SETRVAČNÍKY A JEJICH APLIKACE

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Úvod

Předložený studijní text navazuje na dřívější texty [8], [9], které byly věnovány statice, kinematice a dynamice tuhého tělesa. V textu [9] jsme se vedle obecných zákonů mechaniky tuhého tělesa zabývali převážně jen jeho rotačním pohybem kolem nehybné osy a obecným rovinným pohybem. Předložený text rozšiřuje tyto poznatky o mechaniku prostorového pohybu tělesa kolem nehybného bodu a zabývá se především pohybem setrvačníku. Předpokládá znalost textu [9] anebo znalost základů dynamiky tuhého tělesa.

Poznatky o pohybu setrvačníku jsou nejen zajímavé, ale i důležité pro aplikace v jiných oblastech fyziky (např. Larmorova precese v atomistice), v astronomii (lunisolární precese Země), v technice (např. gyroskopické jevy u dopravních prostředků), ve vojenství (stabilizace letu střely) a i ve sportu (let disku).

Ve středolškolském učivu fyziky je věnováno dynamice rotačního pohybu tuhého tělesa málo místa a o prostorovém pohybu tělesa a o setrvačnících se nehovoří téměř vůbec. Důvody jsou především didaktické — jde o obtížnou partii mechaniky. Nakonec přesné řešení obecného pohybu setrvačníku pohybovými diferenciálními rovnicemi není známo — s výjimkou několika zvláštních případů.

Předložený studijní text podává kromě několika rozšiřujících poznatků o dynamice tuhého tělesa přibližnou teorii setrvačníku, která však je dostatečně přesná u technických setrvačníků (gyroskopů). Je zde také podán výklad některých aplikací teorie setrvačníků. Výklad je doplněn řešenými příklady a úlohami s uvedenými výsledky jejich řešení.

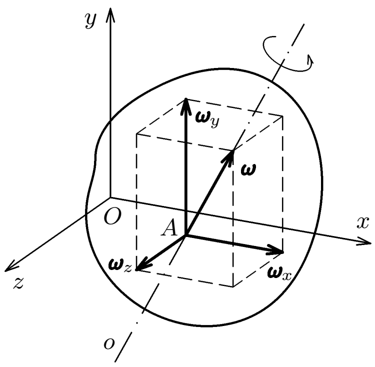
Text je určen zájemcům o fyziku z řad středoškolských i vysokoškolských studentů a učitelům fyziky. *Pro řešitele fyzikální olympiády kat. A, pokud je zařazen v daném soutěžním roce text k prostudování na téma SETRVAČNÍKY, je část předloženého textu ve článcích 1.6, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 a 3.1 povinný text k prostudování.* Ostatní text se doporučuje rovněž prostudovat.

1 Prostorová rotace tuhého tělesa kolem nehybného bodu

1.1 Eulerovy úhly

Zamezíme-li pohybu jednoho bodu tuhého tělesa, odebereme mu z původních šesti stupňů volnosti tři stupně. Tělesu tak zůstanou tři stupně volnosti a začne vykonávat *prostorovou rotaci* kolem nehybného bodu, kterým prochází *okamžitá osa rotace.*

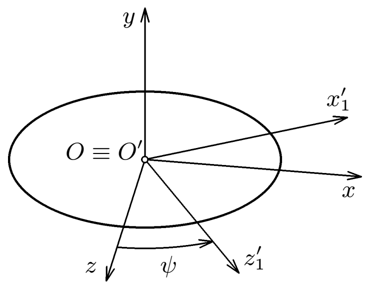
Příklad prostorové rotace tělesa je znázorněn na obr. 1. Okamžitá osa rotace o prochází bodem A, který je nehybný vůči zvolené inerciální vztažné soustavě $x,\ y,\ z$. Vektor $\boldsymbol{\omega}$ okamžité úhlové rychlosti rotace tělesa, který leží v ose o, je obecně funkcí času, tj. jeho velikost i směr se ve zvolené inerciální soustavě mění. Je zřejmé, že vektor $\boldsymbol{\omega}$ můžeme rozložit do tří vzájemně různých směrů. Jeden z těchto rozkladů je možný do směrů rovnoběžných s osami $x,\ y,\ z$ kartézké soustavy. Tento rozklad na tři rotace o úhlových rychlostech $\boldsymbol{\omega}_x,\ \boldsymbol{\omega}_y,\ \boldsymbol{\omega}_z$ však není z hlediska klasifikace pohybu, které těleso vykonává, nejvýhodnější.



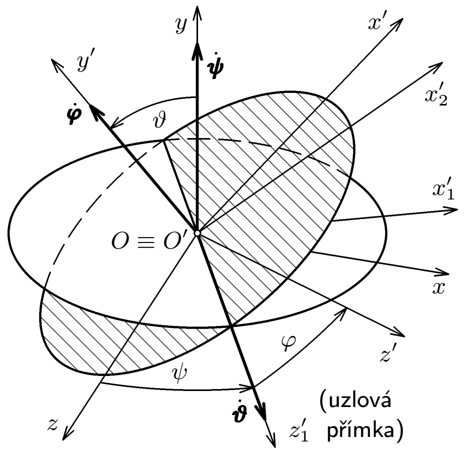
Obr. 1

Výhodný rozklad prostorové rotace na tři dílčí rotace zavedl již v polovině 18. století Leonard Euler a příslušné úhly se po něm nazývají *Eulerovy úhly.* Zvolme si inerciální kartézskou soustavu $x,\ y,\ z$, vůči níž budeme pohyb tělesa popisovat. S tuhým rotujícím tělesem pevně spojíme druhou kartézskou soustavu $x',\ y',\ z'$ (ta již nebude inerciální). Její počátek O' položíme do hmotného středu tělesa. Předpokládejme, že nehybným bodem bude právě hmotný střed (to ovšem není nutná kinematická podmínka). Počátky O, O' obou soustav ztotožníme a budeme předpokládat, že na počátku pohybu bude $x \equiv x',\ y \equiv y',\ z \equiv z'$. Naším úkolem je popsat polohu soustavy $x',\ y',\ z'$ po vykonání jisté rotace tělesa pomocí Eulerových úhlů, které se označují $\varphi,\ \psi,\ \vartheta$.

Zavedení Eulerových úhlů si znázorníme na pohybu kruhového disku, který nechť původně ležel v rovině $y = 0$ soustavy $x,\ y,\ z$ a který trojím otočením převedeme do výsledné polohy $x',\ y',\ z'$ s libovolnou orientací os vzhledem k inerciální soustavě $x,\ y,\ z$.



Obr. 2



Obr. 3

První otočení provedeme kolem osy y o úhel ψ (obr. 2), přičemž osa z', původně totožná s z, přejde do polohy z'_1 a osa x', původně totožná s x, do polohy x'_1. Druhé otočení disku vykonáme kolem nové osy z'_1, tzv. *uzlové přímky*, o úhel ϑ (obr. 3). Přitom osa x'_1 přejde do polohy x'_2 a osa y', původně totožná s y, do konečné polohy y'. Třetí otočení provedeme kolem této osy y' o úhel φ, při němž osa x'_2 přejde do konečné polohy x' a osa z'_1 do konečné polohy z' (obr. 3). V obr. 3 jsou znázorněny rovněž úhlové rychlosti $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\dot{\boldsymbol{\psi}}$, $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}$, které popisují rychlost změn Eulerových úhlů φ, ψ, ϑ a které leží v osách příslušných otočení.

Eulerovy úhly jsou důležité zejména pro popis pohybu setrvačníku, odtud také dostaly názvy:

φ … *úhel vlastní rotace*,
ψ … *precesní úhel*,
ϑ … *nutační úhel*.

Závěrem lze shrnout, že rotaci tělesa kolem nehybného bodu okamžitou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ lze rozložit na tři rotace buď kolem os kartézké soustavy nebo kolem os Eulerových úhlů v souladu s rovností

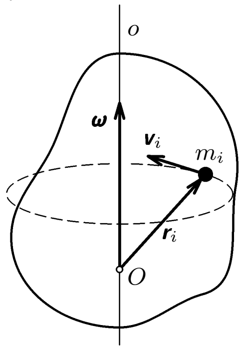
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_y + \boldsymbol{\omega}_z = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}}\,.$$

1.2 Kinetická energie rotujícího tuhého tělesa

V textu [9] jsme pojednali o rotaci tuhého tělesa vzhledem k nehybné ose, přičemž jako míru setrvačných účinků tělesa při této rotaci jsme zavedli veličinu *moment setrvačnosti* vzhledem k nehybné ose:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \,, \tag{1}$$

kde m_i je element hmotnosti tuhého tělesa a r_i je jeho vzdálenost od nehybné osy.



Obr.4

Při rotaci kolem okamžité osy o bude popis setrvačných účinků tuhého tělesa složitější. Vyjdeme ze vztahu pro kinetickou energii tělesa

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \,, \tag{2}$$

kde rychlost i–tého bodu vyjádříme užitím Eulerova vztahu

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \,, \tag{3}$$

přičemž veličiny jsou zřejmé z obr. 4. Rychlost vyjádříme v kartézských složkách užitím rozpisu vektorového součinu pomocí determinantu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}\,, & \boldsymbol{j}\,, & \boldsymbol{k} \\ \omega_x\,, & \omega_y\,, & \omega_z \\ x_i\,, & y_i\,, & z_i \end{vmatrix} = \\ &= \boldsymbol{i}(\omega_y z_i - \omega_z y_i) + \boldsymbol{j}(\omega_z x_i - \omega_x z_i) + \boldsymbol{k}(\omega_x y_i - \omega_y x_i) = \\ &= \boldsymbol{i} v_{xi} + \boldsymbol{j} v_{yi} + \boldsymbol{k} v_{zi} \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Uvědomíme-li si, že $v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$, dostaneme po dosazení do (2) vztah

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[(\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_y^2 z_i^2 - 2\omega_y \omega_z y_i z_i + \omega_z^2 y_i^2 + \omega_z^2 x_i^2 - 2\omega_x \omega_z x_i z_i + \omega_x^2 z_i^2 + \\ &\qquad + \omega_x^2 y_i^2 - 2\omega_x \omega_y x_i y_i + \omega_y^2 x_i^2) \,. \end{aligned}$$

Složky úhlové rychlosti neobsahují sčítací index i. Můžeme je proto vytknout před sumační znak. Po přeskupení členů dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2}\omega_x^2 \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) + \frac{1}{2}\omega_y^2 \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) + \frac{1}{2}\omega_z^2 \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) -$$

$$- \omega_x\omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_x\omega_z \sum_i m_i x_i z_i - \omega_y\omega_z \sum_i m_i y_i z_i \,. \qquad (5)$$

Výsledek pro kinetickou energii bude možné zapsat ve formálně jednodušším tvaru po zavedení veličin, které charakterizují rozložení hmotnosti v tělese vzhledem k okamžité poloze osy rotace. Tyto veličiny jsou složkami tenzoru setrvačnosti.

1.3 Tenzor setrvačnosti

Ve výrazu (5) vystupují členy se sumací přes celé těleso, které závisejí na rozložení hmotnosti vzhledem k uvažované poloze osy rotace a jsou tedy mírou setrvačných účinků tuhého tělesa při jeho prostorové orientaci. Přijmeme pro ně označení

$$J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)\,, \qquad (6)$$

$$J_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2)\,, \qquad (7)$$

$$J_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\,, \qquad (8)$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i\,, \qquad (9)$$

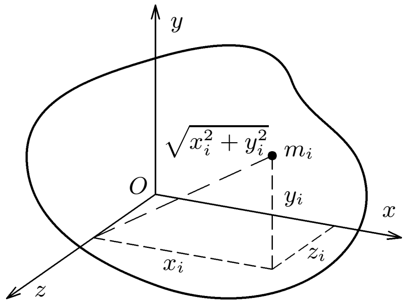
$$J_{xz} = J_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i\,, \qquad (10)$$

$$J_{yz} = J_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i\,. \qquad (11)$$

Těchto devět veličin tvoří složky obecnější veličiny, která charakterizuje setrvačné účinky tělesa při obecné rotaci a která se nazývá *tenzor setrvačnosti*. Lze je přehledně uspořádat do matice

$$J_{pq} = \begin{pmatrix} J_{xx}\,, & J_{xy}\,, & J_{xz} \\ J_{yx}\,, & J_{yy}\,, & J_{yz} \\ J_{zx}\,, & J_{zy}\,, & J_{zz} \end{pmatrix}\,, \qquad (12)$$

kde $p,\ q = x,\ y,\ z$. Veličiny $J_{xx},\ J_{yy},\ J_{zz}$, ležící v hlavní diagonále matice, se nazývají *momenty setrvačnosti* k osám uvažované kartézské soustavy.



Obr. 5

Např. u momentu setrvačnosti J_{zz} se podle výrazu (8) vyskytuje člen $(x_i^2 + y_i^2)$, který je podle obr. 5 druhou mocninou vzdálenosti bodu m_i od osy z. Je zřejmé, že momenty setrvačnosti mohou mít jen kladnou hodnotu.

Ostatní veličiny J_{pq}, pro $p \neq q$, které neleží v hlavní diagonále a mají smíšené koeficienty, se nazývají *deviační momenty*. Jsou vztaženy vždy ke dvěma různým osám. Platí pro ně $J_{pq} = J_{qp}$ a jsou tedy symetrické vzhledem k hlavní diagonále. Tenzor setrvačnosti má tedy jen šest nezávislých složek.

Deviační momenty mohou nabývat kladných, záporných a tedy i nulových hodnot. V každém tělese lze tedy vždy najít trojici vzájemně kolmých os $x',\ y',\ z'$, nehybných k tělesu, vzhledem k nimž všechny deviační momenty vymizí. Tedy transformací os $x,\ y,\ z$ do polohy $x',\ y',\ z'$ lze převést tenzor setrvačnosti do tvaru

$$J_{pq} = \begin{pmatrix} J_1\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & J_2\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & J_3 \end{pmatrix}\,, \tag{13}$$

kde $J_1 = J'_{xx},\ J_2 = J'_{yy},\ J_3 = J'_{zz}$ se nazývají *hlavní momenty setrvačnosti* a příslušné osy $x',\ y',\ z'$ *hlavní osy setrvačnosti*. Leží-li počátek $O \equiv O'$ vztažných soustav v hmotném středu tělesa hovoříme o *hlavních centrálních momentech setrvačnosti* a o *hlavních centrálních osách setrvačnosti*.

Existují-li v homogenním tělese osy souměrnosti, jsou vždy hlavními centrálními osami setrvačnosti. Tak u homogenní koule jsou všechny osy, které procházejí jejím středem, hlavní centrální osy. Stejný výsledek platí i pro homogenní krychli, i když zde všechny osy procházející jejím středem nejsou osami geometrické souměrnosti (je to dáno tím, že všechny tři hlavní momenty setrvačnosti vzhledem k osám kolmým ke stěnám krychle jsou stejné $J_1 = J_2 = J_3 = ma^2/6$). Všechny osy vyznačené číslicemi 1, 2, 3 v tabulce na str. 28, 29 v textu [9] (s výjimkou prvního zde uvedeného případu) jsou hlavními centrálními osami a momenty $J_1,\ J_2,\ J_3$ hlavními centrálními momenty setrvačnosti.

Po zavedení složek tenzoru setrvačnosti (6) až (11) můžeme kinetickou energii (4) zapsat výrazem

$$E_k = \frac{1}{2}J_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}J_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}J_{zz}\omega_z^2 + J_{xy}\omega_x\omega_y + J_{xz}\omega_x\omega_z + J_{yz}\omega_y\omega_z\,. \tag{14}$$

Pokud rozložíme úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$ do směru hlavních os na složky $\boldsymbol{\omega}'_x$, $\boldsymbol{\omega}'_y$, $\boldsymbol{\omega}'_z$ bude kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2}(J_1\omega_x'^2 + J_2\omega_y'^2 + J_3\omega_z'^2)\,. \tag{15}$$

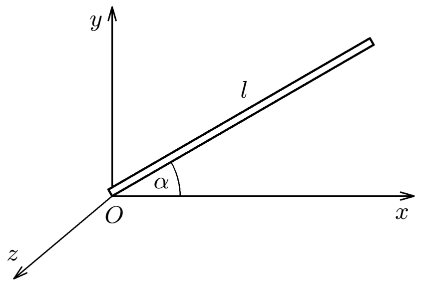
Má-li $\boldsymbol{\omega}$ směr některé hlavní osy setrvačnosti dostaneme známý vztah

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2\,, \tag{16}$$

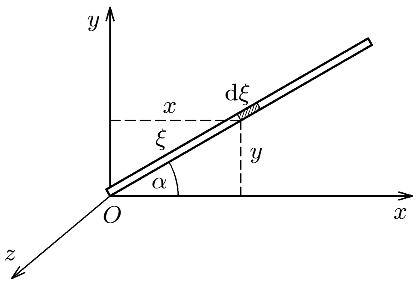
kde J je příslušný moment setrvačnosti.

Příklad 1 — Složky tenzoru setrvačnosti tyče

Vypočtěte složky tenzoru setrvačnosti tenké homogenní tyče o hmotnosti m a délce l, která je situována v rovině $z = 0$ podle obr. 6. Složky tenzoru setrvačnosti počítejte k osám naznačené kartézské soustavy.



Obr. 6



Obr. 7

Řešení

Z tyče vyjmeme element dξ v obecné poloze ξ od počátku O. Jeho souřadnice jsou (obr. 7)

$$x = \xi\cos\alpha\,, \qquad y = \xi\sin\alpha\,, \qquad z = 0\,.$$

Pro hmotnost elementu platí

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}\xi\,.$$

Složky tenzoru setrvačnosti jsou

$$J_{xx} = \int\limits_{(m)} y^2\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\sin^2\alpha\int\limits_0^l \xi^2\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha\,,$$

$$J_{yy} = \int\limits_{(m)} x^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{l}\cos^2\alpha \int\limits_0^l \xi^2 \mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} m l^2 \cos^2\alpha\,,$$

$$J_{zz} = \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\int\limits_0^l \xi^2 \mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} m l^2\,,$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int\limits_{(m)} xy\mathrm{d}m = -\frac{m}{l}\sin\alpha\cos\alpha \int\limits_0^l \xi^2 \mathrm{d}\xi = -\frac{1}{6} m l^2 \sin 2\alpha\,,$$

$$J_{xz} = J_{zx} = J_{yz} = J_{zy} = 0\,, \text{ protože } z = 0\,.$$

1.4 Moment hybnosti

Moment hybnosti tuhého tělesa jsme v [9] definovali výrazem

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i\,, \tag{17}$$

provedli jsme jeho výpočet pro rotaci tělesa kolem nehybné osy a dostali jsme výraz

$$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}\,. \tag{18}$$

Při výpočtu momentu hybnosti při rotaci tělesa kolem nehybného bodu dosadíme do (17) za $\boldsymbol{v}_i$ Eulerův vztah (3) a provedeme rozpis vzniklého dvojného vektorového součinu podle vzorce $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})$. Tak postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i) = \sum_i m_i[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i) - \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)] = \\ &= \sum_i m_i[\boldsymbol{\omega}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \boldsymbol{r}_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)]\,,\end{aligned} \tag{19}$$

kde jsme skalární součiny vektorů $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}_i$ vyjádřili prostřednictvím jejich kartézských složek. Moment hybnosti je tedy vektor, jehož kartézské složky mají velikost

$$\begin{aligned}L_x &= \omega_x \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i\,,\\ L_y &= -\omega_x \sum_i m_i x_i y_i + \omega_y \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i\,,\\ L_z &= -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\,.\end{aligned}$$

Vyjádříme-li tyto výsledky užitím složek tenzoru setrvačnosti (6) až (11) dostaneme přehledné vztahy

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z\,, \tag{20}$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z\,, \tag{21}$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z\,. \tag{22}$$

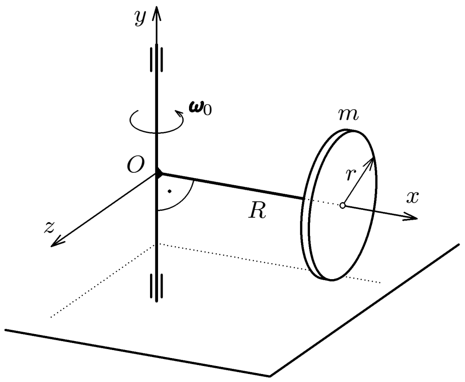
Bude-li volné tuhé těleso rotovat kolem jedné z hlavních os redukuje se výpočet momentu hybnosti na vztah (18).

Příklad 2 — Kinetická energie a moment hybnosti disku

Tenký disk o hmotnosti m a poloměru r, který je otočně uložen na rameni o poloměru R, jehož hmotnost zanedbáme, se dokonale odvaluje po vodorovné rovině (obr. 8). Je dáno $\boldsymbol{\omega}_0$. Pro okamžik, kdy přechází přes kladnou poloosu x, vypočtěte:

a) Kinetickou energii soustavy.

b) Složky $\boldsymbol{L}_x$, $\boldsymbol{L}_y$, $\boldsymbol{L}_z$ momentu hybnosti soustavy.



Obr. 8

Řešení

a) Kinetická energie je dána vztahem (14). Nejprve určíme složky vektoru úhlové rychlosti. Z daného $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_y$ určíme velikost $\boldsymbol{\omega}_x$ využitím podmínky dokonalého odvalování disku neboli

$$\omega_x = \omega_0 \frac{R}{r}.$$

Současně $\boldsymbol{\omega}_z = 0$, protože pravý úhel mezi ramenem a osou otáčení je neměnný. Z toho důvodu není nutné pro výpočet energie a momentu hybnosti počítat ty složky tenzoru setrvačnosti, jejichž index obsahuje písmenko z. Soustava je symetrická k ose x, proto moment setrvačnosti k této ose je hlavním momentem setrvačnosti a osy x, y, z jsou hlavními osami setrvačnosti. Zřejmě platí

$$J_{xx} = J_1 = \frac{1}{2}mr^2\,, \qquad J_{yy} = J_2 = \frac{1}{4}mr^2 + mR^2\,, \qquad J_{xy} = J_{yx} = 0\,.$$

Pak kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2\right) = \frac{m}{8}(6R^2 + r^2)\omega_0^2 \,.$$

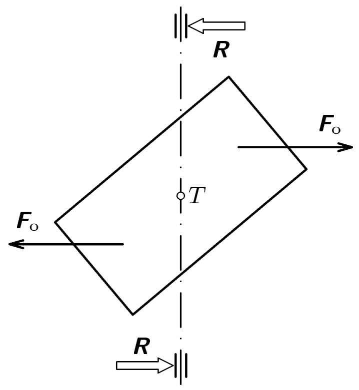
b) Moment hybnosti soustavy má složky, které vypočítáme ze vztahů (20), (21), (22). Neboli

$$L_x = \frac{m}{2} rR\omega_0 \,, \qquad L_y = \frac{m}{4}(r^2 + 4R^2)\omega_0 \,, \qquad L_z = 0 \,.$$

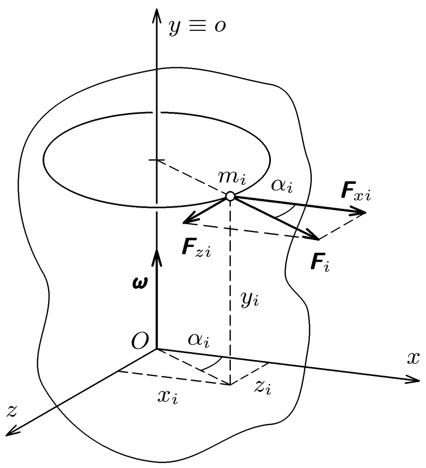
1.5 Volné osy

Nejprve pojednáme o podmínkách, při kterých bude tuhé těleso v homogenním tíhovém poli v rovnováze, bude-li otočné kolem nějaké nehybné osy. Rozeznáváme dvojí rovnováhu: statickou a dynamickou. Aby těleso bylo ve *statické rovnováze*, musí osa rotace zřejmě procházet těžištěm, jinak by šlo o kyvadlo. Pak těleso při libovolném pozvolném otočení zůstane v klidu, protože moment tíhových sil vzhledem k těžišti je nulový. Tíhovou sílu, která působí na těleso, kompenzují reakce vyvolané jeho uložením v ložiskách.

Je-li těleso v rovnováze statické, nemusí být při rotaci ještě v rovnováze dynamické. Při rotaci tělesa začnou na jeho elementy působit setrvačné síly, které souvisejí s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ a s úhlovým zrychlením $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Při rovnoměrné rotaci jsou to odstředivé síly (obr. 9).



Obr. 9



Obr. 10

Jejich působení kompenzují opět ložiska přídavnými reakcemi $\boldsymbol{R}$, které nejen zvyšují opotřebení ložisek, ale vzhledem k proměnnosti směru svého působení např. vyvolávají neklidný chod strojů. Aby těleso bylo v *dynamické rovnováze* musí být nulový moment všech sil, tedy i sil setrvačných.

Hledejme nyní podmínky, které musí být splněny pro rovnováhu tělesa při rotaci. Pro jednoduchost budeme předpokládat rovnoměrnou rotaci kolem osy y inerciální vztažné soustavy (obr. 10). Pak na elementy m_i působí ve vztažné soustavě spojené s tělesem odstředivé síly, které mají velikost $F_i = m_i \omega^2 r_i$. Pro kartézské souřadnice těchto sil v uvažované poloze tělesa platí

$$F_{xi} = F_i \cos \alpha_i = m_i \omega^2 x_i \,, \tag{23}$$

$$F_{yi} = 0 \,, \tag{24}$$

$$F_{zi} = F_i \sin \alpha_i = m_i \omega^2 z_i \,. \tag{25}$$

Pro jejich výslednice sumací přes celé těleso dostaneme

$$F_x = \omega^2 \sum_i m_i x_i \,, \; F_y = 0 \,, \; F_z = \omega^2 \sum_i m_i z_i \,.$$

Vyjádříme-li tyto výsledky užitím souřadnic hmotného středu (srovnej s (11) v [9]) dostaneme

$$F_x = \omega^2 m x_S \,, \; F_y = 0 \,, \; F_z = \omega^2 m z_S \,, \tag{26}$$

kde m je celková hmotnost tělesa. Aby všechny tyto síly byly nulové, musí být $x_S = y_S = z_S = 0$, tedy *osa rotace musí procházet hmotným středem.*

Aby těleso bylo v rovnováze, musí být i výsledný moment odstředivých sil k osám x, y, z nulový. Pro moment sil (23) a (25) platí

$$M_x = \sum_i y_i F_{zi} = \omega^2 \sum_i m_i y_i z_i = -\omega^2 J_{yz} \,, \tag{27}$$

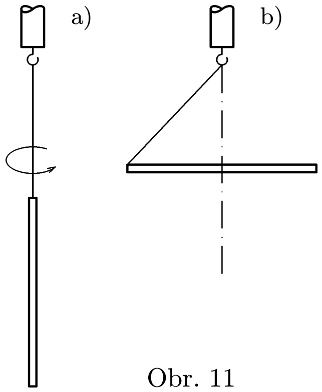
$$M_y = \sum_i z_i F_{xi} - \sum_i x_i F_{zi} = \omega^2 (J_{xz} - J_{zx}) = 0 \,, \tag{28}$$

$$M_z = -\sum_i y_i F_{xi} = -\omega^2 \sum_i m_i x_i y_i = \omega^2 J_{xy} \,. \tag{29}$$

I když bude osa rotace procházet hmotným středem bude na těleso v obecném případě působit moment sil o složkách (27), (29), který bude mít tendenci způsobit odklon—deviaci—rotační osy od původního směru. Aby tomu tak nebylo *musí být deviační momenty J_{xy}, J_{yz} nulové*. Při rotaci např. kolem osy x bychom dostali ještě podmínku $J_{xz} = 0$.

Shrneme-li výsledky, dostali jsme z podmínky $\boldsymbol{F} = 0$ požadavek, že osa rotace musí být centrální osou a z podmínky $\boldsymbol{M} = 0$ požadavek, že vedle toho musí být hlavní osou setrvačnosti. *Těleso bude tedy v dynamické rovnováze, když bude rotovat podle jedné ze tří hlavních centrálních os setrvačnosti.* Tyto osy se nazývají *volné osy*. Ložiska, do kterých osu rotace ukládáme, pak zachycují jen tíhové síly působící na těleso v homogenním tíhovém poli. Kdyby se dynamicky vyvážené těleso nacházelo v beztížném stavu, bylo by zatížení ložisek nulové.

Jednoduchým pokusem lze ukázat, že u tělesa, u něhož $J_1 \neq J_2 \neq J_3$, nejsou všechny volné osy v tělese rovnocenné. Zavěsíme-li např. na osu odstředivého stroje tyčku prostřednictvím ohebného vlákna bude při pomalé rotaci (obr. 11a) rotovat podle svislé osy. Při zvětšování otáček se osa rotace odchýlí od svislého směru a při vysokých otáčkách se nastaví do vodorovné roviny (obr. 11b). I když udělíme tyčce impuls, abychom tento stav změnili, vrací se tyčka do vodorovné roviny. *Stabilně rotuje kolem hlavní centrální osy, vzhledem k níž má největší moment setrvačnosti.*



Obr. 11

Teoretický rozbor ukazuje (viz např. [4], str. 580), že u tělesa, které má pro hlavní momenty setrvačnosti tři různé hodnoty $J_1 > J_2 > J_3$ je stabilní rotace nejen kolem hlavní centrální osy, vzhledem k níž má největší moment J_1, ale i vzhledem k hlavní centrální ose, vzhledem k níž má nejmenší moment J_3. Rotace kolem osy, vzhledem k níž má moment J_2, je labilní.

1.6 Resalova věta

Obecnou pohybovou rovnicí tuhého tělesa při jeho rotačním pohybu je *druhá impulsová věta*:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}\,,} \tag{30}$$

podle níž je *časová změna momentu hybnosti tělesa vzhledem k libovolnému pevnému bodu rovna výslednému momentu vnějších sil vzhledem k témuž bodu.*

Aplikace této věty na řešení rotace tělesa kolem *nehybné* osy je prostá a byla řešena v textu [9]. Jednoduchost spočívá v tom, že moment hybnosti se počítá podle vztahu $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$, kde J je pro danou osu rotace *konstanta*. Stejně jednoduše se řeší rotace tělesa kolem jedné z volných os.

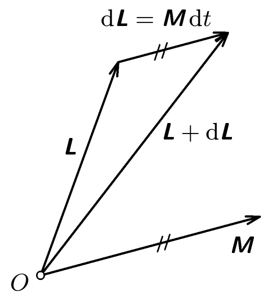
Při prostorové rotaci tělesa kolem pevného bodu nastávají při obecném použití rovnice (30) komplikace v tom, že osa rotace se vůči uvažované inerciální soustavě pohybuje. Neustále se přitom mění hodnota složek tenzoru setrvačnosti (12). Proto Leonard Euler již r. 1765 transformoval pohybovou rovnici (30) na neinerciální soustavu pevně spojenou s tělesem. Výhoda je v tom, že vůči této soustavě jsou složky tenzoru setrvačnosti již konstantní. Pracuje se přitom s hlavními momenty setrvačnosti. Řešení soustavy příslušných tří skalárních diferenciálních rovnic, nazývaných *Eulerovy dynamické rovnice*, je velmi náročné a je zcela mimo možnosti tohoto textu (viz např. [1], [2], [4]).

Pro přibližné řešení prostorové rotace tuhého tělesa se s výhodou používá geometrické interpretace druhé impulsové věty (30), kterou navrhl Francouz Résal. Tvar výrazu (30) je analogický výrazu

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v},$$

který definuje rychlost hmotného bodu. Vektor $\boldsymbol{r}$ je tedy analogický vektoru $\boldsymbol{L}$ a vektor $\boldsymbol{v}$ je analogický vektoru $\boldsymbol{M}$. Rovnost $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{M}$ naznačuje, že vektor $\boldsymbol{M}$ je mírou rychlosti změny vektoru $\boldsymbol{L}$. Neboli *rychlost koncového bodu vektoru* $\boldsymbol{L}$ *momentu hybnosti tělesa je rovna výslednému momentu* $\boldsymbol{M}$ *sil, který na těleso působí.* Tato geometrická podoba druhé impulsové věty se nazývá *Resalova věta.*

Podle této věty se tedy koncový bod vektoru $\boldsymbol{L}$ (obr. 12) posune za časový interval $\mathrm{d}t$ o $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$ a změněný moment hybnosti bude $\boldsymbol{L} + \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$. Má-li moment síly $\boldsymbol{M}$ směr vektoru $\boldsymbol{L}$ mění se jen velikost $\boldsymbol{L}$, a protože při rotaci kolem jedné volné osy je $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$, kde J =konst., mění se jen velikost úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$. Je-li naopak $\boldsymbol{M}$ stále kolmý k $\boldsymbol{L}$, mění se jen směr $\boldsymbol{L}$, a tím i směr $\boldsymbol{\omega}$.



Obr. 12

2 Pohyb setrvačníku

2.1 Setrvačník a problematika řešení jeho pohybu

Setrvačníkem (gyroskopem) nazýváme ve fyzice a v technice tuhé homogenní osově souměrné (rotační) těleso s velkým momentem setrvačnosti vzhledem k ose souměrnosti, která je současně hlavní centrální osou setrvačnosti a také volnou osou, vzhledem k níž je rotace tohoto tělesa stabilní. Setrvačníky se roztáčejí vzhledem k ose souměrnosti na vysoké otáčky (u technických setrvačníků bývá počet otáček až 50 000 min^{-1}). Tím získávají velkou kinetickou energii ($J\omega^2/2$) a velký moment hybnosti ($J\boldsymbol{\omega}$).

Vlastnosti, že rotující setrvačník je nositelem velké kinetické energie, se využívá ke zrovnoměrnění chodu strojů, např. výbušných motorů. Takový setrvačník ovšem rotuje kolem pevné osy a řešení jeho pohybu v inerciální vztažné soustavě je jednoduché. Zajímavý pro nás bude setrvačník, u něhož bude v inerciální soustavě pevný jen jeden bod. Tímto bodem může být buď hmotný střed (těžiště) anebo jiný bod osy souměrnosti. Takový setrvačník bude vykonávat prostorový rotační pohyb, o kterém v článku 1.1 víme, že jej můžeme rozložit na vlastní rotaci, na precesi a na nutaci.

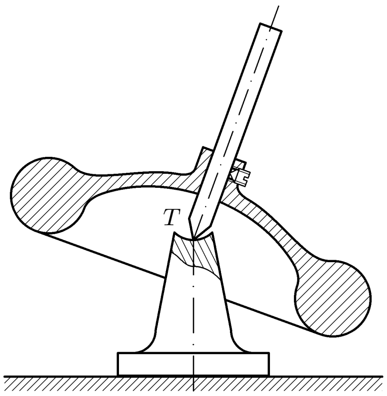
Jak jsme již uvedli v předchozím článku, k přesnému řešení pohybu setrvačníku je zapotřebí řešit soustavu tří Eulerových dynamických rovnic, které jsou diferenciálními rovnicemi prvního řádu pro tři neznámé úhlové rychlosti. Jejich obecné řešení není známo. Řešení se v minulosti podařilo mimo obecný případ tzv. bezsilového setrvačníku ještě jen pro pět zvláštních případů symetrického těžkého setrvačníku, z nichž nejznámější je setrvačník ruské matematičky Soni Kovalevské z r. 1888. V tomto případě jde o těžký setrvačník, u něhož $J_1 = J_2 = 2J_3$, přičemž bod uchycení (resp. bod podepření) leží na ose symetrické pod těžištěm, které se nachází v průsečíku hlavních os 1, 2 (řešení viz např. v [4], str. 614).

V tomto textu bude podáno přibližné řešení pohybu symetrického homogenního setrvačníku, které spočívá v předpokladu, že setrvačník bude roztočen kolem volné osy—osy symetrie, vzhledem k níž má největší moment setrvačnosti. K této ose mu bude udělen velký moment hybnosti. Moment síly, působící na setrvačník, vyvolá jen takovou precesi, případně nutaci, že lze zanedbat příspěvky k momentu hybnosti od precesních a nutačních pohybů, které setrvačník koná vzhledem k jiným osám. Tento předpoklad je u technických setrvačníků splněn dostatečně přesně, protože se tyto setrvačníky otáčejí velkými úhlovými rychlostmi a mají velké momenty setrvačnosti vzhledem k ose rotace.

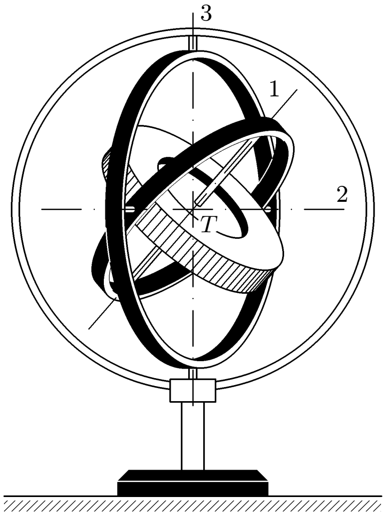
K přibližnému řešení pohybu setrvačníku s výhodou využijeme Resalovu větu.

2.2 Volný setrvačník

Volným (bezsilovým, astatickým) setrvačníkem nazýváme gyroskop, u nejž moment vnějších působících sil je nulový. Nepůsobí-li na setrvačník jiné síly než tíhové, bude volným, když bude podepřen v těžišti (tzv. **Maxwellův setvačník** na obr. 13) anebo když osy, kolem nichž se může otáčet, procházejí těžištěm T, resp. hmotným středem (setrvačník v **Cardanově závěsu** na obr. 14).



Obr. 13



Obr. 14

U volného setrvačníku je $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$. Roztočíme-li jej kolem jedné volné osy, která je osou symetrie, je $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$. Pak podle druhé impulsové věty (30) platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$$

a tudíž

$$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{konst}. \tag{31}$$

je vektor stálé velikosti a stálého směru. Protože při rotaci kolem volné osy mají vektory $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ stejný směr, shodný se směrem osy symetrie setrvačníku, **zachovává osa volného setrvačníku v prostoru** (přesněji řečeno v inerciální vztažné soustavě) **stálý směr**.[1]

[1]Pokud volnému setrvačníku neudělíme rotaci úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_1$ jen vzhledem k jedné hlavní centrální ose, nýbrž i další rotaci úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_2$ vzhledem k jiné hlavní centrální ose – např. tak, že klepneme na vnitřní kruh Cardanova závěsu – bude pohyb setrvačníku podstatně složitější. Pro výsledný moment hybnosti bude stále platit $\boldsymbol{L}{=}\boldsymbol{konst}.$, avšak výsledná úhlová rychlost $\boldsymbol{\omega}{\neq}\boldsymbol{konst}$. Osa setrvačníku bude vykonávat tzv **regulární precesi**,

Vlastnosti volného setrvačníku zachovávat směr volné osy, kolem níž jej roztočíme, se využívá v letectví u indikačních a stabilizačních přístrojů, jako je např. umělý horizont indikující polohu letadla v mlze, zatáčkoměr, setrvačníkový kompas a tzv. automatický pilot, který slouží k automatickému řízení a ke stabilizaci kurzu letu letadla. Dále v raketové technice k řízení pohybu raket a u tanku ke stabilizaci polohy hlavně kanónu při střelbě za jízdy v terénu. U hlavňových střel se stabilizace jejich pohybu dosahuje tím, že se jím při pohybu v hlavni udělí rotace. Ke stabilizaci jejich letu v prostoru přispívají dále dva precesní pohyby vyvolané odporem prostředí. Těmto vlivům bude věnován odst. b) v čl. 3.2. Stálost směru osy rotujícího setrvačníku je také základem stability pohybu jednostopých vozidel (jízdního kola a motocyklu).

2.3 Setrvačník podrobený působení momentu síly

Uvažujme setrvačník z minulého článku, o kterém jsme předpokládali, že byl roztočen přesně podle osy souměrnosti, tedy tak, že osa setrvačníku splývá se směrem momentu hybnosti $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$. Působí-li na setrvačník vnější moment síly, můžeme jej rozložit do směru osy setrvačníku a do kolmice na osu. Všimněme si odděleně účinků těchto složek.

a) Moment síly působí v ose setrvačníku
Bude-li moment síly působit v ose setrvačníku ovlivní pouze velikost momentu hybnosti setrvačníku, a tím i velikost úhlové rychlosti setrvačníku. Tento moment tedy setrvačník roztáčí nebo brzdí.

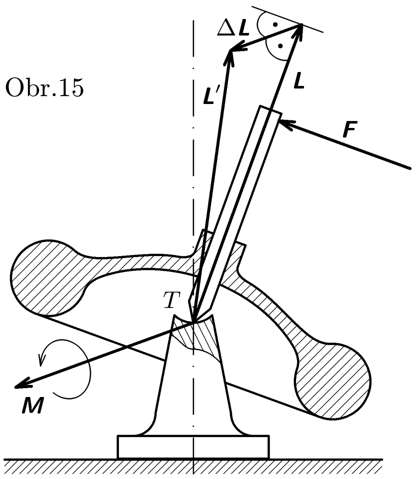
Nechť v okamžiku $t = 0$, kdy začne moment velikosti M působit v ose, má setrvačník počáteční moment hybnosti o velikosti $L_0 = J\omega_0$. Pak podle druhé impulsové věty (30) bude platit

$$L = J\omega = L_0 + \int_0^t M \mathrm{d}t\,, \qquad \text{neboli} \qquad \omega = \omega_0 + \int_0^t \frac{M}{J} \mathrm{d}t\,.$$

Bude-li $M = konst.$, bude se rotace rovnoměrně zrychlovat (resp. zpomalovat); je to analogie rovnoměrně zrychleného (zpomaleného) pohybu hmotného bodu.

b) Moment síly působící kolmo k ose setrvačníku
Nechť nyní působí kolmo na osu setrvačníku (obr. 15) síla $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{konst}.$, která vzhledem k těžišti T vyvolá moment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{konst}.$. Omezíme se na přibližné řešení za předpokladu, že poměrně malý moment $\boldsymbol{M}$ změní v krátkém časovém intervalu Δt původní moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ o $\Delta \boldsymbol{L}$ tak, aby $\Delta \boldsymbol{L} \ll \boldsymbol{L}$.

kterou si lze představit jako valení kužele spojeného se setrvačníkem po vnitřní (popřípadě po vnější) ploše pevného kužele – podrobněji viz např. [1],[2].



Obr.15

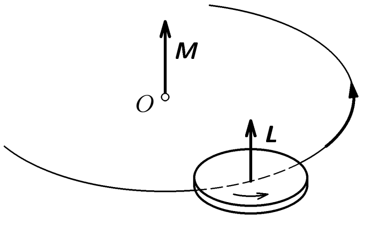
Pak podle (30) platí

$$\Delta \boldsymbol{L} = \int_0^{\Delta t} \boldsymbol{M} \mathrm{d}t = \boldsymbol{M} \Delta t\,.$$

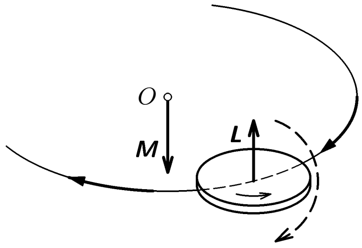
Působí-li síla $\boldsymbol{F}$ např. v rovině nákresny (obr. 15), bude moment $\boldsymbol{M}$ působit kolmo z nákresny. V témže směru se změní moment $\boldsymbol{L}$ o $\Delta \boldsymbol{L}$. Osa setrvačníku se pak nastaví do směru výsledného momentu hybnosti $\boldsymbol{L}'$. Účinek síly $\boldsymbol{F}$ je tedy takový, že se osa setrvačníku sklápí do směru momentu $\boldsymbol{M}$ vyvolaného silou $\boldsymbol{F}$ (tedy kolmo ke směru působení síly $\boldsymbol{F}$, resp. do směru osy vnucované silou $\boldsymbol{F}$).

c) Vliv vnější rotace na rotující setrvačník

Roztočíme-li setrvačník vzhledem k jeho ose symetrie a osu uvedeme do rotačního (orbitálního) pohybu kolem osy rovnoběžné s osou vlastní rotace setrvačníku ve stejné orientaci jako setrvačník (obr. 16a), nenastane změna v pohybu setrvačníku – setrvačník je ve stabilní poloze. Jakmile však obrátíme orientaci vnější rotace (obr. 16b), obrátí se osa setrvačníku (má-li možnost) o 180° – setrvačník je v labilní poloze. Tento jev lze vysvětlit užitím druhé impulsové věty. Je-li moment $\boldsymbol{M}$, potřebný k uvedení do orbitálního pohybu, orientován opačně než vektor $\boldsymbol{L}$, vznikne tendence k překlopení tohoto vektoru.

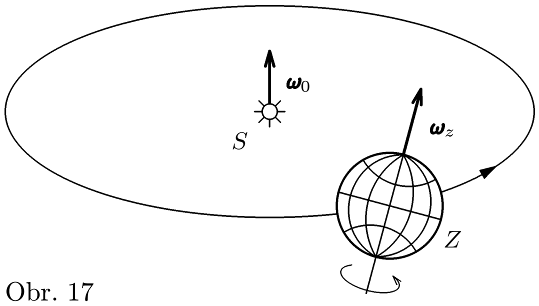


Obr. 16a



Obr. 16b

Popsaný jev můžeme snadno demonstrovat setrvačníkem v Cardanově závěsu. Na základě tohoto jevu můžeme také vysvětlit, proč směr a orientace úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_z$ vlastní rotace Země (a jiných planet) je přibližně stejná jako směr a orientace úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_0$ jejího orbitálního pohybu (obr. 17).



Obr. 17

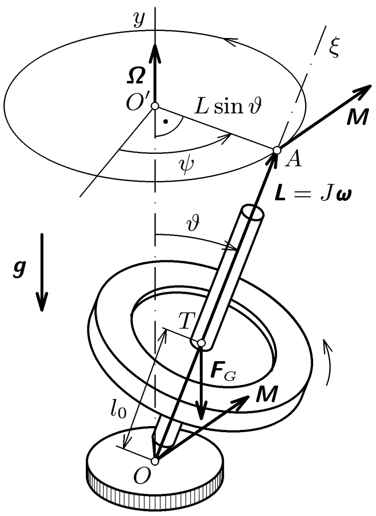
2.4 Precese a nutace těžkého setrvačníku

Názvem **těžký setrvačník** se označuje rotující gyroskop v tíhovém poli uchycený v bodě mimo jeho těžiště. Může jít o setrvačník podepřený v bodě O pod těžištěm T podle obr. 18.

Setrvačník roztočme úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ kolem volné osy ξ – osy rotační symetrie – odkloněné od svislé osy o úhel ϑ $(0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2})$, který se nazývá **nutační úhel**. Tím mu udělíme moment hybnosti $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$. Tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ působí vzhledem k bodu O momentem o velikosti

$$M = mgl_0 \sin\vartheta,$$

kde m je hmotnost setrvačníku a l_0 vzdálenost bodů O, T. Moment $\boldsymbol{M}$ zřejmě působí kolmo k rovině vymezené svislicí a osou ξ setrvačníku.



Obr. 18

Podle Resalovy věty moment $\boldsymbol{M}$ vychýlí koncový bod A vektoru $\boldsymbol{L}$ momentu hybnosti ve směru $\boldsymbol{M}$. Stejně se vychýlí i osa ξ setrvačníku. Tím se současně změní také směr vektoru $\boldsymbol{M}$, který zůstává stále kolmý k ose ξ. Proces změny je spojitý a bod A bude opisovat kružnici. Tento pohyb setrvačníku se nazývá **precese**. Úhlovou rychlost $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}}$ precesního pohybu, kde $\boldsymbol{\psi}$ je **precesní úhel**, určíme užitím Resalovy věty. Bod A bude vykonávat rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru $L \sin\vartheta = J\omega \sin\vartheta$ (viz obr. 18) rychlostí o velikosti $M = mgl_0 \sin\vartheta$. Analogicky vztahu $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ pro rychlost platí mezi vektory $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{L}$ vztah

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}\,. \tag{32}$$

Pro velikost tohoto součinu dostaneme

$$mgl_0 \sin\vartheta = \Omega J\omega \sin\vartheta\,.$$

Odtud ($\vartheta \neq 0$) úhlová rychlost precesního pohybu

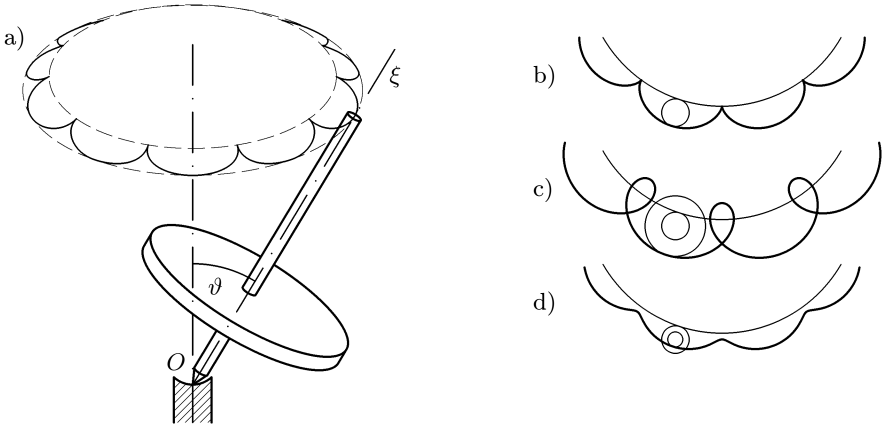
$$\Omega = \frac{mgl_0}{J\omega}\,. \tag{33}$$

Je zřejmé, že tato úhlová rychlost nezávisí na nutačním úhlu $\vartheta \neq 0$, tedy na odklonu osy ξ od svislice.

Změní-li vektor $\boldsymbol{L}$ znaménko, roztočíme-li tedy setrvačník v opačném směru, a nezmění-li se moment $\boldsymbol{M}$, změní se zřejmě znaménko úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}$. Precesní pohyb potom probíhá v opačném směru.

Předložené řešení neuvažuje s příspěvkem precesního pohybu k momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$. Je však dostatečně přesné pro $\Omega \ll \omega$.

Skutečný pohyb setrvačníku je složitější. Působením různých rušivých momentů sil, např. při dotyku osy setrvačníku s podložkou (nebo po udělení příčného impulsu $\boldsymbol{M}\Delta t$), udělíme setrvačníku další rotaci kolem jiné osy než je volná osa. Pak osa setrvačníku již nebude opisovat plášť precesního kužele s $\vartheta = konst.$ (obr. 19a). Nutační úhel ϑ se bude cyklicky měnit a vzniklý přídavný pohyb se nazývá **nutace**.



Obr. 19

U výsledného pohybu v podstatě jde o skládání dvou kruhových pohybů, které opisuje určitý bod osy setrvačníku. Křivka, kterou tento bod opisuje, je tedy epicykloida. Může být obyčejná (obr. 19b), prodloužená (obr. 19c) nebo zkrácená (obr. 19d). Přitom „pevnou“ kružnici bude reprezentovat kružnice, kterou opisuje uvažovaný bod osy při čisté precesi. Vytvořující kružnice, která se odvaluje po kružnici pevné, je dána vlastní nutací. Celkový pohyb, který vykonává tento setrvačník, se rovněž označuje jako **pseudoregulární precese**.

3 Příklady pohybu setrvačníku

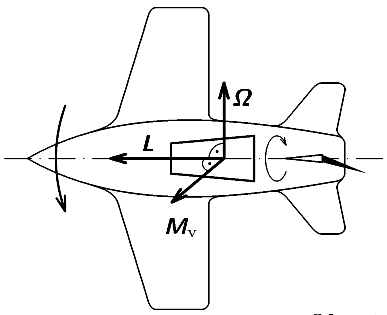
3.1 Gyroskopické jevy u dopravních strojů v zatáčce

Nezbytnou součástí dopravních strojů jsou rotující části. U pozemních strojů jsou to především kola; u letadel, lodí a raket jsou to zpravidla rotory turbín a kompresorů. Z fyzikálního hlediska představují tyto rotující části setrvačníky. Při změně směru pohybu (v zatáčce) se proto musí nutně projevovat gyroskopické (setrvačníkové) jevy, které nelze zanedbat. Jako příklady na pohyb setrvačníku v technické praxi uvedeme přehled těchto jevů u jednotlivých typů dopravních strojů.

a) Letadlo, loď, raketa
Moderní typy těchto strojů mají zpravidla turbínu a kompresor, jejichž rotory mají osu v podélné ose stroje. Výklad provedeme na případě proudového letadla (obr. 20). Moment hybnosti roztočených rotorů označíme $\boldsymbol{L}$. Chceme-li změnit směr pohybu stroje, musíme mu pomocí kormidel vnutit na jistou dobu rotační pohyb (hovoříme o **vnuceném pohybu**). Chceme-li např. zatočit vlevo, musí na stroj působit moment síly $\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}}$ (na obr. 20 míří vzhůru kolmo k nákresně). Tento moment však po dobu svého působení vyvolá precesní pohyb úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\Omega}$, přičemž podle (32) platí mezi uvedenými veličinami vztah

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}\,. \tag{34}$$

Je zřejmé, že při zatáčce vlevo se bude zvedat předek letounu; letadlo bude „těžké na ocas“. Při zatáčce vpravo bude naopak „těžké na nos“. Podobně se chová loď i raketa. Tento jev si můžeme snadno demonstrovat na klasickém vysavači prachu (doutníkového tvaru). Vnutíme-li mu rotaci kolem osy kolmé na podélnou osu sklopí se nám při jedné orientaci tohoto pohybu předek vysavače a při druhé orientaci zadek vysavače.



Obr. 20

Nyní popíšeme gyroskopický jev při vnuceném otáčení kvantitativně. Nechť otáčejícímu rotoru (setrvačníku) o momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ vnucujeme rotaci např. vlevo úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{v}}$ působením momentu síly $\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}}$ (obr. 21). Kdyby tento rotor byl volným tělesem (neuloženým v ložiskách) sklápěla by se osa rotoru do směru vektoru $\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}}$ tak, že podle Resalovy věty by rychlost koncového bodu vektoru $\boldsymbol{L}$ byla rovna $\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}}$ a vznikla by precese p úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\Omega}$. Pokud rotor uložíme do ložisek 1, 2 tak je tomuto pohybu sice zabráněno, avšak rotor působí na ložiska silami $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$, které jsou vyvolány **gyroskopickým momentem** $\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$. Tento moment určíme ze vztahu, který je analogický vztahu (34). Aby vznikla precese úhlovou rychlostí ω_v musel by podle Resalovy věty působit moment síly $-\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$, pro který analogicky (34) platí

$$-\boldsymbol{M}_\mathrm{g} = \boldsymbol{\omega}_\mathrm{v} \times \boldsymbol{L}\,,$$

neboli

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{g} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{\omega}_\mathrm{v} = J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_\mathrm{v}\,. \tag{35}$$

Velikost gyroskopického momentu je

$$M_\mathrm{g} = L\omega_\mathrm{v} \sin\vartheta = J\omega\omega_\mathrm{v} \sin\vartheta\,. \tag{36}$$

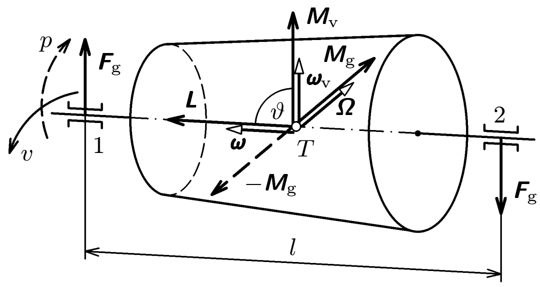
Jeho směr nejlépe určíme **pravidlem Žukovského**:
Je-li setrvačník nucen vykonávat precesní pohyb, pak vzniká gyroskopický moment, který se snaží nejkratší cestou otočit osu rotace setrvačníku (vektor $\boldsymbol{L}$) do směru osy vnuceného pohybu.

Gyroskopický moment můžeme vyjádřit ještě ve tvaru

$$\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F}_\mathrm{g} = J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_\mathrm{v}\,,$$

kde $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ jsou přídavné síly, kterými působí osa rotoru na ložisko a $\boldsymbol{l}$ je rameno těchto sil. Jelikož síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ jsou kolmé na osu, můžeme pro jejich velikost psát

$$F_\mathrm{g} = \frac{J\omega\omega_\mathrm{v}}{l} \sin\vartheta\,. \tag{37}$$



Obr. 21

Příklad 3 — Gyroskopický moment u parníku
Parník je opatřen turbínou s osou v podélné ose lodě (srovnej s obr. 21). Vypočtěte velikost gyroskopického momentu $\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$ a velikost celkové tlakové síly $\boldsymbol{F}_1$ v předním ložisku a $\boldsymbol{F}_2$ v zadním ložisku, koná-li parník manévrovací otáčení vpravo úhlovou rychlostí $\omega_\mathrm{v} = 0{,}250\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Rotor má hmotnost $m = 18{,}5 \cdot 10^3$ kg, moment setrvačnosti $J = 2100\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ a jeho těžiště je uprostřed rozpětí $l = 5{,}20$ m ložisek; otáčky rotoru jsou $n = 540\ \mathrm{min^{-1}}$.

Řešení
Podrobné řešení necháváme na čtenáři a uvádíme jen výsledky:

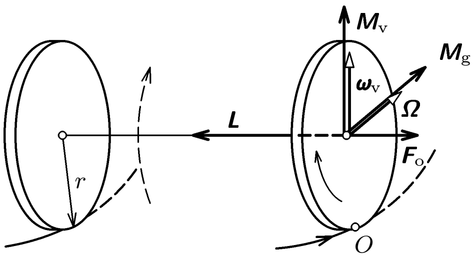
$$M_\mathrm{g} = \frac{\pi n J \omega_\mathrm{v}}{30} = 2{,}97 \cdot 10^4\ \mathrm{N\cdot m}\,,$$

$$F_1 = \frac{mg}{2} + \frac{M_\mathrm{g}}{l} = 9{,}65 \cdot 10^4\ \mathrm{N}\,,$$

$$F_2 = \frac{mg}{2} - \frac{M_\mathrm{g}}{l} = 8{,}50 \cdot 10^4\ \mathrm{N}\,.$$

b) Dvojstopá vozidla

Chceme-li dvojstopým vozidlem (automobilem) zabočit např. vlevo, musíme prostřednictvím řízení působit na kola momentem síly $\boldsymbol{M}_\mathrm{v}$ (obr. 22). Podle druhé impulsové věty však tento moment bude mít tendenci způsobit precesi úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\Omega}$. Bude vyklápět vozidlo ze zatáčky gyroskopickým momentem $\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$ podle (35).



Obr. 22

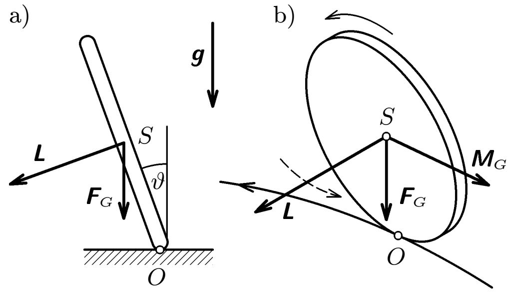
Gyroskopický účinek kol v zatáčce je tedy nepříznivý a spolu s odstředivými silami $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ zmenšuje stabilitu dvojstopého vozidla v zatáčce, neboť působí vzhledem k bodu dotyku O kola s vozovkou klopným momentem síly.

c) Jednostopá vozidla

Základem jednostopého vozidla je kutálející se kolo, které při pohybu má vedle hybnosti $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ ještě moment hybnosti $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$. Vykloněním kola ze svislé roviny o malý úhel ϑ (viz obr. 23a) vznikne působením tíhové síly $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ moment $\boldsymbol{M}_G$, který pootáčí moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ ve směru $\boldsymbol{M}_G$ (obr. 23b), tj. ve vodorovném směru.

Kolo tak začne vykonávat vedle posuvného a rotačního pohybu ještě precesní pohyb. Je zřejmé, že při náklonu kola např. vlevo dojde k jeho stáčení také vlevo. Vrátíme-li kolo zpět do svislé roviny, precese (a tím i zatáčení) ustane. Jízdní kolo a motocykl je tedy v zatáčce stabilní.

Při řízení kola řidítky působíme na kolo momentem sily $\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}}$, který mu vnucuje rotaci. Situace je analogická jako na obr. 22; vzniká tedy gyroskopický moment $\boldsymbol{M}_{\mathrm{g}}$. V praxi zpravidla kombinujeme řízení bicyklu a motocyklu nakloněním s řízením řídítky.



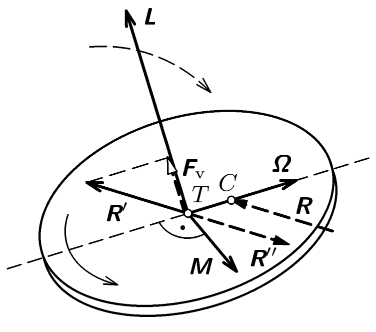
Obr. 23

3.2 Stabilizace letu disku a střely

a) Disk

Aby pohyb disku byl stabilní a délka vrhu co největší, vrhá jej sportovec tak, že mu udělí na počátku pohybu rotaci kolem osy souměrnosti. Disk se tedy chová jako setrvačník.

Gyroskopiské jevy při pohybu disku (a podobně střely) si nejsnáze můžeme vysvětlit a demonstrovat na pohybu lepenkového kotouče (papírového pivního tácku). Vrhneme-li kotouč levou rukou, bude při pohledu shora rotovat v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček). Za pohybu na něj bude působit odpor o výslednici $\boldsymbol{R}$. Působiště $\boldsymbol{R}$ není v důsledku aerodynamických poměrů v těžišti T, nýbrž v bodě C ve směru pohybu před ním (obr. 24).



Obr. 24

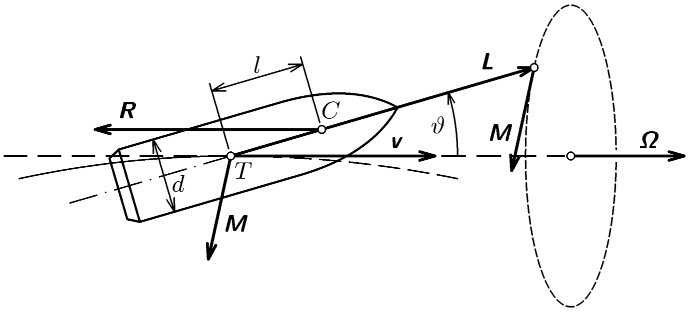
Přeneseme-li tuto sílu do těžiště musíme připojit moment $\boldsymbol{M}$ dvojice $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}''$. Tento moment způsobí precesi, takže tácek vržený levou rukou se bude stáčet vpravo. Složka $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ síly $\boldsymbol{R}'$ působí jako vztlaková síla.

Pohyb disku je podobný, jen precese v důsledku velkého momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ a relativně malého momentu $\boldsymbol{M}$ není tak výrazná. Vztlaková síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ nadnáší disk (zmenšuje tedy účinek tíhové síly) a zejména v sestupné části balistické křivky prodlužuje délku vrhu.

Protože vztlaková síla je neustále kolmá k rovině kotouče (disku) a kotouč se v důsledku precese natáčí, vzniká odchylka v pohybu na tu stranu, na kterou se natáčí. U střel se této odchylce říká **derivace** (terminologicky by však bylo správnější hovořit o **deviaci**).

b) Střela

Ve vojenství je využito vlastností setrvačníku ke stabilizaci pohybu hlavňových střel, kterým se v hlavni uděluje rotace, a tím i moment hybnosti $\boldsymbol{L}$. Za pohybu působí na střelu odpor vzduchu $\boldsymbol{R}$, jehož působiště C je mimo těžiště směrem ke špici střely (obr. 25). Síla $\boldsymbol{R}$ dává k těžišti T moment $\boldsymbol{M}$ kolmý k rovině proložené osou střely a tečnou k trajektorii pohybu. Působením tohoto momentu bude střela vykonávat precesní pohyb. V důsledku tření vzduchu o povrch rotující střely, které je největší na čelní náporové straně střely, vzniká další moment síly, který zmenšuje nutační úhel ϑ. Působením tohoto momentu sleduje osa střely stále tečnu k balistické dráze střely a dopadá tak na cíl špicí. Ve vakuu (např. na Měsíci) by naopak osa střely zachovávala směr osy hlavně a dopadla by na cíl dnem, což by nebylo z hlediska účinku střely žádoucí.



Obr. 25

Kvantitativní řešení naznačeného problému je složité. Jde o nalezení optimálního vztahu mezi velikostí momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ a velikostí momentu síly $\boldsymbol{M}$. Moment hybnosti se dá pro danou střelu a její úsťovou rychlost ovlivnit její úhlovou rychlostí, tj. stoupáním závitů v hlavni. Moment síly $\boldsymbol{M}$ se dá ovlivnit především polohou působiště C síly $\boldsymbol{R}$ vůči těžišti T střely. Toho se dosahuje vhodnou konstrukcí pláště střely, zejména její přední částí, která má tvar ogivalu. Podrobnější analýzu precesního a nutačního pohybu střely lze nalézt v článku [10].

Příklad 4 — Kinetická energie a precese střely

Střela ráže (tj. vnějšího průměru) $d = 100$ mm a hmotnosti $m = 30{,}0$ kg byla vystřelena z hlavně kanónu počáteční (tzv. úsťovou) rychlostí $v_0 = 900\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. V hlavni byla střele udělena rotace tak, že se střela zařezávala do závitu o stoupání $s = 30d$. V důsledku kmitu hlavně při výstřelu se osa střely odchýlila od tečny k dráze o malý úhel ϑ. Ve vzduchu bude na střelu působit síla odporu vzduch o velikosti $R = 2{,}00\cdot 10^3$ N ve směru rovnoběžném s tečnou k trajektorii, a to v působišti C vzdáleném o $l = 1{,}5d$ od těžiště (viz obr. 25).
Vypočtěte:

a) celkovou počáteční kinetickou energii střely,
b) kolik otáček precesního pohybu sřela vykoná, je-li doba letu střely $t = 64{,}1$ s a budeme-li předpokládat $|\boldsymbol{R}| = konst.$

Při výpočtu momentu stervačnosti považujte střelu zjednodušeně za válec.

Řešení

a) Pro celkovou počáteční kinetickou energii střely platí

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(mv_0^2 + J\omega^2)\,, \quad \text{kde} \quad J = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{a} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\,,$$

přičemž T je doba potřebná k jedné otáčce střely v hlavni, tj. k proběhnutí závitu výšky s. Platí tedy

$$s = v_0 T = \frac{2\pi v_0}{\omega}\,, \quad \text{z toho} \quad \omega = \frac{2\pi v_0}{s} = \frac{\pi v_0}{15d}\,.$$

Pak po dosazení do hořejšího vztahu dostaneme

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_0^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2\right] = 1{,}22\cdot 10^7\ \mathrm{J} = 12{,}2\ \mathrm{MJ}\,.$$

b) Střela bude vykonávat precesní pohyb úhlovou rychlostí (33). Velikost momentu síly je $M = Rl\sin\vartheta = 1{,}5Rd\sin\vartheta$, velikost momentu hybnosti je

$$L = J\omega = \frac{\pi m v_0 d}{120}\,.$$

Po dosazení do výrazu (33) dostáváme

$$\Omega = \frac{180}{\pi}\frac{R}{mv_0}\,.$$

Velikost úhlové rychlosti precesního pohybu tedy nezávisí na úhlu ϑ (pro velké ϑ by však střela ztratila v důsledku změny aerodynamických poměrů stabilitu).
Doba jedné otáčky je

$$T_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi^2 m v_0}{90R}\,,$$

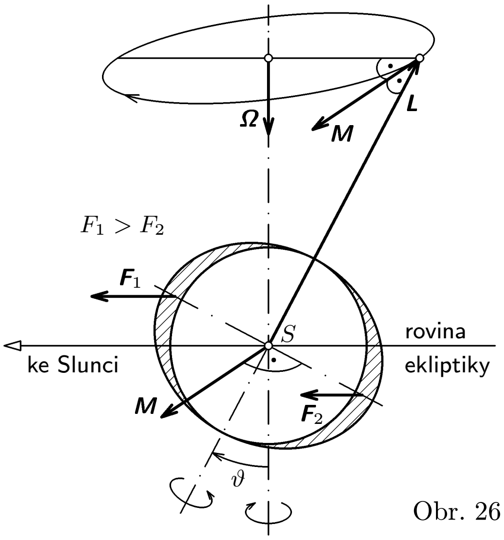
pro počet otáčet precesního pohybu během letu střely dostáváme

$$n = \frac{t}{T_\mathrm{p}}\,.$$

Číselně: $T_\mathrm{p} = 1{,}48$ s, $n = 43{,}3$.

3.3 Lunisolární precese Země

Země je velký setrvačník. Její pohyb po přibližně eliptické trajektorii – ekliptice – je řízen gravitačním polem Slunce a rušen gravitačním polem blízkého Měsíce. Protože Země má přibližně tvar zploštělého elipsoidu a protože její osa není kolmá k rovině ekliptiky ani k rovině měsíční trajektorie, neprochází výslednice gravitačních sil od působení Slunce a Měsíce hmotným středem S Země. Tento fakt si můžeme vysvětlit tak, že do elipsoidu Země vepíšeme kouli podle obr. 26.



Obr. 26

Pak na část zbylého prstence, která je blíže ke Slunci, působí větší přitažlivá síla $\boldsymbol{F}_1$ než přitažlivá síla $\boldsymbol{F}_2$ působící na jeho vzdálenější část. V důsledku toho vznikne – po přenosu sil do hmotného středu S – moment $\boldsymbol{M}$ silové dvojice. Jeho velikost se při pohybu Země mění. Největší je v době zimního slunovratu (poloha je naznačena na obr. 26) a letního slunovratu. Naopak je nulový v době jarní a podzimní rovnodennosti. Moment $\boldsymbol{M}$ vyvolává základní – solární – precesní pohyb Země, jehož úhlová rychlost se mění v důsledku proměnnosti $\boldsymbol{M}$. Protože směr $\boldsymbol{\Omega}$ míří na opačnou stranu roviny ekliptiky než úhlová rychlost vlastní rotace Země (tento směr udává vektor $\boldsymbol{L}$), hovoříme o *protiběžné* precesi.

Velikost i směr výsledného rušivého momentu $\boldsymbol{M}$ poněkud ovlivňuje skutečnost, že kolem Země obíhá Měsíc, jehož eliptická trajektorie leží v rovině, která je vzhledem k rovině ekliptiky skloněna o $5°09'$. Gravitační vliv Měsíce je nezanedbatelný a projevuje se tím, že „moduluje“ moment $\boldsymbol{M}$. To má za následek, že se k základnímu – solárnímu – precesnímu pohybu superponuje druhotný – lunární – precesní pohyb a výsledkem je **lunisolární** precese, u níž se mění nutační úhel ϑ; vzniká tedy nutační pohyb. Perioda solární precese je asi 25 725 let, je to tzv *platónský rok*. Střední hodnota nutačního úhlu je $\vartheta = 23°27'$, perioda lunární precese (nutační perioda) je 18,61 roku. Periodické změny nutačního úhlu jsou velmi malé, neboť zemská osa opisuje kolem své střední polohy nutační elipsu, jejíž velká poloosa je $9{,}21''$ a malá poloosa $6{,}86''$ [11].

Lunisolární precese (resp. její astronomické důsledky) byla známa již starověkému astronomovi Hiparchovi z Nikaie v roce 140 př.Kr. Srovnával astronomické souřadnice hvězd ze svých měření s výsledky měření svých předchůdců a zjistil, že ekliptikální délky hvězd vzrostly. Fyzikálně se tento jev podařilo vysvětlit až Newtonovi na základě jeho zákona všeobecné gravitace.

Přímým astronomickým důsledkem lunisolární precese jsou postupné změny poloh hvězd při orientaci podle noční oblohy. Nyní sever určujeme podle známé hvězdy Polárky, pro staré Egypťany kolem r. 2600 př.Kr. byla nejbližší jasnou hvězdou u světového pólu hvězda Thuban v souhvězdí Draka. V důsledku lunisolární precese se pozvolna mění poloha hvězd vůči rovníkové souřadnicové soustavě druhého druhu (spojené s jarním bodem). Zemská osa bude směřovat nejblíže k Polárce v roce 2115, kdy její odklon od směru k Polárce bude jen $21'$. V roce 14 100 bude orientačním bodem pro světový pól hvězda Vega v souhvězdí Lyry, kolem r. 21 000 to bude opět Thuban. Polárka se ke světovému pólu znovu přiblíží kolem r. 28 000.

Lunisolární precese má ovšem i závažnější důsledky. Při pohybu Země po eliptické trajektorii dochází ke střídání ročních období v závislosti na úhlu, který svírá zemská osa se spojnicí středů Země a Slunce. Toto střídání ročních období se neopakuje přesně s periodou oběhu středu Země po eliptické trajektorii (tato perioda se nazývá *siderický rok*). V důsledku lunisolární precese je za jeden platónský rok (tj. za 25 725 siderických roků) o jeden cyklus ročních období více než oběhů po eliptické trajektorii.

Problém časování ročních období komplikuje ještě skutečnost, že sklon roviny eliptické trajektorie Země se v důsledku gravitačního působení ostatních planet nepatrně mění — v současné době se zmenšuje o $0{,}47''$ za rok, přičemž účinek tohoto pohybu poněkud zmenšuje vliv lunisolární precese na střídání ročních období.

Problém se astronomicky vyřešil zavedením *jarního bodu* jako polohy Slunce na ekliptice (tj. na trajektorii zdánlivého ročního pohybu Slunce po obloze), v níž se nachází v okamžiku jarní rovnodennosti. Přesněji je to průsečík ekliptiky se světovým rovníkem, v němž se Slunce nachází při jarní rovnodennosti. Tento okamžik je astronomický počátek jara. V důsledku popsaných precesních pohybů není poloha jarního bodu pevná, nýbrž tento bod jde vstříc Slunci o $50{,}2528''$ za rok (tento údaj platil pro rok 1974). Proto je doba mezi dvěma průchody Slunce jarním bodem, tzv. *tropický rok*, v průměru asi o 20 minut kratší než siderický rok.

3.4 Larmorova precese

S gyroskopickými efekty se setkáváme i v atomistice. Na závěr tohoto textu si proto zjednodušeně vysvětlíme tutu aplikaci mechaniky. Elektron v atomu má v určitém stavu orbitální moment hybnosti a spin, tj. vlastní moment hybnosti a odpovídající magnetické momenty. Dostane-li se atom do vnějšího magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$, vzniká **Zeemanův jev** – rozštěpení některých spektrálních čar v optickém spektru. Podle hrubé mechanisitické představy lze tento jev objasnit precesním pohybem roviny, v níž leží trajektorie, kterou koná elektron v coulombovském elektrostatickém poli jádra.

Elektronu na určité trajektorii (obr. 27) přísluší moment hybnosti $\boldsymbol{L} = 2m_\mathrm{e}\boldsymbol{w}$ a také magnetický moment $\boldsymbol{m} = -e\boldsymbol{w}$, kde m_e je hmotnost elektronu, e elementární náboj a $\boldsymbol{w}$ plošná rychlost elektronu. Z hlediska gyroskopického efektu lze trajektorii považovat za elementární proudovou smyčku, jíž přísluší magnetický moment $\boldsymbol{m}$, a také moment hybnosti $\boldsymbol{L}$. Jak se odvozuje v elektromagnetismu, bude na ni v poli indukce $\boldsymbol{B}$ působit moment silové dvojice

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}\,,$$

který je kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{m}$ a tudíž i k $\boldsymbol{L}$. Působením momentu $\boldsymbol{M}$ bude elektronová trajektorie konat precesi, která je zcela analogická precesi těžkého setrvačníku (čl. 2.4).Pro výpočet úhlové rychlosti precese užijeme Resalovy věty. Podle ní platí

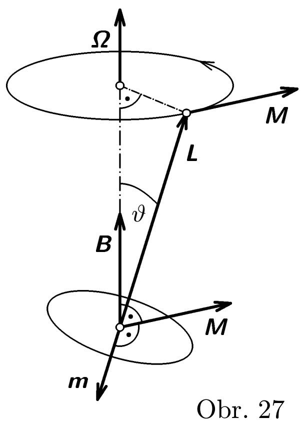
$$|\boldsymbol{L}|\sin\vartheta \cdot |\boldsymbol{\Omega}| = |\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{m}||\boldsymbol{B}|\sin\vartheta\,,$$

neboli

$$2m_\mathrm{e}|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{\Omega}|\sin\vartheta = e|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{B}|\sin\vartheta\,.$$

Pro $\vartheta \neq 0$ dostaneme Larmorovu úhlovou rychlost

$$\Omega = \frac{eB}{2m_\mathrm{e}}\,.$$



Obr. 27

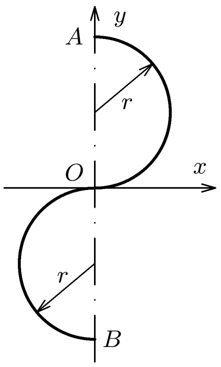
V kvantové fyzice pojem „trajektorie elektronu" ztrácí význam a proto ani představu o magnetickém momentu nelze vázat na představu o lineárním proudu. Avšak, i tak lze dokázat, že Zeemanův jev lze objasnit precesním pohybem vektoru orbitálního momentu hybnosti a také precesním pohybem spinu kolem vektoru $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{konst}$. Přitom velikost průmětu momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ i spinu $\boldsymbol{s}$ do směru vektoru $\boldsymbol{B}$ se zachovává, a precese probíhá rovněž s Larmorovou úhlovou rychlostí $\Omega = \dfrac{eB}{2m_\mathrm{e}}$. Larmorovou precesí se vysvětlují diamagnetické vlastnosti látek (magnetik).

4 Úlohy

A. Řešené úlohy

1. Složky tenzoru momentu setrvačnosti zalomeného hřídele

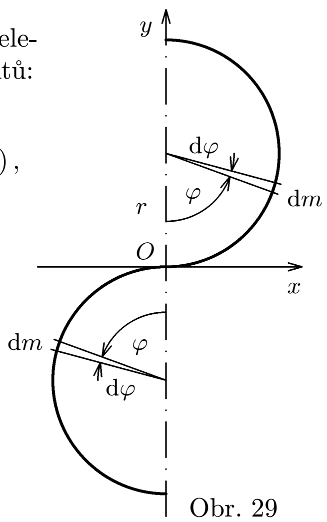
Vypočítejte složky tenzoru setrvačnosti zalomeného hřídele, který je uložen v ložiskách A, B (obr 28). Hmotnost hřídele je m, poloměr půlkružnic je r.



Obr. 28

Řešení

Hřídel sestává ze dvou částí; z každé vyjmeme element o poloze φ (obr. 29). Souřadnice elementů:



Obr. 29

$$\begin{array}{rcl|rcl} x &=& r\sin\varphi\,, & x &=& -r\sin\varphi\,, \\ y &=& r(1-\cos\varphi)\,, & y &=& -r(1-\cos\varphi)\,, \\ z &=& 0\,, & z &=& 0\,, \end{array}$$

$$\mathrm{d}m = \mu r \mathrm{d}\varphi\,.$$

Délková hustota hmotnosti je

$$\mu = \frac{m}{2\pi r}\,.$$

Složky tenzoru setrvačnosti:

$$J_{xx} = 2\int\limits_{(m)} y^2\,\mathrm{d}m = 2\mu r^3\int\limits_0^\pi (1-\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi = 2\mu r^3\int\limits_0^\pi (1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\mu r^3\left[\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^\pi = 3\mu\pi r^3 = \frac{3}{2}mr^2\,,$$

$$J_{yy} = 2\int\limits_{(m)} x^2\,\mathrm{d}m = 2\mu r^3 \int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mu r^3 \left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^\pi = \mu\pi r^3 = \frac{1}{2}mr^2\,,$$

$$J_{zz} = 2\int\limits_{(m)} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = 2\mu r^3 \int\limits_0^\pi (\sin^2\varphi + 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

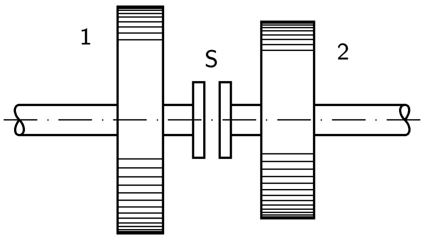
$$= 2\mu r^3 \underbrace{\int\limits_0^\pi (2 - 2\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}_{2\pi} = 4\mu\pi r^3 = 2mr^2\,,$$

$$J_{xy} = J_{yx} = 2\int\limits_{(m)} xy\,\mathrm{d}m = 2\mu r^3 \int\limits_0^\pi \sin\varphi(1 - \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\mu r^3 \underbrace{\int\limits_0^\pi (\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}_{2} = 4\mu r^3 = \frac{2}{\pi}mr^2\,,$$

$$J_{xz} = J_{zx} = J_{yz} = J_{zy} = 0\,, \quad \text{protože} \quad z = 0\,.$$

2. Roztáčení setrvačníku třecí spojkou



Obr. 30

Na dvou hřídelích jsou namontovány setrvačníky 1, 2, přičemž hřídele mohou být spojeny prostřednictvím třecí spojky S (obr. 30). Při rozpojené spojce je nejprve roztočen setrvačník 1 tak, že má $n_1 =$ 3000 otáček za minutu. Setrvačník 2 je na počátku v klidu. Poté je prostřednictvím třecí spojky připojen druhý hřídel a setrvačník se začne postupně zrychlovat, až se oba setrvačníky budou otáčet stejnou úhlovou rychlostí a soustava hřídelů bude mít $n_{12} = 1800$ otáček za minutu. První setrvačník i s hřídelem má moment setrvačnosti $J_1 = 6{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

Vypočtěte:

a) Jaký je moment setrvačnosti J_2 druhého setrvačníku i s hřídelem.

b) Kolik mechanické energie ΔE_k soustava ztratila při spojení.

Řešení

a) Platí zákon zachování momentu hybnosti

$$J_1\omega_1 = (J_1 + J_2)\omega_{12}\,.$$

Odtud

$$J_2 = J_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_{12}} - 1\right) = J_1\left(\frac{n_1}{n_{12}} - 1\right) = 4{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,.$$

b) $$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega_{12}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 n_1(n_1 - n_{12})J_1 = 118\,\mathrm{kJ}\,.$$

3. Volně otáčivá tyč

Tenká homogenní tyč o délce l a hmotnosti m se volně otáčí po vodorovné dokonale hladké rovině úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_0$ kolem svého středu. Zachytíme-li náhle jeden konec tyče, začne se tyč otáčet kolem tohoto konce. Vypočtěte úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$, kterou se tyč nyní bude otáčet, a kolik mechanické energie ΔE_k při této změně ztratí.

Řešení

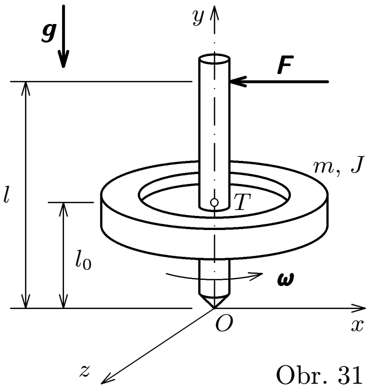
Zákon zachování momentu hybnosti:

$$J_0\omega_0 = J\omega\,, \quad \frac{1}{12}ml^2\omega_0 = \frac{1}{3}ml^2\omega \;\rightarrow\; \omega = \frac{\omega_0}{4}\,.$$

Ztráta mechanické energie:

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\omega_0^2 - \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\omega_0^2 - \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\frac{\omega_0^2}{16} = \frac{ml^2\omega_0^2}{32}\,.$$

4. Působení příčné síly na setrvačník



Obr. 31

Na vzpřímený setrvačník o hmotnosti m roztočený úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ kolem osy symetrie, vzhledem k níž má moment setrvačnosti J, působíme po krátkou dobu Δt silou $\boldsymbol{F}$ rovnoběžnou s osou x (obr. 31). Popište chování setrvačníku, tj. vypočtěte úhel $\Delta\vartheta$, o který se za Δt odchýlí jeho osa, a popište pohyb, který poté bude setrvačník vykonávat.

Řešení

Osa setrvačníku se odchýlí v rovině $x = 0$ od osy y o úhel

$$\Delta\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{M\Delta t}{L} \approx \frac{Fl\Delta t}{J\omega}$$

a setrvačník současně začne vykonávat precesní pohyb s úhlovou rychlostí (33):

$$\varOmega = \frac{mgl_0}{J\omega}\,.$$

Osa setrvačníku bude opisovat kužel o vrcholovém úhlu $\Delta\vartheta$ úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\varOmega}$, jejíž velikost na tomto úhlu nezávisí.

5. Precese disku na rameni

Homogenní disk o hmotnosti m a poloměru r je otočně uložen na rameni R zanedbatelné hmotnosti v sestavě podle obr. 32. Disk roztočíme velkou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ kolem osy symetrie. Popište pohyb, který bude disk vykonávat.

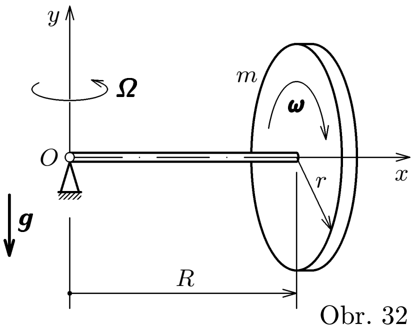
Řešení

Na disk působí moment tíhové síly o velikosti $M = mgR$. Rotující disk, jehož moment hybnosti má velikost

$$L = J\omega = \frac{mr^2\omega}{2}\,,$$

bude vykonávat precesi okolo osy y s úhlovou rychlostí o velikosti

$$\varOmega = \frac{M}{L} = \frac{2gR}{r^2\omega}\,.$$



Obr. 32

6. Gyroskopický moment setrvačníku v rámu

Setrvačník ve tvaru válcového disku o poloměru r a hmotnosti m se otáčí úhlovou rychlostí ω_1 v úhlopříčce čtvercového rámu zanedbatelné hmotnosti podle obr. 33. Rám se otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω_2. Určete gyroskopický moment a reakce v ložiskách A, B, které jím budou vyvolány.

Řešení

Pro gyroskopický moment podle (35) platí

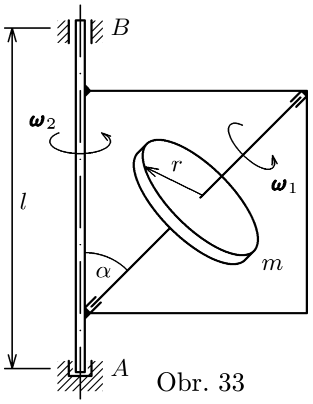
$$\boldsymbol{M}_\mathrm{g} = J\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2\,, \quad \text{kde} \quad J = \frac{1}{2}mr^2\,.$$

Velikost gyroskopického momentu je tedy

$$M_g = \frac{1}{2}mr^2\omega_1\omega_2 \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}mr^2\omega_1\omega_2\,.$$

Vektor $\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$ je kolmý k rámu a v dané poloze rámu míří před nákresnu. Reakce $\boldsymbol{R}_A = -\boldsymbol{R}_B$, které jej v ložiskách kompenzují, leží v rovině nákresny a mají velikost

$$R_A = R_B = \frac{\sqrt{2}}{4l}mr^2\omega_1\omega_2\,.$$



Obr. 33

7. Gyroskopický moment u letadla

Otočné části leteckého motoru včetně vrtule mají moment setrvačnosti $J = 25\ \mathrm{kg\cdot m^2}$. Vrtule se otáčí $n = 2400$ otáčkami za minutu. Vypočtěte gyroskopický moment $\boldsymbol{M}_\mathrm{g}$ působící na letadlo, které prolétá rychlostí $v = 450$ km/h pravotočivou zatáčku po vodorovné kružnici o poloměru $R = 280$ m. Jaký účinek bude mít tento moment, když se vrtule z pohledu pilota otáčí ve směru rotace hodinových ručiček?

Řešení

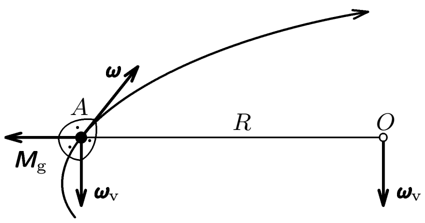
Gyroskopický moment určíme pomocí vztahů:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{g} = J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_\mathrm{v}\,, \quad \omega = \frac{\pi n}{30}\,, \quad \omega_\mathrm{v} = \frac{v}{R}\,, \quad \boldsymbol{\omega}_\mathrm{v} \perp \boldsymbol{\omega}\,,$$

kde $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{v}$ je úhlová rychlost vynucené rotace (obr. 34). Velikost gyroskopického momentu tedy je

$$M_g = \frac{\pi n v J}{30R} = 2\,805\ \mathrm{N \cdot m}\,.$$

Gyroskopický moment má směr radiály spojující střed křivosti trajektorie O a bod A, v němž se nachází letadlo. Jeho působením bude v této zatáčce letadlo „těžké na nos“. V levotočivé zatáčce se směr momentu $\boldsymbol{M}_g$ otočí a letadlo bude „těžké na ocas“.

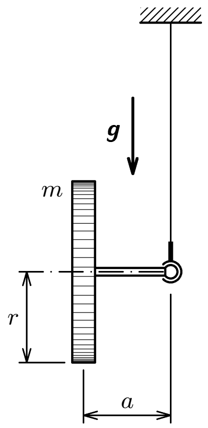


Obr. 34

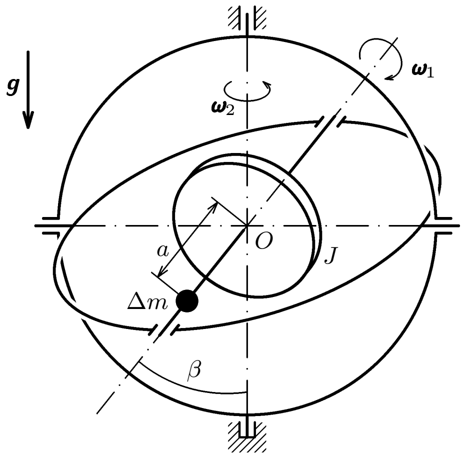
B. Neřešené úlohy

8. Precese setrvačníku na rameni

Setrvačník ve tvaru válcového disku o poloměru $r = 100$ mm a hmotnosti $m = 1{,}20$ kg rotující s úhlovou rychlostí $\omega = 314$ rad·s^{-1} zavěsíme v tíhovém poli na vyloženém rameni délky $a = 75$ mm a zanedbatelné hmotnosti prostřednictvím nitě podle obr. 35. Setrvačník začne vykonávat precesi. Vypočtěte nejkratší dobu, za kterou osa setvačníku zaujme opět výchozí polohu.



Obr. 35



Obr. 36

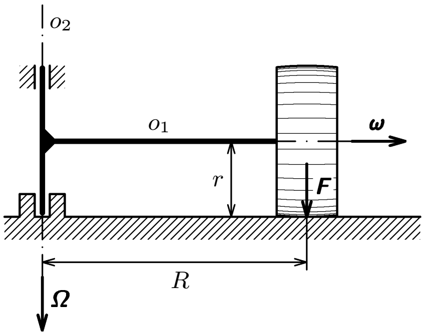
9. Precese setrvačníku v Cardanově závěsu

Bezsilový setrvačník o momentu setrvačnosti J, otáčející se úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_1$, je uložen v Cardanově závěsu podle obr. 36. Rovnováhu porušíme tím, že na osu setrvačníku do vzdálenosti a od středu O umístíme závaží o hmotnosti Δm. Osa setrvačníku svírá se svislou osou úhel β. Určete úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}_2$ vzniklé precese, zanedbáte-li hmotnost Cardanova závěsu a tření v ložiskách.

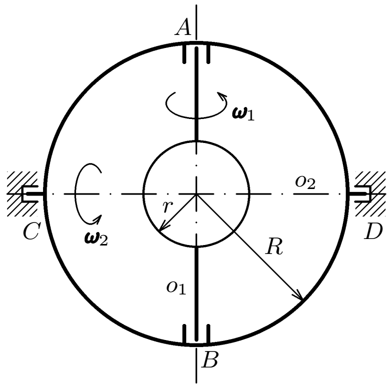
10. Gyroskopický moment u kolového mlýna

Kolový mlýn sestává z válcového kola o hmotnsoti m, které se odvaluje po vodorovné desce (obr. 37). Kolo je otočně uloženo na rameni o_1 délky R a zanedbatelné hmotnosti, které se otáčí kolem svislé osy o_2 úhlovou rychlostí

$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{konst}$. Vypočtěte gyroskopický moment $\boldsymbol{M}_{\mathrm{g}}$ a výslednou sílu $\boldsymbol{F}$, kterou je kolo přitlačováno k desce.



Obr. 37



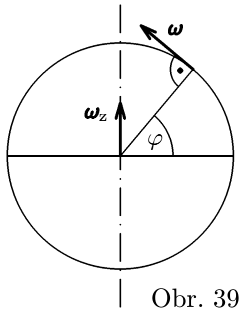
Obr. 38

11. Gyroskopický moment setrvačníku v rámu

Určete gyroskopický moment a reakce v ložiskách A, B, C, D závěsu podle obr. 38, které jsou vyvolány setrvačníkem tvaru koule o poloměru r a hmotnosti m. Setrvačník se otáčí kolem osy o_1 úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_1$ a rám kolem osy o_2 úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_2$. Hmotnost rámu zanedbejte, $\omega_1 \gg \omega_2$.

12. Gyroskopický moment u stacionární turbíny

Stacionární turbína je umístěna na $\varphi = 60°$ severní zeměpisné šířky, její rotor má směr poledníku a vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ její vlastní rotace míří přesně k severu (obr. 39). Určete směr a velikost gyroskopického momentu, je-li $\omega = 314\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ a moment setrvačnosti rotoru $J = 120\ \mathrm{kg \cdot m^2}$; $\omega_{\mathrm{z}} = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.



Obr. 39

Výsledky neřešených úloh

8. $T = \dfrac{\pi m r^2 \omega}{a g} = 16{,}1\ \mathrm{s}$

9. $\omega_2 = \dfrac{\Delta m\, g \sin\beta}{J\omega_1}$

10. Gyroskopický moment je kolmý k nákresně, míří za ni a má velikost $M_\mathrm{g} = \dfrac{1}{2} m r R \mathit{\Omega}^2$. Přítlačná síla $F = m\left(g + \dfrac{r R \mathit{\Omega}^2}{2}\right)$.

11. Gyroskopický moment $\boldsymbol{M}_\mathrm{g} = J\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2$ je kolmý k nákresně a míří za ni. Jeho velikost je $M_\mathrm{g} = \dfrac{2}{5} m r^2 \omega_1 \omega_2$. Reakce $\boldsymbol{R}_A = -\boldsymbol{R}_B$ a $\boldsymbol{R}_C = -\boldsymbol{R}_D$ leží v rovině nákresny a mají stejnou velikost $R_A = R_B = R_C = R_D = \dfrac{m r^2 \omega_1 \omega_2}{5R}$.

12. Gyroskopický moment směřuje podle rovnoběžky na východ a má velikost $M_\mathrm{g} = J\omega\omega_\mathrm{z} \sin\varphi = 2{,}38\ \mathrm{N \cdot m}$.

Literatura

[1] Brdička, M., Hladík, A.: *Teoretická mechanika.* Akademia, Praha 1987.

[2] Gonda, J.: *Dynamika pre inženierov.* Vydavatel'stvo SAV, Bratislava 1966.

[3] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: *Technická fyzika.* SNTL, Praha 1961.

[4] Trkal, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1956.

[5] Vybíral, B.: *Rotační pohyby a setrvačníky.* Rozhledy matematicko fyzikální **48** (1969-70), s. 275–286.

[6] Vybíral, B.: *Setrvačníky.* Leták 18. ročníku FO, SPN, Praha 1976, s. 7-40.

[7] Vybíral, B.: *Základy teoretické mechaniky, 2.díl.* Gaudeamus, Hradec Králové 1992.

[8] Vybíral, B.: *Statika tuhého tělesa.* Knihovnička FO č. 26. Vydavatelství MAFY, Hradec Králové 1996.

[9] Vybíral, B.: *Kinematika a dynamika tuhého tělesa.* Knihovnička FO č. 31. Vydavatelství MAFY, Hradec Králové 1997.

[10] Vybíral, B.: *Precesní a nutační pohyb střely.* Matematika a fyzika ve škole **13** (1982/83), s. 475–482.

[11] Vanýsek, V.: *Základy astronomie a astrofyziky.* Academia, Praha 1980.