme vztah (16) na

$$u = \frac{u'+v}{1+\dfrac{u'v}{c^2}} \approx (u'+v)\left(1-\frac{u'v}{c^2}\right) = u'+v-\frac{(u'+v)u'v}{c^2}\,. \tag{31}$$

Úlohy

5. O kolik se zpozdí za jeden rok hodiny umístěně v kosmické stanici obíhající kolem Země konstantní rychlostí 7,9 km/s?

6. O kolik se zkrátí pro pozorovatele na letišti délka nadzvukového letadla o klidové délce 10 m při rychlosti 2 000 km/h?

7. Jakou rychlostí se od nás vzdaluje galaxie, jestliže v jejím optickém spektru je červená čára vodíku posunuta z $\lambda_0 = 656{,}3$ nm na $\lambda = 678{,}1$ nm?

1.8 Lorentzova transformace

Každá událost, která proběhla na ose x, je ve vztažné soustavě S pozorovatele A určena polohovou souřadnicí x a časem t. Jak se stejná událost jeví ve vztažné soustavě S' pozorovatele B? Dejme tomu, že uvažovanou událostí U bude odraz signálu vyslaného pozorovatelem A v čase $t = t_1$, který se vrátil v čase $t = t_2$ (obr. 11). Tento signál minul pozorovatele B v čase $t_1' = kt_1$ a při návratu v čase $t_2' = t_2/k$. Z hlediska pozorovatele A platí

$$x = c\,\frac{t_2 - t_1}{2}\,, \quad t = \frac{t_2 + t_1}{2}\,. \quad \text{Z toho} \quad t_2 = \frac{ct + x}{c}\,, \quad t_1 = \frac{ct - x}{c}\,. \tag{32}$$

Z hlediska pozorovatele B platí analogicky

$$x' = c\,\frac{t_2' - t_1'}{2}\,, \quad t' = \frac{t_2' + t_1'}{2}\,. \tag{33}$$

Dosazením a úpravami dostaneme rovnice pro transformaci souřadnic ze vztažné soustavy S do vztažné soustavy S':

$$x' = c\,\frac{\dfrac{t_2}{k} - kt_1}{2} = \frac{\dfrac{ct + x}{k} - k(ct - x)}{2} = \frac{x(1 + k^2) + ct(1 - k^2)}{2k} =$$

$$= \frac{\dfrac{2cx - 2vct}{c - v}}{2\sqrt{\dfrac{c + v}{c - v}}} = \frac{c(x - vt)}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{34}$$

$$t' = \frac{\dfrac{t_2}{k} + kt_1}{2} = \frac{ct + x}{2ck} + \frac{k(ct - x)}{2c} = \frac{ct + x + k^2ct - k^2x}{2ck} =$$

$$= \frac{ct(1 + k^2) - x(k^2 - 1)}{2ck} = \frac{\dfrac{2c^2t - 2xv}{c - v}}{2c\sqrt{\dfrac{c + v}{c - v}}} = \frac{c^2t - xv}{c\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{t - \dfrac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{35}$$

Zbývající dvě prostorové souřadnice y a z se při přechodu ze vztažné soustavy S do vztažné soustavy S' nemění, jako se nemění délky tyčí kolmých ke směru pohybu. Kompletní *Lorentzova transformace* je tedy vyjádřena soustavou rovnic:

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = \frac{t - \dfrac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}} \tag{36}$$

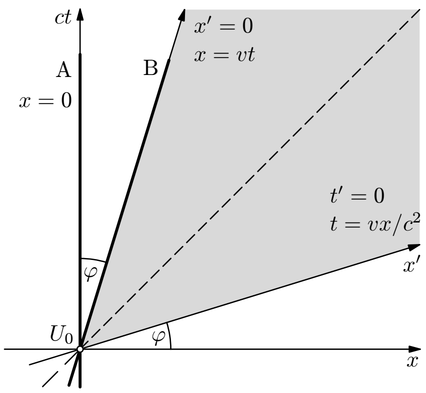
Úloha

8. Řešením soustavy rovnic (36) jako soustavy s neznámými x, y, z a t nalezněte inverzní Lorentzovu transformaci pro přechod ze vztažné S' do vztažné soustavy S. Obě transformace porovnejte. Jak by vypadal obr. 1, kdybychom ho nakreslili z hlediska pozorovatele B?

1.9 Relativnost současnosti

Pro pozorovatele A nastaly současně s událostí U_0, kdy jej právě míjel pozorovatel B, všechny události, které jsou zobrazeny jako body vodorovné osy x časoprostorového grafu určené rovnicí $t = 0$ (obr. 12). Podobně pro pozorovatele B nastaly současně s událostí U_0 všechny události, pro které platí $t' = 0$. V grafu vyplní přímku x', jejíž rovnice plyne z (35):

$$t - \frac{xv}{c^2} = 0\,. \qquad ct = \frac{xv}{c}\,. \tag{37}$$



Obr. 12

Pro všechny body přímky x' platí

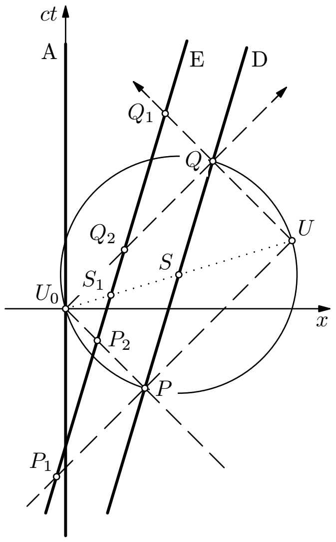
$$\frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \operatorname{tg}\varphi\,. \tag{38}$$

Její odchylka od vodorovné osy x je tedy stejná jako odchylka světločáry pozorovatele B od svislé osy ct. Kdyby pozorovatel B konstruoval časoprostorový graf, pak události, které jsme dosud zobrazovali na jeho světločáře, by zobrazoval na svislé ose, a události, které se zobrazily na přímce x', by zobrazoval na vodorovné ose.

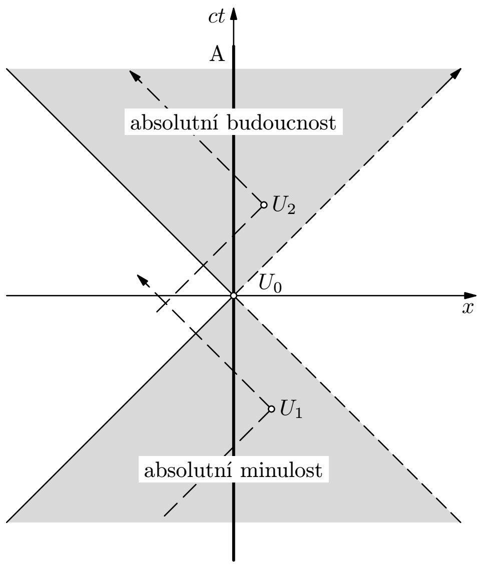
Mějme nyní nějakou událost U různou od události U_0, pro kterou platí $|x| > |ct|$. Existuje pozorovatel, kterému se událost U jeví jako současná s událostí U_0? Sestrojme kružnici nad průměrem U_0U (obr. 13). Obrazy signálů, které se odrazily proti sobě při událostech U_0 a U, ji protnou v bodech P, Q. Pozorovateli D, jehož světločárou je přímka PQ, se budou události U, U_0 jevit jako současné, neboť jím vyslané signály při události P se vrátily za stejnou dobu při události Q. Podle něj došlo k událostem U_0 a U současně s událostí S zobrazenou středem úsečky PQ, která nastala uprostřed časového intervalu mezi událostmi P a Q.

Ke stejnému závěru dojde i každý jiný pozorovatel E, jehož světočára je rovnoběžná se světočárou pozorovatele D. Z podobnosti trojúhelníků na obr. 13 plynou rovnosti $P_1S_1 = S_1Q_1$, $P_2S_1 = S_1Q_2$. Podle pozorovatele E tedy události U_0, U a S_1 nastaly současně.

Jestliže pro souřadnice události platí $|x| < |ct|$, nedá se předcházející konstrukce provést, protože signály odražené opačným směrem při událostech U_0 a U se minou (obr. 14). Každá událost U_1 zobrazená v dolním kvadrantu časoprostorového grafu se podle pozorovatele v kterékoliv inerciální vztažné soustavě uskutečnila dříve než událost U_0. Všechny události zobrazené v této oblasti jsou *absolutně minulé* vzhledem k události U_0. Mezi ně patří i všechny události, které byly *příčinou* události U_0.



Obr. 13



Obr. 14

Naopak každá událost U_2 zobrazená v horním kvadrantu grafu se podle pozorovatele v kterékoliv inerciální vztažné soustavě uskutečnila později než událost U_0. Všechny události zobrazené v této oblasti jsou *absolutně budoucí* vzhledem k události U_0. Mezi ně patří i všechny události, které budou *následkem* události U_0.

Události, jejichž obrazy leží v pravém a levém kvadrantu grafu označujeme jako *relativně současné*, nebo také *absolutně vzdálené*. Žádná z nich nemůže být příčinou ani následkem události U_0 a každá může podle pozorovatele v některé inerciální vztažné soustavě proběhnout současně s událostí U_0.

Rozšíříme-li naše úvahy na děje, které probíhají v rovině určené osami x a y vztažné soustavy, můžeme je zobrazit v trojrozměrném časoprostorovém grafu (obr. 15). Pohyb světelných a rádiových signálů, které v čase $t = 0$ prolétly všemi směry počátkem vztažné soustavy, je zobrazen kuželovou plochou popsanou rovnicí

$$x^2 + y^2 = (ct)^2 \,, \tag{39}$$

kterou nazýváme *světelný kužel*. Uvnitř dolní části světelného kužele, kde platí

$$x^2 + y^2 < (ct)^2 \,, \qquad t < 0 \,, \tag{40}$$

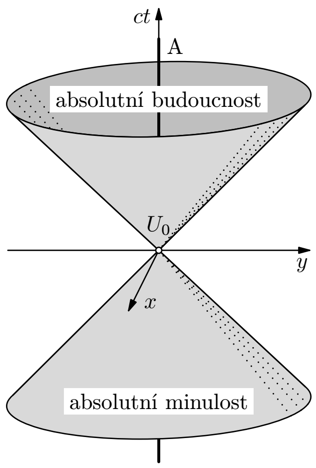
jsou zobrazeny všechny události absolutně minulé k události U_0, uvnitř horní části, kde platí

$$x^2 + y^2 < (ct)^2 \,, \qquad t > 0 \,, \tag{41}$$

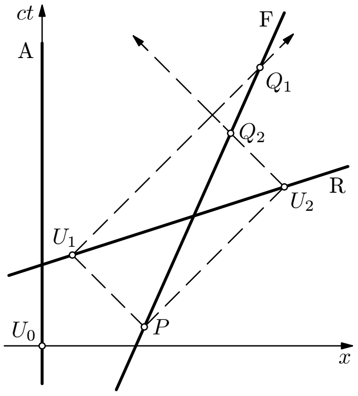
jsou zobrazeny všechny události absolutně budoucí k události U_0. Vně světelného kužele, kde platí

$$x^2 + y^2 > (ct)^2 \,, \tag{42}$$

jsou zobrazeny všechny událostí relativně současné k události U_0.



Obr. 15



Obr. 16

Analogicky i ve čtyřrozměrném časoprostoru o souřadnicích x, y, z a ct zavádíme světelný kužel jako nadplochu popsanou rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \,. \tag{43}$$

Nadplochu však není možné názorně zobrazit v trojrozměrném eukleidovském prostoru.

Úlohy

9. Pozorovatel A stál vedle trati a sledoval okolo projíždějící vlak, v jehož středu seděl pozorovatel B. Do začátku a konce vlaku udeřily blesky a světlo od obou dorazilo k oběma pozorovatelům současně v okamžiku, kdy pozorovatel B míjel pozorovatele A. Podle kterého z pozorovatelů proběhly zásahy začátku a konce vlaku bleskem současně? Podle kterého nikoliv a jaké bylo podle něj jejich pořadí?

10. Užitím Lorentzovy transformace dokažte, že při přechodu z inerciální vztažné soustavy S do inerciální vztažné soustavy S' platí

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \,.$$

To znamená, že hodnota výrazu $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ příslušející nějaké události se při přechodu ze vztažné soustavy S do vztažné soustavy S' nemění. Takový výraz nazýváme *invariantní* vzhledem k Lorentzově transformaci.

1.10 Nepřekročitelnost rychlosti světla ve vakuu

Předpokládejme, že nějaký objekt R se pohybuje vzhledem k pozorovateli A ve směru kladné poloosy x rychlostí větší, než je rychlost světla ve vakuu. Jeho světočára v časoprostorovém grafu svírá s vodorovnou osou úhel menší než 45° a můžeme na ni vyznačit dvě události U_1, U_2, přičemž událost U_1 nastala podle pozorovatele A dříve než událost U_2 (obr. 16). Pozorovatel A může tedy předpokládat, že událost U_1 je příčinou události U_2.

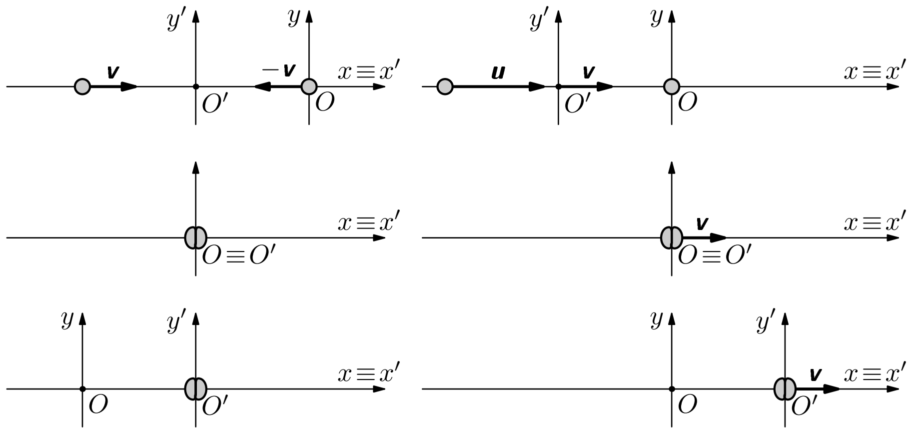
Signály, které se odrazily proti sobě při událostech U_1 a U_2 byly současně vyslány pozorovatelem F (událost P). Jestliže se pozorovatel F pohybuje rovnoměrně vzhledem k pozorovateli A týmž směrem jako objekt R dostatečně velkou rychlostí (ale menší než rychlost světla), dojde k tomu, že signál odražený při události U_2 přijme dříve než signál odražený při události U_1 (události Q_1, Q_2). Zjistí tedy, že událost U_2 se uskutečnila dříve než událost U_1 a nemůže proto být jejím důsledkem. Dospěli jsme k závěru, který je v rozporu s příčinnou souvislostí obou událostí. Předpoklad o nadsvětelné rychlosti objektu R byl tedy nereálný. Žádný materiální objekt se podle speciální teorie relativity nemůže pohybovat rychleji než elektromagnetický signál ve vakuu.

2 Hybnost a energie

2.1 Relativistická hmotnost

Mezi základní zákony newtonovské mechaniky patří *zákon zachování hmotnosti* a *zákon zachování hybnosti*. Podle nich je v kterékoliv inerciální vztažné soustavě konstantní celková hmotnost a také celková hybnost každého izolovaného souboru pouze vzájemně působících těles. Předpokládáme-li, že tyto zákony platí i v relativistické mechanice, dojdeme k závěru, že hmotnosti jednotlivé částice není konstantní, ale závisí na její rychlosti.

K odvození této závislosti použijeme myšlenkový pokus, při kterém dvě *stejné* částice uvedeme do pohybu proti sobě a způsobíme tím jejich dokonale nepružný centrální ráz. Situaci před rázem a po rázu popíšeme nejprve vzhledem k inerciální vztažné soustavě S' s počátkem ve hmotném středu této dvojice částic (obr. 17a), pak vzhledem k inerciální vztažné soustavě S, jejíž počátek se před rázem pohybuje s jednou z částic (obr. 17b).



Obr. 17a Obr. 17b

Ve vztažné soustavě S' se obě částice před rázem pohybují stejně velkými rychlostmi $\boldsymbol{v}$ a $-\boldsymbol{v}$ a mají stejně velké hybnosti opačného směru. Celková hybnost dvojice částic je nulová a podle zákona zachování hybnosti se částice při rázu zastaví, spojí se v jedinou částici a ta zůstane v klidu.

Popis děje vzhledem ke vztažné soustavě S je poněkud složitější. Jedna částice je před rázem v počátku vztažné soustavy S v klidu. Vztažná soustava S' se vzhledem ke vztažné soustavě S pohybuje stálou rychlostí o velikosti v.

Velikost u rychlosti druhé částice vzhledem ke vztažné soustavě S určíme podle relativistického vztahu (16) pro skládání rychlostí, kde položíme $u' = v$:

$$u = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{44}$$

Po rázu se spojené částice nacházejí v počátku vztažné soustavy S' a pohybují se tedy vzhledem ke vztažné soustavě S rychlostí v.

Podle klasické mechaniky by se hmotnost m částice neměla změnit při jejím uvedením do pohybu ani při nepružné srážce s druhou částicí. V takovém případě by celková hybnost dvojice částic před rázem měla v soustavě S velikost

$$m \cdot u + m \cdot 0 = \frac{2mv}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\,, \tag{45}$$

ale po rázu $2mv$, což by bylo v rozporu se zákonem zachování hybnosti.

Předpokládejme tedy, že hmotnost částice není konstantní, ale závisí na její rychlosti. Označme m_0 hmotnost částice v klidu, m_v a m_u hmotnosti téže částice při rychlostech v a u. Podle zákona zachování hmotnosti je celková hmotnost dvojice částic před rázem stejná jako po rázu, tedy $m_0 + m_u$. Podle zákona zachování hybnosti pak platí

$$m_u \cdot u = (m_u + m_0)v\,. \tag{46}$$

Z toho určíme poměr obou hmotností:

$$\frac{m_u}{m_0} = \frac{v}{u - v} = \frac{v}{\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} - v} = \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \tag{47}$$

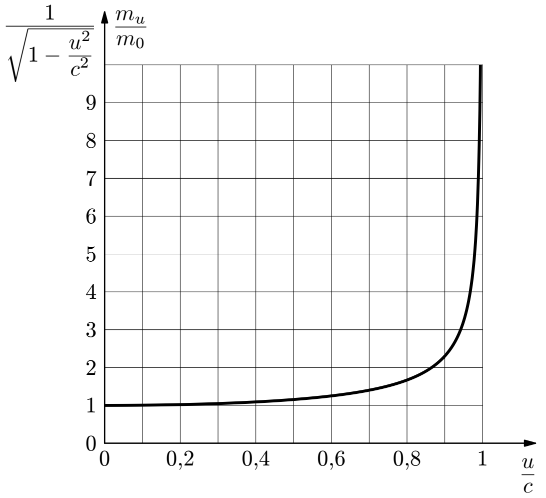
Platí také

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - \frac{\left(\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{c^2} = 1 - \frac{4v^2c^2}{(c^2 + v^2)^2} = \frac{(c^2 - v^2)^2}{(c^2 + v^2)^2}\,, \tag{48}$$

$$\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\,. \tag{49}$$

Porovnáním vztahů (47) a (49) dostaneme hledanou závislost *relativistické* hmotnosti částice na její rychlosti, jejíž graf je na obr. 18:

$$\frac{m_u}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\,, \qquad \boxed{m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} \tag{50}$$



Obr. 18

Z průběhu grafu je zřejmé, že rychlost částice s nenulovou klidovou hmotností m_0 nemůže nikdy dosáhnout rychlosti světla ve vakuu, protože relativistická hmotnost částice by přitom neomezeně vzrostla.

Známe-li klidovou hmotnost částice m_0 a hmotnost za pohybu m_u, můžeme určit rychlost u částice:

$$m_u^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m_0^2\,, \qquad u^2 = c^2\left(1 - \frac{m_0^2}{m_u^2}\right)\,, \qquad \boxed{u = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m_u^2}}} \tag{51}$$

2.2 Neměnnost náboje

Na rozdíl od hmotnosti částice, její elektrický náboj na rychlosti nezávisí a při přechodu z jedné inerciální vztažné soustavy do druhé se nemění. Svědčí o tom např. experimentální fakt, že atomy a molekuly látek jsou elektricky neutrální, ačkoliv rychlosti elektronů v atomových obalech různých atomů jsou různé a značně se liší od rychlostí protonů v atomových jádrech.

V homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ působí na částici s nábojem Q stálá síla $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$ nezávislá na rychlosti částice.

2.3 Pohyb částice s nulovou počáteční rychlostí, na kterou působí stálá síla

Částici o klidové hmotnosti m_0, která byla v klidu, uvedeme působením stálé síly $\boldsymbol{F}$ do pohybu rychlostí $\boldsymbol{v}$. V klasické fyzice se předpokládá, že hmotnost částice se nemění a 2. pohybový zákon platí ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m_0\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = m_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{dt} = m_0\boldsymbol{a}\,. \tag{52}$$

Pohyb je tedy rovnoměrně zrychlený a řídí se kinematickými zákony

$$v = at\,, \qquad s = \frac{1}{2}at^2\,, \qquad a = \frac{F}{m_0}\,, \tag{53}$$

kde a je velikost konstantního zrychlení. To platí velmi přesně, dokud dosažená rychlost je mnohem menší než rychlost světla ve vakuu.

Má-li popis pohybu vyhovovat i při velkých rychlostech, musíme v 2. pohybovém zákoně přihlédnout i ke změně hmotnosti a použít jej ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{a}\,. \tag{54}$$

S rostoucí hmotností částice se zrychlení částice vyvolané působením stálé síly postupně zmenšuje, rychlost roste čím dál pomaleji a nepřekročí rychlost světla ve vakuu. Kinematické zákony (53) musíme opravit.

Uvedeme-li hmotný bod z klidu do pohybu, je jeho hybnost rovna impulsu síly. Je-li síla konstantní, platí

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_v = \boldsymbol{F}t\,, \qquad p = m_v v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Ft\,. \tag{55}$$

Úpravou dostaneme vztah pro výpočet rychlosti:

$$m_0^2 v^2 = F^2t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\,, \quad v^2 = \frac{F^2t^2}{m_0^2 + \frac{F^2t^2}{c^2}}\,, \qquad \boxed{v = \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}}} \tag{56}$$

Vztah pro výpočet dráhy dostaneme integrací:

$$s = \int_0^t \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}}\,\mathrm{d}t\,. \tag{57}$$

Použijeme substituci $z = m_0^2c^2 + F^2t^2\,,\quad \mathrm{d}z = 2F^2t\,\mathrm{d}t\,.$

$$\int \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{c}{2F}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{2F}\cdot 2z^{\frac{1}{2}} + C = \frac{c}{F}\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2} + C\,, \tag{58}$$

$$s = \left[\frac{c}{F}\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}\right]_0^t = \frac{c}{F}\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2} - \frac{c}{F}m_0c\,, \tag{59}$$

$$\boxed{s = \frac{m_0c^2}{F}\left(\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}} - 1\right)} \tag{60}$$

Na začátku pohybu, kdy $Ft \ll m_0c$, můžeme vztahy (56) a (60) zjednodušit:

$$v \approx \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2}} = \frac{F}{m_0}t = at\,, \tag{61}$$

$$s \approx \frac{m_0c^2}{F}\left(1 + \frac{F^2t^2}{2m_0^2c^2} - 1\right) = \frac{Ft^2}{2m_0} = \frac{1}{2}at^2\,. \tag{62}$$

Dostali jsme stejné vztahy jako v klasické fyzice.

Jestliže naopak pohyb probíhá tak dlouho, že $Ft \gg m_0c$, můžeme vztahy (56) a (60) upravit na:

$$v \approx \frac{Ftc}{\sqrt{F^2t^2}} = c\,, \qquad s \approx \frac{m_0c^2}{F}\left(\sqrt{\frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}} - 1\right) = ct - \frac{m_0c^2}{F}\,. \tag{63}$$

Rychlost částice se přibliží k rychlosti světla ve vakuu a téměř se nemění; pohyb je téměř rovnoměrný.

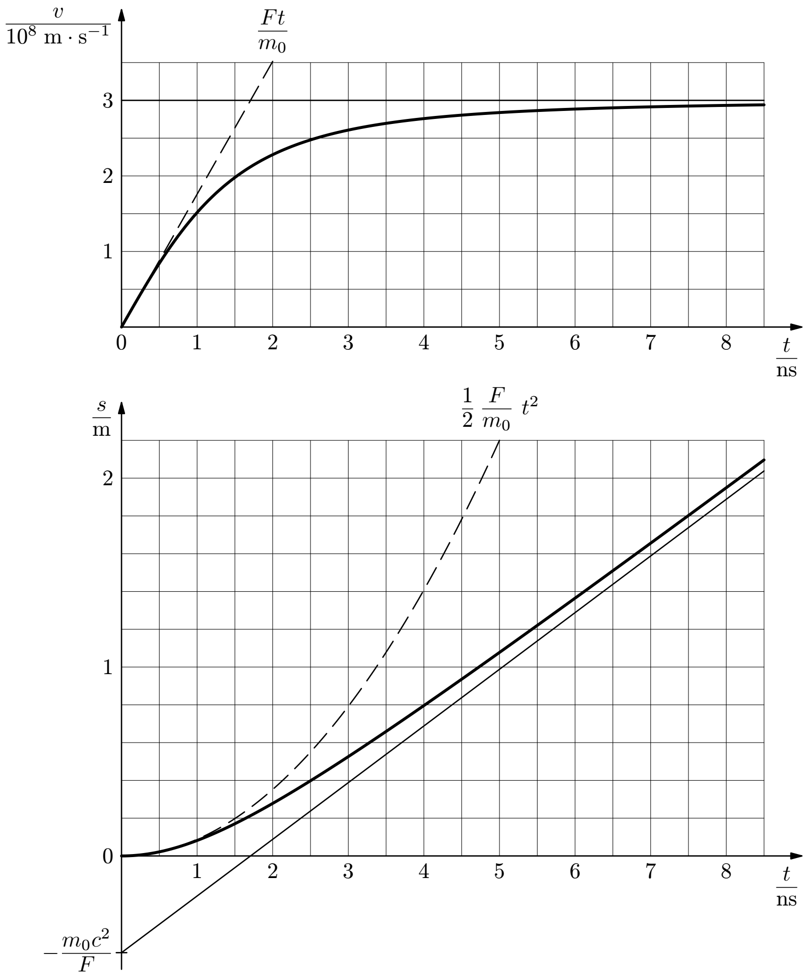
Pro ilustraci sestrojíme grafy rychlosti a dráhy elektronu s nulovou počáteční rychlostí, který ve vakuu v homogenním elektrickém poli o intenzitě $|\boldsymbol{E}| = 1{,}00\cdot 10^6\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$ proletěl dráhu $L = 2{,}00$ m. (Viz obr. 19; čárkovaně je zakresleno klasické řešení.) Do vztahů (56) a (60) dosadíme hodnoty veličin:

$$c = 3{,}00\cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,\quad m_0 = 9{,}11\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\,,\quad F = |\boldsymbol{E}|e = 1,60\cdot 10^{-13}\ \mathrm{N}$$

a dostaneme vztahy pro výpočet číselných hodnot $\{v\}$, $\{s\}$:

$$\{v\} = \frac{4{,}80 \cdot 10^{-5} \cdot \{t\}}{\sqrt{7{,}47 \cdot 10^{-44} + 2{,}56 \cdot 10^{-26}\{t\}^2}}\,, \tag{64}$$

$$\{s\} = 0{,}513\left(\sqrt{1 + 3{,}43 \cdot 10^{17}\{t\}^2} - 1\right)\,. \tag{65}$$



Obr. 19

Určíme ještě, za jakou dobu t_1 proletí elektron dráhu L. Ze vztahu (60) vyjádříme

$$t = \frac{s}{c}\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{Fs}}\,. \tag{66}$$

Po dosazení $s = L = 2{,}00$ m dostaneme $t_1 = 8{,}2 \cdot 10^{-9}$ s.

Úloha

11. Dokažte, že relativistický graf dráhy na obr. 19 je úsekem hyperboly.

2.4 Energie

Kinetická energie pohybující se částice je rovna mechanické práci, kterou musíme vykonat, abychom částici uvedli z klidu do pohybu danou rychlostí. Pokud práci koná síla stálého směru a velikosti, platí

$$E_\mathrm{k} = W = Fs\,. \tag{67}$$

Jestliže rychlost $\boldsymbol{v}$, kterou částice dosáhne, je mnohem menší než rychlost světla ve vakuu, můžeme hmotnost částice považovat za konstantní ($m = m_0$) a pohyb za rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti $a = F/m_0$. Pak

$$W = Fs = m_0a \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}m_0(at)^2 = \frac{1}{2}m_0v^2\,. \tag{68}$$

Při malých rychlostech můžeme tedy kinetickou energii částice dostatečně přesně vypočítat podle klasického vzorce

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_0v^2\,. \tag{69}$$

Stejným způsobem můžeme určit i kinetickou energii částice pohybující se velkou rychlostí. Musíme však při výpočtu dráhy použít vztahy (60), (55) a (50):

$$W = Fs = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}} - 1\right) = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{m^2v^2}{m_0^2c^2}} - 1\right) =$$

$$= m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{v^2}{c^2}} - 1\right) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = (m - m_0)c^2\,, \tag{70}$$

kde $m = m_v$ je hmotnost částice za pohybu a m_0 její hmotnost klidová. Kinetická energie částice je rovna součinu přírůstku hmotnosti částice způsobené jejím uvedením do pohybu a druhé mocniny rychlosti světla ve vakuu:

$$\boxed{E_\mathrm{k} = (m - m_0)c^2} \tag{71}$$

Relativistický vzorec pro výpočet kinetické energie není v rozporu s klasickým vzorcem (69). Při malých rychlostech můžeme psát

$$(m - m_0)c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \,. \tag{72}$$

Klasický vzorec pro výpočet kinetické energie částice je tedy jen přibližným vyjádřením vzorce relativistického pro $v \ll c$.

Vraťme se ještě jednou k myšlenkovému pokusu na obr. 17a. Soustava dvou částic o celkové klidové hmotnosti $2m_0$ získala v soustavě S' uvedením do pohybu vnějšími silami celkovou kinetickou energii $E_\mathrm{k} = 2(m_v - m_0)c^2$ a její celková hmotnost se zvětšila na

$$M = 2m_v = 2m_0 + \frac{E_\mathrm{k}}{c^2} \,. \tag{73}$$

Během rázu už na částice žádné vnější síly nepůsobí. Částice se zastaví jen vzájemným působením, ztratí přitom kinetickou energii, ale o stejnou hodnotu $\Delta U = E_\mathrm{k}$ se zvětší *vnitřní energie* soustavy. Podle zákona zachování hmotnosti má nová částice vzniklá spojením původních částic i po rázu hmotnost

$$M = 2m_0 + \frac{\Delta U}{c^2} \,, \tag{74}$$

což je ovšem její hmotnost *klidová*. Vidíme, že zvýšením vnitřní energie se celková hmotnost soustavy částic změní stejně jako získáním energie kinetické. To nás vede k závěru, že klidová hmotnost částice je mírou její *klidové vnitřní energie*

$$\boxed{E_0 = m_0c^2} \tag{75}$$

a že *celková energie* částice pohybující se rychlostí v je

$$\boxed{E = E_0 + E_\mathrm{k} = m_0c^2 + (m - m_0)c^2 = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \,.} \tag{76}$$

Pro izolovaný soubor částic pak ze zákona zachování hmotnosti přímo plyne *zákon zachování energie*:

$$\boxed{\sum m = konst. \quad \Longleftrightarrow \quad \sum E = c^2 \sum m = konst.} \tag{77}$$

Teorie relativity tedy chápe zákon zachování hmotnosti a zákon zachování energie jako různé formy téhož fyzikálního zákona.

Vztah $E = mc^2$ je potvrzen energetickou bilancí jaderných reakcí a reakcí elementárních částic. Například při termonukleární reakci

$$^2_1\mathrm{H} + ^6_3\mathrm{Li} \rightarrow ^4_2\mathrm{He} + ^4_2\mathrm{He}$$

se součet klidových hmotností zmenší o

$$\Delta m_0 = 0{,}0239\ \mathrm{m_u} = 3{,}98 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{kg}$$

a součet kinetických energií se zvětší o ekvivalentní hodnotu

$$\Delta E_\mathrm{k} = \Delta mc^2 = 3{,}58 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 22{,}4\ \mathrm{MeV}\,.$$

Při tzv. *anihilaci* elektronu s pozitronem obě částice zanikají a nejčastěji vznikají dva fotony γ, přičemž kinetická energie každého je rovna klidové energii elektronu

$$m_\mathrm{e}c^2 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot (3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2 = 8{,}20 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 0{,}51\ \mathrm{MeV}\,.$$

Úlohy

12. Atom nuklidu uhlíku $^{12}_{6}\mathrm{C}$, který má relativní atomovou hmotnost $A_\mathrm{r} = 12$ (přesně), se skládá z šesti protonů, šesti neutronů a šesti elektronů o relativních atomových hmotnostech

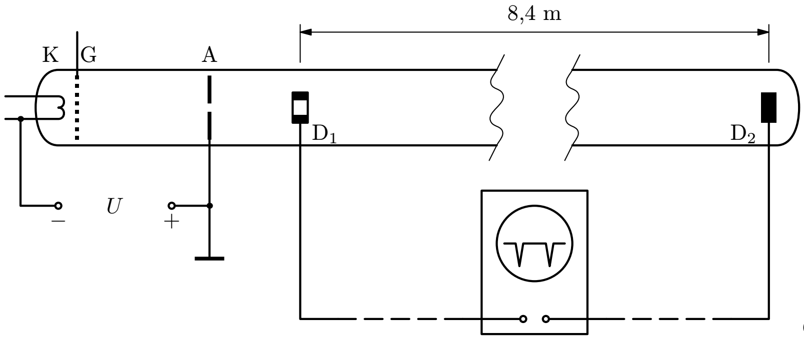
$$A_\mathrm{r}(\mathrm{p}) = 1{,}007\,276\,5\,,\ A_\mathrm{r}(\mathrm{n}) = 1{,}008\,664\,9\,,\ Ar(\mathrm{e}) = 0{,}000\ 548\,6\,.$$

Určete *vazební energii* jeho jádra E_j, tj. práci, kterou bychom museli vykonat, abychom jádro rozdělili na vzájemně na sebe nepůsobící protony a neutrony. Energii elektronového obalu atomu zanedbejte.

13. Vypočítejte úbytek celkové klidové hmotnosti jaderného paliva a produktů jeho štěpení za jeden rok v jaderné elektrárně o výkonu 1 000 MW a účinnosti 30 %.

2.5 Mezní rychlost

Bertocci r. 1964 experimentálně ověřoval, že rychlost elektronů urychlených elektrickým polem nemůže překročit rychlost světla ve vakuu. Použil k tomu dlouhou katodovou trubici, jejíž zjednodušené schéma je na obr. 20. Na anodu a katodu trubice bylo připojeno velmi vysoké napětí z Van de Graaffova generátoru. Řídicí elektrodou G byly z katody uvolňovány v krátkých pulsech elektrony, které po urychlení elektrickým polem mezi katodou a anodou vystupovaly do oblasti bez elektrického pole, prolétaly elektrodou D_1 a dopadaly na sběrnou elektrodu D_2. Z doby letu mezi elektrodami D_1 a D_2 měřené osciloskopem a ze vzdálenosti elektrod byla vypočítána rychlost elektronů při různých hodnotách anodového napětí. S rostoucím napětím se doba průletu zmenšovala čím dál pomaleji a blížila se k hodnotě rovné podílu vzdálenosti elektrod a rychlosti světla ve vakuu.



Obr. 20

Částice o klidové hmotnosti m_0 a náboji Q uvedená do pohybu působením elektrického pole o napětí U získá kinetickou energii rovnou práci vykonané elektrickou silou $\mathrm{W}_{\mathrm{el}} = UQ$ a její hmotnost se zvětší na

$$m = m_0 + \frac{E_\mathrm{k}}{c^2} = m_0 + \frac{UQ}{c^2}\,. \tag{78}$$

Podle (51)

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2}{m^2} = 1 - \frac{m_0^2}{\left(m_0 + \dfrac{UQ}{c^2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \dfrac{UQ}{m_0c^2}\right)^2}\,. \tag{79}$$

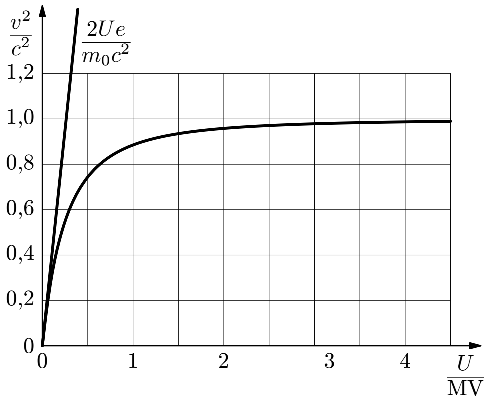
Pro $UQ \gg m_0c^2$ je hodnota druhého zlomku zanedbatelná a poměr v/c se blíží k jedné.

Je-li urychlovací napětí malé, dostaneme dostatečně přesný výsledek užitím klasického vzorce pro kinetickou energii:

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = UQ\,, \qquad (80)$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2UQ}{m_0c^2}\,. \qquad (81)$$

Pro elektron dosazením hodnot
$m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg,
$Q = e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C
dojdeme ke grafům na obr. 21.



Obr. 21

Úloha

14. Odvoďte vztah (81) ze vztahu (79) užitím přibližných vzorců (22).

2.6 Vztah mezi celkovou energií, klidovou energií a hybností částice

Upravme vztah (50) mezi relativistickou hmotností m, klidovou hmotností m_0 a okamžitou rychlostí v pohybující se částice:

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2\,, \qquad m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2\,.$$

Vynásobíme-li ještě obě strany rovnice c^2, dostanou všechny její členy jednoduchý fyzikální význam:

$$m^2c^4 - m^2v^2c^2 = m_0^2c^4\,, \qquad \boxed{E^2 - p^2c^2 = E_0^2\,.} \qquad (82)$$

Vztah mezi celkovou energií, klidovou energií a hybností částice, který jsme odvodili, se dá využít při řešení nejrůznějších úloh. Jako příklad odvodíme zákon dráhy částice uvedené do pohybu působením stálé síly. Do vztahu (82) dosadíme za celkovou energii součet klidové energie a spotřebované práce, za hybnost impuls síly:

$$(E_0 + Fs)^2 - F^2t^2c^2 = E_0^2\,, \qquad Fs = \sqrt{E_0^2 + F^2t^2c^2} - E_0\,. \qquad (83)$$

Z toho přímo dostaneme vztah (60)

$$s = \frac{E_0}{F}\left(\sqrt{1+\frac{F^2t^2c^2}{E_0^2}}-1\right) = \frac{m_0c^2}{F}\left(\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}}-1\right). \tag{84}$$

Důležité je, že pravá strana ve vztahu (82) je pro danou částici konstantní. Totéž musí platit i o výrazu $E^2-p^2c^2$ na levé straně, který tedy nezávisí na okamžité rychlosti částice a tedy ani na volbě inerciální vztažné soustavy, ve které částici pozorujeme. Je tedy *invariantní* vzhledem k Lorentzově transformaci.

Vztah (82) platí i pro *fotony* – kvanta elektromagnetického záření, která mají nulovou klidovou hmotnost a pohybují se rychlostí c. Energie fotonu záření o frekvenci f je

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}, \tag{85}$$

kde $h \doteq 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s je *Planckova konstanta* a λ vlnová délka záření ve vakuu. Z obecného vztahu (50) mezi hmotností a energií a ze vztahu (82) plyne pro relativistickou hmotnost a hybnost fotonu

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}, \qquad p = mc = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{86}$$

Úloha

15. Mezon π o klidové hmotnosti $m_{\pi 0} = 273{,}1 m_\mathrm{e}$ se rozpadl na lepton μ o klidové hmotnosti $m_{\mu 0} = 206{,}8 m_\mathrm{e}$ a mionové neutrino ν, jehož klidová hmotnost je zanedbatelná ve srovnání s klidovou hmotností elektronu, prakticky tedy nulová. Za předpokladu, že mezon π byl před rozpadem v klidu, určete kinetickou energii a hybnost leptonu a neutrina.

2.7 Druhý pohybový zákon při velkých rychlostech

Podle druhého pohybového zákona, zákona síly, je výslednice sil působících na hmotný bod v inerciální vztažné soustavě rovna derivaci jeho hybnosti podle času:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{a}. \tag{87}$$

V klasické mechanice, při rychlostech malých ve srovnání s rychlostí světla ve vakuu, můžeme hmotnost považovat za konstantní. Zákon síly vyjádříme proto s dostatečnou přesností ve tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \approx 0\,, \qquad \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}\,, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}\,. \tag{88}$$

Při velkých rychlostech musíme přihlížet k relativistickému vztahu mezi hmotností a rychlostí hmotného bodu:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad v = c\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}\,. \tag{89}$$

Hmotnost m hmotného bodu je přímo úměrná jeho celkové energii E, která se ovšem při pohybu mění. Změna energie je rovna práci vykonané výslednicí $\boldsymbol{F}$ sil, které na hmotný bod působí. Platí:

$$\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}E}{c^2} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{c^2} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t}{c^2}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\,. \tag{90}$$

Po dosazení do (87) dostáváme zákon síly ve tvaru:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c^2}\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{a}\,, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{mc^2}\boldsymbol{v}\,,} \tag{91}$$

ze kterého budeme vycházet v následující diskusi. Nejprve probereme speciální případy.

1. Síla působí ve směru pohybu
Jsou-li vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{v}$ souhlasně rovnoběžné, platí

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} = vF\,, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \frac{vF}{mc^2}\boldsymbol{v}\,. \tag{92}$$

Vektor $\boldsymbol{a}$ má stejný směr jako okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ a pro jeho velikost platí

$$\boxed{a = \frac{F}{m}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{F}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\,.} \tag{93}$$

2. Síla působí kolmo ke směru pohybu
Je-li vektor síly kolmý k vektoru okamžité rychlosti, platí $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} = 0$ a vztah (91) se zjednoduší na

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{m_0 \boldsymbol{a}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{\boldsymbol{F}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_0}.} \tag{94}$$

Například v kruhových urychlovačích nabitých elementárních částic uděluje magnetická dostředivá síla $\boldsymbol{F}_m$ částici o klidové hmotnosti m_0 nesoucí náboj Q dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}_d$, které ji udržuje na kruhové trajektorii o poloměru R. Přitom platí

$$F_m = BQv = ma_d = \frac{mv^2}{R} = \frac{m_0 v^2}{R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad mv = BQR. \tag{95}$$

V obřích kruhových urychlovačích, kde se rychlosti částic přibližují k rychlosti světla ve vakuu, můžeme psát $mc \approx BQR$ a pro maximální dosažitelnou energii částice dostáváme

$$E_{\max} = mc^2 \approx B_{\max} QRc, \tag{96}$$

kde $B_{\max}$ je velikost maximální magnetické indukce dosažitelné v prostoru urychlovací trubice.

Působí-li síla ve směru okamžité rychlosti nebo ve směru kolmém ke směru okamžité rychlosti, má zrychlení hmotného bodu směr působící síly. To nás nepřekvapuje, neboť v klasické fyzice, kdy pracujeme se vztahem (88), je rovnoběžnost obou vektorů samozřejmá. Při velkých rychlostech, působí-li síla šikmo ke směru pohybu, jsou však směry síly a zrychlení různé. K tomuto závěru dojdeme úpravou vztahu (91). Použijeme vektorovou rovnost

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}), \tag{97}$$

o jejíž platnosti se můžeme přesvědčit rozepsáním obou stran rovnosti na souřadnice. Podle něj

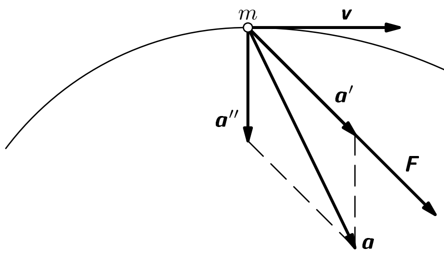
$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{v} = v^2\boldsymbol{F} - \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}) \tag{98}$$

a po dosazení do (91)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}) + m\boldsymbol{a}, \tag{99}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \underbrace{\frac{\boldsymbol{F}}{m}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}_{\boldsymbol{a}'} + \underbrace{\frac{1}{mc^2}\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{v})}_{\boldsymbol{a}''} .} \tag{100}$$

Zrychlení lze tedy vyjádřit jako vektorový součet dvou složek, z nichž jedna je orientována ve směru síly $\boldsymbol{F}$ a druhá je kolmá k vektoru $\boldsymbol{v}$ a leží v rovině určené vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{F}$ (obr. 22).



Obr. 22

Úloha

16. V homogenním magnetickém poli o indukci $B = 0{,}010$ T proletěl elektron kolmo k indukčním čarám po kruhovém oblouku o poloměru $R = 0{,}78$ m. Určete jeho hybnost, celkovou energii, hmotnost a rychlost.

2.8 Příklad na závěr

V urychlovači HERA v Hamburku, který byl uveden do provozu r. 1989, získávají elektrony celkovou energii $E_\mathrm{e} = 30$ GeV a protony celkovou energii $E_\mathrm{p} = 820$ GeV. Částice obíhají v opačných směrech ve dvou přibližně kruhových zásobních prstencích o poloměru $r = 1{,}0$ km umístěných nad sebou. Na čtyřech místech, kde se prstence kříží, probíhají srážkové pokusy.

a) O kolik jsou rychlosti protonů a elektronů menší než rychlost světla ve vakuu?
b) Jak silná magnetická pole udržují částice na kruhových trajektoriích?
c) Jakou rychlost u, hmotnost $m_\mathrm{e}^\star$ a celkovou energii $E_\mathrm{e}^\star$ má elektron před srážkou ve vztažné soustavě spojené s protonem?

Klidové hmotnosti protonu a elektronu jsou

$$m_{\mathrm{p}0} = 1{,}67\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}, \quad m_{\mathrm{e}0} = 9{,}11\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}.$$

Obě částice mají náboj o absolutní hodnotě $e = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C.

Řešení

a) Úpravou vztahu (76) pro celkovou energii částice

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

dostaneme pro $m_0c^2 \ll E$:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2} \approx c\left(1 - \frac{m_0^2c^4}{2E^2}\right) = c - \frac{m_0^2c^5}{2E^2}\,. \tag{101}$$

Pro dané hodnoty je rychlost protonu $v_p = c - 197\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, rychlost elektronu $v_e = c - 4{,}4\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$.

b) Dostředivé zrychlení uděluje částici magnetická síla. Při rychlosti, která je prakticky stejná jako rychlost světla ve vakuu, platí:

$$Bec \approx \frac{mc^2}{r} = \frac{E}{r}\,, \qquad B \approx \frac{E}{ecr}\,. \tag{102}$$

Magnetická indukce v protonovém prstenci má hodnotu $B = 2{,}7\ \mathrm{T}$ (kterou můžeme získat jen supravodivým vinutím chlazeným kapalným heliem). V elektronovém prstenci je $B = 0{,}10\ \mathrm{T}$.

c) Laboratoř se pohybuje rychlostí o velikosti v_p vzhledem k vztažné soustavě spojené s protonem. Elektron se vzhledem k vztažné soustavě spojené s laboratoří pohybuje stejným směrem rychlostí o velikosti v_e. Rychlost u elektronu vzhledem k soustavě spojené s protonem určíme pomocí relativistického vztahu

$$u = \frac{v_\mathrm{p} + v_\mathrm{e}}{1 + \dfrac{v_\mathrm{p} \cdot v_\mathrm{e}}{c^2}} \approx c \cdot \frac{1 - \dfrac{X}{2} + 1 - \dfrac{Y}{2}}{1 + \left(1 - \dfrac{X}{2}\right)\left(1 - \dfrac{Y}{2}\right)}\,, \tag{103}$$

kde

$$X = \frac{m_{\mathrm{p}0}^2c^4}{E_\mathrm{p}^2}\,, \quad Y = \frac{m_{\mathrm{e}0}^2c^4}{E_\mathrm{e}^2}\,. \tag{104}$$

Po úpravě

$$u \approx c \cdot \frac{2 - \dfrac{X+Y}{2}}{2 - \dfrac{X+Y}{2} + \dfrac{XY}{4}} = c \cdot \frac{1 - \dfrac{X+Y}{4}}{1 - \dfrac{X+Y}{4} + \dfrac{XY}{8}} \approx c\left(1 - \frac{XY}{8}\right)\,, \tag{105}$$

$$u \approx c\left(1-\frac{m_{\mathrm{p}0}^2 m_{\mathrm{e}0}^2 c^4}{8E_{\mathrm{p}}^2 E_{\mathrm{e}}^2}\right). \tag{106}$$

Pro dané hodnoty $u = c - 1{,}44 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Při této rychlosti má elektron hmotnost

$$m_{\mathrm{e}}^\star = \frac{m_{\mathrm{e}0}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \approx \frac{m_{\mathrm{e}0}}{\sqrt{1-\left(1-\dfrac{XY}{8}\right)^2}} \approx \frac{m_{\mathrm{e}0}}{\sqrt{1-\left(1-\dfrac{XY}{4}\right)}} = \frac{2m_{\mathrm{e}0}}{\sqrt{XY}}\,, \tag{107}$$

$$m_{\mathrm{e}}^\star \approx \frac{2m_{\mathrm{e}0}}{\dfrac{m_{\mathrm{e}0}m_{\mathrm{p}0}c^4}{E_{\mathrm{p}}E_{\mathrm{e}}}} = \frac{2E_{\mathrm{p}}E_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}0}c^4} \tag{108}$$

a celkovou energii

$$E_{\mathrm{e}}^\star = m_{\mathrm{e}}^\star c^2 \approx \frac{2E_{\mathrm{p}}E_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}0}c^2}\,. \tag{109}$$

Po dosazení $m_{\mathrm{e}}^\star = 9{,}3 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{kg}$, $E_{\mathrm{e}}^\star = 8{,}4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J} = 52\,000\ \mathrm{GeV}$.

Jiné řešení – užitím vztahu (82) mezi celkovou energií, kinetickou energií a hybností:

Označme p_{e}, p_{p} velikosti hybností elektronu a protonu ve vztažné soustavě spojené s laboratoří a $p_{\mathrm{e}}^\star$ velikost hybnosti elektronu ve vztažné soustavě spojené s protonem. Před srážkou je celková energie protonu a elektronu ve vztažné soustavě spojené s laboratoří $E_{\mathrm{e}} + E_{\mathrm{p}}$, ve vztažné soustavě spojené s protonem $E_{\mathrm{e}}^\star + E_{\mathrm{p}0}$. Celková hybnost protonu a elektronu v soustavě spojené s laboratoří má velikost $|p_{\mathrm{e}} - p_{\mathrm{p}}|$, protože částice se pohybují proti sobě. Celková hybnost ve vztažné soustavě spojené s protonem je $p_{\mathrm{e}}^\star$. V důsledku invariantnosti výrazu $E - p^2c^2$ platí:

$$(E_{\mathrm{e}}^\star + E_{\mathrm{p}0})^2 - p_{\mathrm{e}}^{\star 2}c^2 = (E_{\mathrm{e}} + E_{\mathrm{p}})^2 - (p_{\mathrm{e}} - p_{\mathrm{p}})^2c^2\,, \tag{110}$$

$$E_{\mathrm{p}0}^2 = E_{\mathrm{p}}^2 - p_{\mathrm{p}}^2c^2\,, \qquad E_{\mathrm{e}}^{\star 2} - p_{\mathrm{e}}^{\star 2}c^2 = E_{\mathrm{e}}^2 - p_{\mathrm{e}}^2c^2\,. \tag{111}$$

Odečtením rovnic (111) od rovnice (110) dostaneme:

$$E_{\mathrm{e}}^\star E_{\mathrm{p}0} = E_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{p}} + p_{\mathrm{e}}p_{\mathrm{p}}c^2\,, \tag{112}$$

Protože obě rychlosti částic v soustavě spojené s laboratoří se blíží rychlosti světla ve vakuu, je

$$p_{\mathrm{e}}c \approx m_{\mathrm{e}}c^2 = E_{\mathrm{e}}, \qquad p_{\mathrm{p}}c \approx m_{\mathrm{p}}c^2 = E_{\mathrm{p}}\,, \tag{113}$$

$$E_{\mathrm{e}}^{\star 2} = \frac{E_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{p}} + p_{\mathrm{e}}p_{\mathrm{p}}c^2}{E_{\mathrm{p}0}} \approx \frac{2E_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{p}}}{E_{\mathrm{p}0}} = \frac{2E_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}0}c^2}\,, \qquad m_{\mathrm{e}}^\star \approx \frac{2E_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}0}c^4}\,. \tag{114}$$

Literatura

[1] *Bartuška, K.:* Fyzika pro gymnázia – Speciální teorie relativity. 3. vydání, Prometheus, Praha, 2001.

[2] *Bondi, H.:* Relativity and Common Sense. Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, New York, 1964.

[3] *Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.:* Feynmanovy přednášky z fyziky, 1. díl. Fragment, Havlíčkův Brod, 2000.

[4] *Horský, J.:* Úvod do teorie relativity. SNTL, Praha, 1975.

[5] *Štoll, I.:* Fyzika pro gymnázia – Fyzika mikrosvěta. Prometheus, Praha, 1994.

Výsledky úloh

1. $k = f_0/f = 1{,}053$, $v = 0{,}0512c = 1{,}54 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2. Signál vyslaný pozorovatelem A v čase $t = t_1 < 0$ přijme pozorovatel B v čase $t' = \overline{k}t_1$ a odražený signál dojde k pozorovateli A v čase $t = \overline{k}^2 t_1$.

$$v\frac{1+\overline{k}^2}{2}|t_1| = c\frac{1-\overline{k}^2}{2}|t_1|\,, \qquad \overline{k}^2 = \frac{c-v}{c+v}\,.$$

3. $u' = \dfrac{u-v}{1-\dfrac{uv}{c^2}}\,.$

4. $(c-v)(c-u') > 0 \quad \rightarrow \quad (v+u')c < c^2 + vu' \quad \rightarrow \quad \dfrac{v+u'}{1+\dfrac{vu'}{c^2}} < c\,.$

5. 0,011 s. **6.** $1{,}7 \cdot 10^{-11}$ m. **7.** $0{,}033c = 1{,}0 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

8. $x = \dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad y = y'\,, \qquad z = z'\,, \qquad t = \dfrac{t'+\dfrac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

9. Zásahy začátku a konce vlaku bleskem nastaly dříve, než pozorovatel B dorazil k pozorovateli A. Podle pozorovatele B obě události proběhly ve stejné vzdálenosti rovné polovině klidové délky vlaku, tedy současně. Podle pozorovatele A byl začátek vlaku zasažen ve vzdálenosti menší než polovina délky vlaku a konec ve vzdálenosti větší než polovina délky vlaku. Jestliže světlo od obou blesků dorazilo současně, musel být podle pozorovatele A konec vlaku zasažen dříve než začátek.

11. Vztah (60) upravíme na tvar

$$\left(s+\frac{m_0c^2}{F}\right)^2=\frac{m_0^2c^4}{F^2}+c^2t^2\,,\qquad \frac{\left(s+\dfrac{m_0c^2}{F}\right)^2}{\left(\dfrac{m_0c^2}{F}\right)^2}-\frac{t^2}{\left(\dfrac{m_0c}{F}\right)^2}=1\,,$$

který je formálně stejný jako rovnice hyperboly $\dfrac{(x+m)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

12. $\Delta m=0{,}0989\ \mathrm{m_u}=1{,}64\cdot10^{-28}\ \mathrm{kg}$,
$E_\mathrm{j}=\Delta m\cdot c^2=1{,}48\cdot10^{-11}\ \mathrm{J}=92{,}4\ \mathrm{MeV}$.

13. $\Delta m=\dfrac{Pt}{\eta c^2}=1{,}17\ \mathrm{kg}$.

15. Řešením soustavy rovnic $\quad p_\mu=p_\nu,\qquad m_{\pi0}c^2=m_\mu c^2+m_\nu c^2\,,$

$$m_\mu^2c^4-p_\mu^2c^2=m_{\mu0}^2c^4\,,\qquad m_\nu^2c^4-p_\nu^2c^2=0$$

dostaneme

$$m_{\pi0}c^2=\sqrt{m_{\mu0}^2c^4+p_\mu^2c^2}+p_\mu c\,,\qquad p_\mu=p_\nu=\frac{(m_{\pi0}^2-m_{\mu0}^2)c}{2m_{\pi0}}=58,2m_\mathrm{e}\cdot c\,,$$

$$E_\nu=E_{\mathrm{k}\nu}=p_\nu c=58{,}2m_\mathrm{e}c^2=29{,}8\ \mathrm{MeV}\,,$$

$$E_\mu=E_{\pi0}-E_\nu=214{,}9m_\mathrm{e}c^2=109{,}8\ \mathrm{MeV}\,,$$

$$E_{\mathrm{k}\mu}=E_\mu-E_{\mu0}=8{,}1m_\mathrm{e}c^2=4{,}1\ \mathrm{MeV}\,.$$

16. $p=BeR=1{,}25\cdot10^{-21}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$,
$E=\sqrt{E_0^2+p^2c^2}=\sqrt{m_0^2c^4+B^2e^2R^2c^2}=3{,}8\cdot10^{-13}\ \mathrm{J}=2{,}4\ \mathrm{MeV}$,
$m=\dfrac{E}{c^2}=4{,}3\cdot10^{-30}\ \mathrm{kg}$, $v=\dfrac{p}{m}=2{,}9\cdot10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.