MECHANIKA IDEÁLNÍCH PLYNŮ

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Předmluva

Máte před sebou druhou část trilogie věnované tekutinám – **Mechaniku ideálních plynů**, neboli **aeromechaniku**. Navazuje na první část [14] věnovanou ideálním kapalinám. V příštím roce na ni naváže **Aplikovaná mechanika tekutin**. Předložený text se omezuje jen na *ideální plyn* jako na fyzikální těleso dokonale tekuté (bez vnitřního tření) a dokonale stlačitelné. To velmi usnadňuje výklad a popis dějů. Tento model plynu dostatečně vyhovuje pro popis řady dějů v plynu, zejména, je-li v klidu (tedy v aerostatice). Na proudění plynů má pozorovatelný vliv viskozita plynu, proto popis proudění reálného plynu modelem ideálního plynu je přibližné a dává tak jen obrys pro skutečné děje. Prouděním reálného plynu se tento text nezabývá, avšak základní informace můžete získat v předchozích textech [12] a [13].

Protože děje v plynech jsou daleko složitější než děje v kapalinách, je v 1. kapitole zařazen přehled fyzikálních veličin a zákonů vztahujících se k ideálnímu plynu. Navazuje 2. kapitola, která je věnována účinkům tíhového pole na plyn; v podstatě jde o aerostatiku. Výklad uzavírá 3. kapitola pojednávající o proudění plynu, tedy aerodynamika.

Vlastní výklad je ilustrován na desíti řešených příkladech, z nichž dva obtížnější jsou zařazeny do samostatné 4. kapitoly. Na konci kapitol je zadáno celkem 22 úloh k procvičení, jejichž stručné řešení (nebo jen výsledek) je uvedeno na konci textu. K řešení některých příkladů a úloh je zapotřebí využít aparát vyšší matematiky (ten je ostatně nezbytný ke studiu celé fyziky). Proto Vám doporučuji, abyste se snažili jeho základy brzo zvládnout, například pomocí velmi dobré příručky Z. Ungermanna [10].

Jak uvidíte, aeromechanika úzce souvisí s termodynamikou. Shodou okolností vychází v letošním roce také studijní text [9], který náleží do termodynamiky; rovněž jej doporučuji k prostudování.

Jsem přesvědčen, že předložený text Vám nejen pomůže v soutěži Fyzikální olympiáda, ale že Vás bude motivovat k celoživotnímu zájmu o fyziku a její aplikace.

1 Základní veličiny a zákony ideálního plynu

1.1 Stavové veličiny plynu

Tlak plynu

Tlak plynu je veličina, která makroskopicky popisuje mikroskopické silové účinky srážek obrovského množství částic plynu (zpravidla molekul) s částicemi vnitřních stěn nádoby nebo s částicemi povrchu jiného tělesa, které se nachází v nádobě s plynem. Nechť tyto nárazy na plošku o obsahu ΔS se projeví jako střední tlaková síla $\Delta \boldsymbol{F}$. Pak tlak plynu je plošnou hustotou této síly, neboli $p = \Delta \boldsymbol{F}/\Delta S$. Tlak plynu experimentálně zjistíme manometrem resp. tlakoměrem, případně vakuometrem, je-li v nádobě podtlak vzhledem k okolí nádoby.

Jednotkou tlaku je $\mathrm{N \cdot m^{-2} = Pa}$ (pascal). Protože pascal je malá jednotka, užívají se její násobky $\mathrm{kPa} = 10^3\,\mathrm{Pa}$ a $\mathrm{MPa} = 10^6\,\mathrm{Pa}$. Ve starší literatuře nebo na starších přístrojích se setkáváme ještě s jinými jednotkami tlaku:

torr	$1\,\mathrm{torr} = 133{,}322\,\mathrm{Pa}\,,$
technická atmosféra	$1\,\mathrm{at} = 98{,}0665\,\mathrm{kPa}\,,$
bar	$1\,\mathrm{bar} = 1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 0{,}1\,\mathrm{MPa} \doteq 1\,\mathrm{at}\,.$

Za *normální atmosférický tlak* se volí tlak $p_\mathrm{n} = 1{,}013\,25 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \doteq 760$ torrů.

Tlak má rovněž význam potenciální energie tlakové vztažené na jednotku objemu tekutiny (resp. plynu), neboli je roven *hustotě potenciální energie tlakové* (odvození viz [14], s. 8).

Teplota plynu

Teplota plynu je veličina, která charakterizuje makroskopický rovnovážný termodynamický stav plynu – tj. stav, ve kterém se plyn nachází za stálých vnějších podmínek (nemění se teplota okolí, vnější silové pole, objem a tlak plynu apod.). Každému rovnovážnému stavu plynu lze přiřadit určitou teplotu. V praxi se převážně ustálilo měření teploty t v Celsiových stupních (°C). V zákonech ideálního plynu je však nutné zásadně užívat *termodynamickou teplotu* T, která má k Celsiově teplotě vztah $T = (\{t\} + 273{,}15)\ K$ (kelvinů). Termodynamická teplota $T = 0$ K je dolní limitní mez teploty, která je prakticky nedosažitelná.

Objem plynu

Volný plyn v důsledku své rozpínavosti nezaujímá určitý objem. Je-li plyn uzavřen v nádobě, vyplní celý prostor nádoby. Pak je objem V plynu roven vnitřnímu objemu nádoby. Při řešení úloh vyjadřujeme objem plynu v jednotkách $\mathrm{m^3}$.

Hustota plynu

Abychom určili hustotu plynu v určitém místě objemu V, vymezíme kolem tohoto místa malý objem ΔV, který obsahuje hmotnost Δm plynu. Pak hustota plynu v daném místě pro danou teplotu a tlak je $\varrho = \Delta m/\Delta V$. Její jednotka je $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Hustota plynu je na rozdíl od kapalin silně závislá na ostatních stavových veličinách. Proto se její hodnota uvádí pro tzv. *normální podmínky*, tj. normální teplotu 273,15 K (0 °C) a normální tlak $p_\mathrm{n} = 1{,}013\,25 \cdot 10^5$ Pa. Za těchto podmínek je hustota plynu řádově 10^3krát menší než hustota kapalin. Například hustota vzduchu $\varrho_\mathrm{vn} = 1{,}293\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Pro jinou teplotu a tlak se k přepočtu použije stavová rovnice (viz např. čl. 2.2 a příklad 6) – viz vztah (refxx) na str. 9. Závislost hustoty plynu na výšce v tíhovém poli bude odvozena v čl. 2.2.

1.2 Veličiny popisující plyn jako soustavu částic

Relativní atomová hmotnost

$$A_\mathrm{r} = \frac{m_\mathrm{a}}{m_\mathrm{u}}\,,$$

kde m_a je klidová hmotnost atomu a m_u *atomová hmotnostní konstanta* nazývaná také *hmotnostní jednotka*, která je definována jako 1/12 klidové hmotnosti nuklidu uhlíku $^{12}_{6}\mathrm{C}$. Její hodnota je

$$m_\mathrm{u} = 1{,}660\,540 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \doteq 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}\,.$$

V Mendělejevově tabulce jsou uvedeny relativní atomové hmotnosti prvků jako přirozené směsi nuklidů, např. pro vodík jako směs nuklidů $^{1}_{1}\mathrm{H}$, $^{2}_{1}\mathrm{H}$ a $^{3}_{1}\mathrm{H}$ vychází $A_\mathrm{r} = 1{,}008$. Známe-li A_r, můžeme určit klidovou hmotnost atomu: $m_\mathrm{a} = A_\mathrm{r} m_\mathrm{u}$. Například střední klidová hmotnost atomu vodíku je $m_\mathrm{a}(\mathrm{H}) = 1{,}674 \cdot 10^{-27}$ kg.

Relativní molekulová hmotnost

$$M_\mathrm{r} = \frac{m_\mathrm{m}}{m_\mathrm{u}}\,,$$

kde m_m je klidová hmotnost molekuly. Relativní molekulová hmotnost je rovna součtu relativních atomových hmotností atomů, které vytvářejí molekulu. Například relativní molekulová hmotnost molekuly vodíku $\mathrm{H_2}$ je $M_\mathrm{r}(\mathrm{H_2}) = 2 \cdot 1{,}008 = 2{,}016$.

Avogadrova konstanta N_A

K základním fyzikálním konstantám patří Avogadrova konstanta N_A, která udává počet atomů v nuklidu uhlíku $^{12}_{6}\mathrm{C}$ o hmotnosti 12 g, který je látkovým množstvím 1 mol tohoto nuklidu. Experimentálně vychází

$$N_\mathrm{A} = 6{,}022\,137 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}\,.$$

Číselná hodnota konstanty N_A souvisí s číselnou hodnotou konstanty m_u vztahem

$$\{N_\mathrm{A}\} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{\{m_\mathrm{u}\}} = 6{,}022\,137 \cdot 10^{23}\,.$$

Látkové množství n

Soustava částic (např. plyn) má látkové množství n, které je určeno podílem počtu částic N (např. atomů, molekul, iontů) této soustavy a Avogadrovy konstanty N_A:

$$n = \frac{N}{N_\mathrm{A}}\,.$$

Jednotkou látkového množství je mol. Je to látkové množství soustavy, která obsahuje tolik částic (atomů, molekul, iontů), kolik atomů je ve 12 g = 0,012 kg nuklidu uhlíku $^{12}_{6}\mathrm{C}$.

Molární hmotnost

$$M_\mathrm{m} = \frac{m}{n}\,,$$

kde m je hmotnost tělesa (plynu) z chemicky stejnorodé látky a n je odpovídající látkové množství. Jednotkou je $\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$. Molární hmotnost lze určit ze vztahů

$$M_\mathrm{m} = A_\mathrm{r} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \quad \text{nebo} \quad M_\mathrm{m} = M_\mathrm{r} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}\,,$$

podle toho, je-li těleso (plyn) složeno z volných atomů nebo molekul. Např. pro atomární vodík je $M_\mathrm{m} = 1{,}008 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, pro molekulární vodík (H_2) je $M_\mathrm{m} = 2{,}016 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, pro vzduch je $M_\mathrm{m} = 28{,}96 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$.

Molární objem V_m

tělesa (plynu) z chemicky stejnorodé látky za daného tlaku a teploty je dán vztahem

$$V_\mathrm{m} = \frac{V}{n}\,,$$

kde V je objem tělesa za uvažovaných fyzikálních podmínek a n je odpovídající látkové množství. Jednotkou je $\mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}$.

U plynů se molární objem za normálních fyzikálních podmínek (tj. 273,15 K a $1{,}013\,25 \cdot 10^5$ Pa) nazývá *normální molární objem* V_mn. Je pro všechny plyny stejný a má hodnotu

$$V_\mathrm{mn} = 22{,}414 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}\,.$$

1.3 Základní zákony ideálního plynu

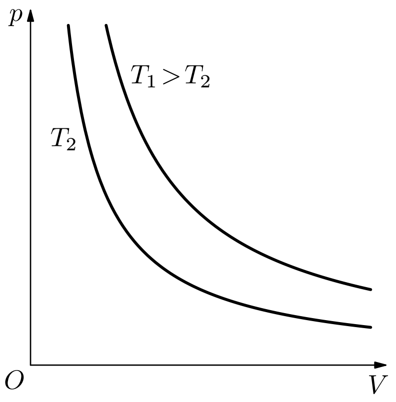
Boylův-Mariottův zákon

Součin tlaku p a objemu V ideálního plynu dané hmotnosti je za stálé termodynamické teploty T konstantní:

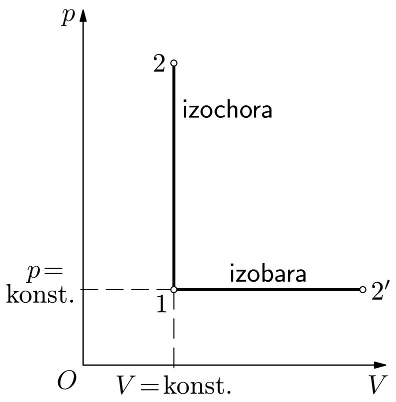
$$\boxed{pV = \text{konst.} \quad \text{pro} \quad T = \text{konst.}} \tag{1}$$

Děj, pro který je splněn vztah (1), se nazývá **izotermický**. V p-V diagramu je znázorněn křivkou, která se nazývá *izoterma* (obr. 1) Je to jedna větev rovnoosé hyperboly.

Boylův-Mariottův zákon byl objeven experimentálně (viz úlohu 3) a platí dostatečně přesně pro reálné plyny při teplotách mnohem vyšších než je jejich kritická teplota.



Obr. 1 Izotermy ideálního plynu



Obr. 2 Izochora a izobara ideálního plynu

Charlesův zákon

Podíl tlaku p a termodynamické teploty T ideálního plynu dané hmotnosti je za stálého objemu V konstantní:

$$\boxed{\frac{p}{T} = \text{konst.} \quad \text{pro} \quad V = \text{konst.}} \tag{2}$$

Děj popsaný vztahem (2) se nazývá **izochorický**. V p-V diagramu (obr. 2) je znázorněn úsečkou 12, která se nazývá *izochora*.

Gay-Lussacův zákon

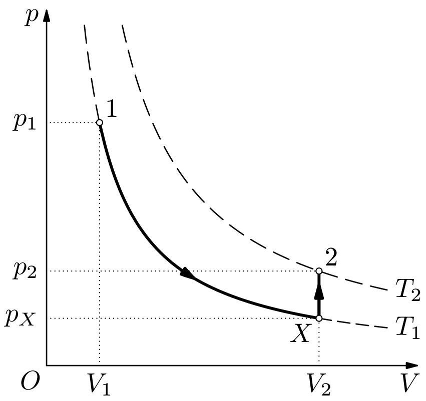
Podíl objemu p a termodynamické teploty T ideálního plynu dané hmotnosti je za stálého tlaku p konstantní:

$$\boxed{\frac{V}{T} = \text{konst.} \quad \text{pro} \quad p = \text{konst.}} \tag{3}$$

Děj popsaný vztahem (3) se nazývá **izobarický** a příslušná úsečka $12'$ v p-V diagramu (obr. 2) *izobara*.

Stavová rovnice ideálního plynu

Provedeme-li izotermickou expanzi ze stavu 1 do stavu X a poté izochorické ohřátí ze stavu X do stavu 2 (obr. 3), dostaneme



Obr. 3 K odvození stavové rovnice

$$p_1V_1 = p_XV_2 \text{ . . . izotermická expanze,}$$

$$\frac{p_X}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \text{ . . . izochorické ohřátí.}$$

Násobením vztahů dostaneme základní tvar **stavové rovnice**

$$\boxed{\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \text{konst.}} \tag{4}$$

Je zřejmé, že experimentální vztahy (1) až (3) jsou zvláštním případem zákona (4) a že jeden z těchto zákonů je nadbytečný. (Stavovou rovnici lze odvodit třemi způsoby – libovolnou kombinací dvou zákonů z (1) až (3) – viz úlohu č. 5.) Stav plynu závisí jenom na poloze bodu v p-V diagramu, který jej znázorňuje, a nikoliv na cestě, po které se k němu došlo.

Hmotnost plynu při ději v uzavřené soustavě se nemění, tedy $m_1 = m_2 = m$. Provedeme-li dělení rovnice (4) hmotností m a zavedeme-li hustotu plynu $\varrho_1 = m/V_1$ a $\varrho_2 = m/V_2$, dostaneme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru pro hustoty

$$\boxed{\frac{p_1}{\varrho_1T_1} = \frac{p_2}{\varrho_2T_2} = \text{konst.}} \tag{5}$$

Konstanta ve stavové rovnici (4) pro látkové množství $n = 1$ mol se nazývá *molární plynová konstanta* a označuje se R. Její hodnotu vypočteme pro normální fyzikální podmínky:

$$R = \frac{p_\mathrm{n} V_\mathrm{mn}}{T_\mathrm{n}} = \frac{1{,}013\,25 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot 22{,}414 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}}{273{,}15\ \mathrm{K}} =$$
$$= 8{,}3145\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}.$$

Další tvary stavové rovnice ideálního plynu jsou:

$$\boxed{pV_\mathrm{m} = RT \ldots \text{pro 1 mol,}} \tag{6}$$

$$\boxed{pV = nRT \ldots \text{pro } n \text{ molů,}} \tag{7}$$

kde

$$n = \frac{V}{V_\mathrm{m}} = \frac{m}{M_\mathrm{m}} = \frac{N}{N_\mathrm{A}}\,.$$

N je celkový počet částic (atomů, molekul) plynu v objemu V. Význam ostatních veličin je popsán v čl. 1.2. Často potřebujeme vyjádřit hustotu plynu pomocí ostatních stavových veličin:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{M_\mathrm{m} p}{RT}\,. \tag{8}$$

V kinetické teorii plynů se zavádí ještě *Boltzmannova konstanta* k vztahem

$$k = \frac{R}{N_\mathrm{A}} = 1{,}380\,66 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}\,,$$

která má formálně význam molární plynové konstanty vztažené na jednu částici (atom, molekulu) plynu. Pomocí ní můžeme stavovou rovnici (7) přepsat do tvaru

$$\boxed{pV = NkT \ldots \text{pro } N \text{ částic,}} \tag{9}$$

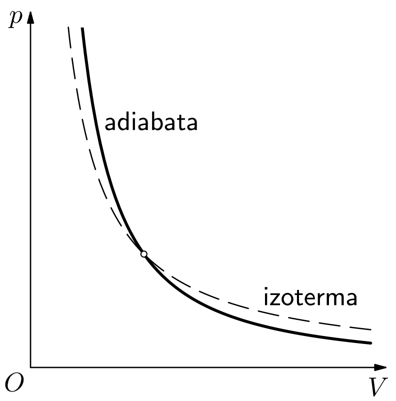
neboť $nN_\mathrm{A} = N$.

Poissonův zákon

Probíhají-li stavové změny v ideálním plynu o stálé hmotnosti tak, že soustava je dokonale izolovaná (tepelná výměna s okolními tělesy je nulová), mění plyn tlak p a objem V podle vztahu

$$\boxed{pV^\varkappa = \text{konst.}, \quad \text{kde} \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_V}} \tag{10}$$

je poměr měrných tepelných kapacit při konstantním tlaku a při konstantním objemu – tzv. *Poissonova konstanta*. Hodnoty konstanty $\varkappa$ pro různé plyny je v tabulce na konci textu. Pro jednoatomové plyny je $\varkappa \doteq 1{,}67$ pro dvouatomové $\varkappa \doteq 1{,}40$ a pro víceatomové $\varkappa \doteq 1{,}33$.



Obr. 4 Porovnání adiabaty a izotermy v p-V diagramu

Vydělíme-li vztah (10) hmotností $m^{\varkappa} =$ = konst., a zavedeme-li hustotu plynu $\varrho = m/V$, dostaneme Poissonův zákon ve tvaru pro tlak a hustotu plynu:

$$\boxed{p\varrho^{-\varkappa} = \text{konst.}} \qquad (11)$$

Děj, který splňuje Poissonův zákon se nazývá **adiabatický**. V p-V diagramu je průběh stavových změn znázorněn *adiabatou*, která je strmější než izoterma (obr. 4). Probíhá-li děj velmi rychle, nestačí proběhnout tepelná výměna s okolím a považuje se tedy přibližně za adiabatický (viz příklady 3 a 8 a úlohu 10). Za adiabatické děje považujeme i děje při šíření zvuku v plynném prostředí.

Avogadrův zákon

Mají-li dva různé plyny stejný tlak, objem a teplotu, pak pro ně ze stavové rovnice ve tvaru (9) vyplývá $pV = N_1kT$, $pV = N_2kT$, neboli $N_1 = N_2$. Z toho plyne *Avogadrův zákon*:

Různé (ideální) plyny o stejném tlaku, objemu a teplotě mají stejný počet molekul. Neboli *objem, který při daném tlaku a teplotě zaujímá jeden mol plynu, je pro všechny plyny stejný.* Za normálních je to $V_{\mathrm{mn}} = 22{,}414 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}$.

Daltonův zákon

Uvažujme směs ideálních plynů. Podle *Daltonova zákona* je *celkový tlak p směsi plynů roven součtu parciálních (dílčích) tlaků p_i plynů, z nichž se směs skládá*: $p = \sum p_i$.

Každý z plynů má takový tlak p_i, jako kdyby celkový objem V směsi zaujímal sám, neboli ostatní plyny nemají na jeho tlak vliv. Podle stavové rovnice (6) pro parciální tlak plynu o látkovém množství n_i platí

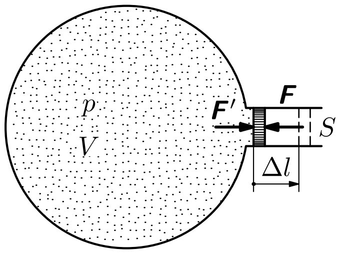
$$p_i = \frac{RT}{V} n_i \, .$$

Daltonův zákon předpokládá, že plyny spolu chemicky nereagují.

1.4 Práce plynu

Představme si velkou nádobu o objemu V vyplněnou plynem o tlaku p a uzavřenou malým válcem s pístem o plošném obsahu S, který se může pohybovat bez tření (obr. 5). Tlaková síla $\boldsymbol{F}'$ o velikosti $F' = pS$, kterou plyn působí na píst, vykoná při elementárním posunutí o Δl elementární práci

$$\Delta W' = pS\Delta l = p\Delta V\,, \tag{12}$$



Obr. 5 K výpočtu práce plynu

která je úměrná změně objemu ΔV. (Změnu tlaku můžeme vzhledem k velikosti nádoby zanedbat.) *Práce vykonaná plynem je rovna součinu tlaku plynu a přírůstku jeho objemu.*

Vnější síla $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}'$ koná elementární práci $\Delta W = -\Delta W'$. Tedy při expanzi plynu ($\Delta V > 0$) je práce vykonaná plynem kladná a práce vnější síly záporná. Při kompresi ($\Delta V < 0$) je práce vykonaná plynem záporná a práce vnější síly kladná.

1.5 Vnitřní energie plynu

Vnitřní energie plynu je celková energie plynu, který je jako celek ve vztažné soustavě v klidu. Závisí pouze na stavu plynu a nezávisí na tom, jak se do tohoto stavu dostal. Z hlediska kinetické teorie závisí na pohybu a vzájemném působení všech částic plynu.

Vnitřní energii plynu tvoří:

a) Celková kinetická energie tepelného (mikroskopického) pohybu částic plynu.
b) Celková potenciální energie částic plynu daná jejich vzájemným působením.
c) Energie elektronů v obalech atomů a energie atomových jader.

Z hlediska termodynamických stavových změn plynu jsou nejdůležitější první dvě složky, kdežto třetí složka se nemění, protože předpokládáme, že při dějích neprobíhají chemické reakce a jaderné přeměny.

Jako jednoduchý příklad uvedeme výpočet vnitřní energie plynu složeného z jednoatomových částic Je dána jen jejich kinetickou energií posuvného pohybu. Nechť tyto částice mají hmotnost m_0 a střední kvadratickou rychlost v_k. Pak podle kinetické teorie plynů pro vnitřní energii U tohoto plynu sestávajícího z N částic platí

$$U = N\cdot\frac{1}{2}m_0 v_\mathrm{k}^2 = \frac{1}{2}m v_\mathrm{k}^2 = N\cdot\frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}nRT\,, \tag{13}$$

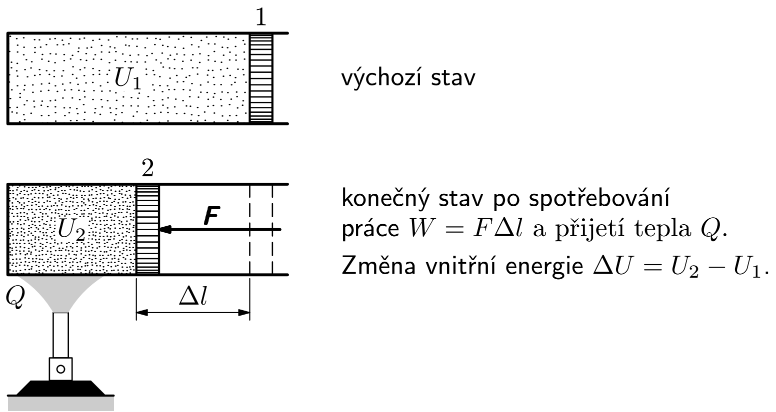
kde $Nm_0 = m$ je celková hmotnost plynu, k Boltzmannova konstanta a n látkové množství plynu. Ze vztahu (13) vidíme, že *vnitřní energie daného množství ideálního plynu závisí pouze na jeho termodynamické teplotě* nikoliv na tlaku nebo hustotě.

Jsou-li molekuly plynu složeny z více atomů, je výpočet vnitřní energie ideálního plynu poněkud složitější, protože závisí na počtu stupňů volnosti molekuly (podrobněji viz např. [9]). Jestliže k jednoatomovým plynům, které mají tři stupně volnosti, patří inertní plyny (He, Ne, Ar, Kr), tak ke dvouatomovým plynům patří skupina prakticky velmi významných plynů (např. H_2, N_2, O_2, Cl_2, vzduch). Mají pět stupňů volnosti (viz [9]) a vztah (13) pro vnitřní energii přejde do tvaru

$$U = \frac{5}{2} nRT \tag{14}$$

Vnitřní energii plynu lze měnit:
a) dějem, při němž vnější síla *koná práci W*,
b) dějem, při němž *nastává tepelná výměna* a plyn přijme teplo Q,
c) dějem, kdy dochází současně ke konání práce a tepelné výměně.

Proces změny vnitřní energie podle bodu c) je nejobecnější a je znázorněn na obr. 6



Obr. 6 Změna vnitřní energie spotřebováním práce a tepelnou výměnou

1.6 První termodynamický zákon, měrné a molární tepelné kapacity

Při procesu změny vnitřní energie plynu popsaném na obr. 6 musí být splněn zákon zachování energie, který se v termodynamice nazývá *první termodynamický zákon*. Platí

$$\boxed{\Delta U = Q + W\,,} \tag{15}$$

neboli **změna vnitřní energie ΔU soustavy (plynu) je rovna součtu tepla Q přijatého soustavou a práce W vykonané vnějšími silami.** První termodynamický zákon se uvádí i v jiných tvarech, např.

$$W' = Q - \Delta U\,, \tag{16}$$

neboli práce vykonaná plynem je rovna přijatému teplu a úbytku vnitřní energie plynu.

Pokud plyn nemění při ději objem, probíhá **izochorický děj**. Vykonaná práce je nulová ($W' = p\Delta V = 0$) a změna vnitřní energie je rovna přijatému teplu:

$$\Delta U = Q = mc_V\Delta T = nM_\mathrm{m}c_V\Delta T = nC_V\Delta T\,, \tag{17}$$

kde c_V je *měrná tepelná kapacita* při stálém objemu a C_V je *molární tepelná kapacita* při stálém objemu. Vyjádříme-li změnu vnitřní energie pomocí výrazů (13) a (14), dostáváme

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T \;\ldots\; \text{pro jednoatomový plyn,}$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}nR\Delta T \;\ldots\; \text{pro dvouatomový plyn.}$$

Porovnáním s výrazem (17) dostaneme

$$C_V = \frac{3}{2}R\,,\quad c_V = \frac{3}{2}\frac{R}{M_\mathrm{m}} \;\ldots\; \text{pro jednoatomový plyn,}$$

$$C_V = \frac{5}{2}R\,,\quad c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{M_\mathrm{m}} \;\ldots\; \text{pro dvouatomový plyn.}$$

Mezi molárními tepelnými kapacitami za stálého tlaku a za stálého objemu platí vztahy:

$$C_p = C_V + R\,,\quad c_p = c_V + \frac{R}{M_\mathrm{m}} \;\ldots\; \text{Mayerův vztah}\,, \tag{18}$$

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \varkappa \;\ldots\; \text{Poissonova konstanta.}$$

Pak molární a měrné tepelné kapacity za stálého tlaku jsou

$$C_p = \frac{5}{2}R\,,\quad c_p = \frac{5}{2}\frac{R}{M_\mathrm{m}} \;\ldots\; \text{pro jednoatomový plyn,}$$

$$C_p = \frac{7}{2}R\,, \quad c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{M_\mathrm{m}} \;\ldots \text{ pro dvouatomový plyn.}$$

Užitím Mayerova vztahu a Poissonovy konstanty dostáváme další významné vztahy pro molární a měrné tepelné kapacity:

$$C_V = \frac{R}{\varkappa - 1}\,, \quad c_V = \frac{1}{\varkappa - 1}\frac{R}{M_\mathrm{m}} \tag{19}$$

$$C_p = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}R\,, \quad c_p = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{R}{M_\mathrm{m}} \tag{20}$$

Pro Poissonovu konstantu dosazením za C_p a C_V dostaneme

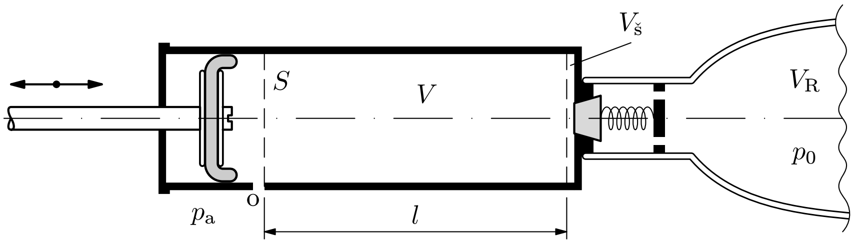
$$\varkappa = \frac{5}{3} \doteq 1{,}67 \;\ldots \text{ pro jednoatomový plyn,}$$

$$\varkappa = \frac{7}{5} = 1{,}40 \;\ldots \text{ pro dvouatomový plyn.}$$

U skutečných plynů se Poissonova konstanta může od těchto hodnot lišit, jak je zřejmé z tabulky v příloze na str. 58. Zde jsou uvedeny i jiné konstanty vybraných plynů.

Příklad 1 – pístový kompresor

Základním typem kompresoru je pístový kompresor, jednoduchým příkladem je hustilka na pneumatiky bicyklů a automobilů na obr. 7. Pracovní objem kompresoru je $V = Sl$, objem nádrže (recipientu, jímače, pneumatiky) je V_R. Z konstrukčních důvodů vzniká při pravé úvrati pístu škodlivý prostor o objemu $V_\mathrm{š}$, z něhož už nelze plyn vytlačit. Důležitou konstrukční součástí kompresoru jsou záklopky. Jedna oddělí prostor recipientu od válce po vytlačení objemu V. Druhá je v pístu a naopak propojí vnitřní prostor válce s okolím při vracení pístu. U hustilky plní funkci této záklopky jednostranně propustný píst s koženou manžetou. Doplnění válce hustilky vzduchem v jeho horní úvrati umožňuje otvor o. Funkci první záklopky u hustilky plní ventilek na duši pneumatiky.



Obr. 7 Pístový kompresor (hustilka)

a) Popište proces huštění a určete vzrůst tlaku v nádrži po k-tém pracovním zdvihu pístu za předpokladu konstantní teploty a zanedbatelného škodlivého prostoru. Počáteční tlak je $p_0 = p_\mathrm{a}$.
b) Vypočítejte maximální tlak p_max, na který lze stlačit plyn v nádrži, je-li objem škodlivého prostoru $V_\mathrm{š} > 0$.

Řešení

a) Je-li počáteční tlak v nádrži p_a, vznikne po 1. zdvihu tlak p_1, pro který bude podle Boylova-Mariottova zákona platit

$$p_1 V_\mathrm{R} = p_\mathrm{a}(V_\mathrm{R} + V)\,, \quad \text{neboli} \quad p_1 = \frac{p_\mathrm{a}(V_\mathrm{R} + V)}{V_\mathrm{R}} = p_\mathrm{a}\left(1 + \frac{V}{V_\mathrm{R}}\right).$$

Po vtlačení 2. objemu V do nádrže bude v ní tlak

$$p_2 = p_\mathrm{a}\left(1 + \frac{2V}{V_\mathrm{R}}\right).$$

a po k-tém pracovním zdvihu vznikne tlak

$$p_k = p_\mathrm{a}\left(1 + \frac{kV}{V_\mathrm{R}}\right).$$

Tlak tedy vzrůstá řadou aritmetickou.

b) Maximální dosažitelný tlak v nádrži je omezen existencí škodlivého prostoru. Je to tlak p_max ve škodlivém prostoru, když se do něj vtlačí právě celý objem válce z původního tlaku p_a. Pak

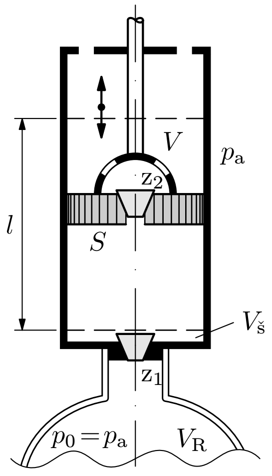
$$(V + V_\mathrm{š})p_\mathrm{a} = V_\mathrm{š} p_\mathrm{max}\,, \qquad \text{neboli} \qquad p_\mathrm{max} = p_\mathrm{a}\frac{V + V_\mathrm{š}}{V_\mathrm{š}}\,.$$

Poznámka

Maximální tlak lze zvětšit jednak dosažením co nejmenšího objemu $V_\mathrm{š}$, jednak užitím vícestupňových kompresorů, kdy se např. u dvoustupňového kompresoru nestlačuje ve druhém válci vzduch o tlaku p_a, nýbrž vzduch stlačený již v prvním válci. Hodnotu maximálního dosažitelného tlaku ovlivňují rovněž různé netěsnosti v okruhu kompresoru.

Příklad 2 – pístová vývěva

Vývěvy jsou stroje sloužící k vyčerpání vzduchu (nebo jiného plynu) z uzavřeného prostoru, tzv. recipientu. Nejstarším typem vývěvy je *pístová vývěva Guerickova*, zkonstruovaná v polovině 17. stol. Základem vývěvy je válec s pístem spojený s recipientem o objemu V_{R} (obr. 8). Prostor válce je od recipientu oddělen záklopkou z_1, která se otevírá při sání (při pohybu pístu nahoru) a zavírá při výtlaku (při pohybu pístu dolů). Při výtlaku se naopak otevírá záklopka z_2, která umožňuje přečerpání vzduchu ze spodní části válce do okolního prostoru. Pracovní objem V vývěvy je dán zdvihem l pístu a jeho plošným obsahem: $V = Sl$. Ve válci vývěvy vzniká v důsledku jeho konstrukce škodlivý prostor o objemu $V_{\check{s}}$, ze kterého již nelze vzduch vyčerpat.



Obr. 8 Pístová vývěva Guerickova

a) Popište proces čerpání vzduchu z recipientu za konstantní teploty a při zanedbání škodlivého prostoru, tj. určete tlak p_k v recipientu po k-tém zdvihu pístu směrem nahoru. Počáteční tlak v recipientu je $p_0 = p_{\mathrm{a}}$.

b) Vypočtěte minimální tlak $p_{\min}$, na který lze vyčerpat recipient při uvážení škodlivého prostoru o objemu $V_{\check{s}}$.

Řešení

a) Podle zákona Boylova-Mariottova bude při 1. zdvihu platit

$$V_{\mathrm{R}} p_{\mathrm{a}} = (V_{\mathrm{R}} + V) p_1, \quad \text{čili} \quad p_1 = p_{\mathrm{a}} \frac{V_{\mathrm{R}}}{V_{\mathrm{R}} + V}\,.$$

Před druhým zdvihem bude v recipientu tlak p_1 a po něm p_2, pro nějž analogicky platí

$$p_2 = p_1 \frac{V_{\mathrm{R}}}{V_{\mathrm{R}} + V} = p_{\mathrm{a}} \left(\frac{V_{\mathrm{R}}}{V_{\mathrm{R}} + V} \right)^2 .$$

Po k-tém zdvihu bude pro tlak v recipientu platit

$$p_k = p_{\mathrm{a}} \left(\frac{V_{\mathrm{R}}}{V_{\mathrm{R}} + V} \right)^k .$$

Tlak tedy klesá podle geometrické řady a teoreticky nulové hodnoty by dosáhl po nekonečném počtu zdvihů – ovšem za předpokladu $V_{\check{s}} = 0$.

b) Protože při dolní úvrati se škodlivý prostor propojí s okolním vzduchem, lze recipient vyčerpat jen na tlak $p_{\min}$, pro který platí

$$V_{\check{s}} p_a = (V_{\check{s}} + V) p_{min}, \quad \text{tedy} \quad p_{min} = p_a \frac{V_{\check{s}}}{V_{\check{s}} + V}\,.$$

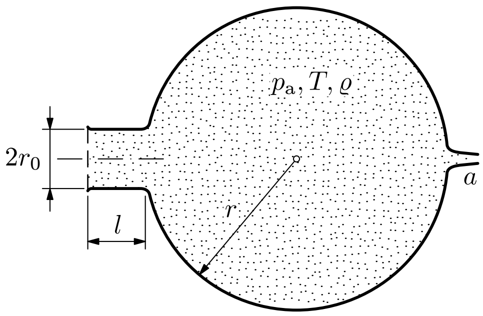
Poznámka
Ani u pečlivě sestrojených jednostupňových vývěv nelze z konstrukčních důvodů dosáhnout menšího minimálního tlaku než asi 1 ‰ tlaku p_a. Dosažitelný minimální tlak ovlivňují i různé netěsnosti vývěvy (v pracovním válci, v potrubí) – viz úlohu 6.

Příklad 3 – Helmholtzův rezonátor

V dřívější době, kdy nebyly k dispozici dnes běžné elektronické přístroje (mikrofony, zesilovače, PC), se k analýze zvuku používaly mechanické rezonátory. Jejich nejznámějším představitelem je *Helmholtzův rezonátor* (obr. 9). Je to dutá kovová koule (baňka) o poloměru r opatřená na jedné straně relativně krátkým hrdlem o poloměru r_0 a délce l, kterým do rezonátoru vstupuje zvuk. Na druhé straně je úzký trubicový výběžek a, který se při analýze vkládá do ucha. Jakmile je v analyzovaném zvuku obsažen tón, na který je analyzátor naladěn, začne silně znít. Není-li tón ve zvuku obsažen, je analyzátor němý. Rezonátory se sestavují do sad o různých kmitočtech.

a) Odvoďte vztah pro rezonanční frekvenci. Vyjádřete ji jednak jako funkci rozměrů rezonátoru r, r_0, l, teploty T a konstant $\varkappa$, R, M_m, jednak pomocí rychlosti zvuku
$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p_a}{\varrho}}\,,$$
kde p_a je atmosférický tlak a ϱ hustota vzduchu pro danou teplotu.

b) Vypočtěte poloměr r dutiny, má-li být rezonanční kmitočet 440 Hz (komorní a[1]) pro 20 °C při rozměrech hrdla r_0 = 18 mm, l = 20 mm. Je dáno $\varkappa$ = 1,40 a molární hmotnost vzduchu $M_m = 28{,}96 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$.



Obr. 9 Helmholtzův rezonátor

Řešení

a) Pro přibližné řešení budeme uvažovat jednoduchý model rezonátoru, u něhož vzduch v hrdle bude jen nositelem setrvačných vlastností rezonátoru a vzduch v baňce jen nositelem jeho pružných vlastností. Je to obdoba hmotného bodu na pružině o zanedbatelné hmotnosti. To můžeme přijmout, když objem baňky bude mnohem větší než objem hrdla. Pak lze uspořádaný pohyb částic vzduchu v baňce zanedbat oproti uspořádanému pohybu částic v hrdle.

Vzduch o hustotě ϱ má v hrdle hmotnost $m = \varrho l S$. Při dopadu zvukové vlny se tato vzduchová zátka posune o x a tlak v baňce $p = p_\mathrm{a}$ se zvětší o Δp. Protože kmity zátky jsou rychlé, můžeme považovat stavové změny plynu v baňce za adiabatické, pro něž platí vztah (10): $pV^{\varkappa} = \text{konst.}$ Provedeme-li jeho diferenciaci, dostaneme

$$\mathrm{d}p\, V^{\varkappa} + \varkappa p V^{\varkappa - 1} \mathrm{d}V = 0 \quad \text{neboli} \quad \mathrm{d}p = -\varkappa p \frac{\mathrm{d}V}{V}\,.$$

Posune-li se vzduchová zátka z rovnovážné polohy o malé x (kladně směrem vpravo), změní se objem o $\Delta V = -Sx$ a tlak vzroste o

$$\Delta p = \varkappa p \frac{S}{V} x\,.$$

Na plochu S vzduchové zátky tedy působí síla o souřadnici

$$F = -S\Delta p = -\varkappa p \frac{S^2}{V} x\,.$$

Pohybová rovnice vzduchové zátky o hmotnosti $m = \varrho l S$ je

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\varkappa p \frac{S^2}{V} x\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\varkappa p S}{\varrho l V} x = 0\,.$$

Toto je rovnice harmonických kmitů, pro jejíž úhlovou frekvenci platí

$$\omega^2 = \frac{\varkappa p S}{\varrho l V}, \quad \text{kde} \quad p = p_\mathrm{a}.$$

Odtud úpravou pomocí vztahu pro rychlost zvuku dostaneme vlastní frekvenci rezonátoru

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varkappa p_\mathrm{a} S}{\varrho l V}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV}} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{3r_0^2}{lr^3}}\,.$$

Užitím stavové rovnice ve tvaru $\dfrac{p}{\varrho} = \dfrac{RT}{M_\mathrm{m}}$ dostaneme vztah

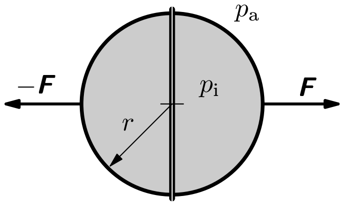
$$f = \frac{r_0}{4\pi}\sqrt{\frac{3\varkappa RT}{M_\mathrm{m} l r^3}}\,.$$

b) Poloměr dutiny pro komorní a[1] je $\quad r = \sqrt[3]{\left(\dfrac{r_0}{4\pi f}\right)^2 \dfrac{3\varkappa RT}{M_\mathrm{m} l}} = 57\ \mathrm{mm}\,.$

1.7 Úlohy ke kapitole 1

1. Záhada magdeburských polokoulí

Vynálezce vývěvy Otto von Guericke provedl v Magdeburku v roce 1654 významný veřejný pokus, při kterém se dvěma koňským osmispřežím nepovedlo oddělit od sebe dvě mosazné zabroušené polokoule, z jejichž vnitřního prostoru byl vyčerpán vzduch (obr. 10). Vypočtěte velikost síly potřebné k oddělení polokoulí o vnitřním poloměru $r = 300$ mm s vnitřním tlakem $p_\mathrm{i} = 0{,}10 p_\mathrm{a}$, kde $p_\mathrm{a} = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa.

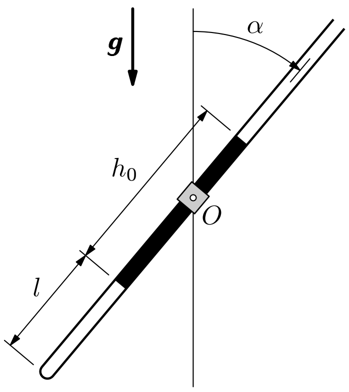


Obr. 10 Magdeburské polokoule

2. Pozor na dýchání pod vodou

Vysvětlete, proč je dýchání pod vodou pomocí hadice, jejíž jeden konec je vynořen nad hladinu, obtížné a nebezpečné. Zdravé lidské cvičené plíce dokáží po delší dobu vyvíjet podtlak nanejvýš $\Delta p_\mathrm{max} = p_\mathrm{a}/10 = 10$ kPa. Vypočtěte hloubku h_max, ze které může potápěč ještě používat sací dýchací hadici, aby se neudusil.

3. Objevte Boylův zákon



Obr. 11 Meldeho trubice

Irský fyzik *R. Boyle* (1627 – 1691) provedl r. 1660 experiment, který se stal základem tehdy vznikající mechaniky plynů. Pokuste se jej pro sebe objevit pomocí dat měření s Meldeho trubicí (obr. 11). Je to asi 1 m dlouhá skleněná kapilární trubice, na jednom konci zatavená a na druhém konci otevřená. Trubice má konstantní příčný průřez, který u naší trubice je $S = 5{,}00\ \mathrm{mm}^2$. Vzduch v zaslepené části trubice je uzavřen sloupcem rtutí o délce $h_0 = 500$ mm. Trubice je uprostřed opatřena držákem s čepem a otáčivě upevněna ke svislé desce s kruhovým úhloměrem. Měříme závislost délky l vzuchového sloupce na úhlu otočení α.

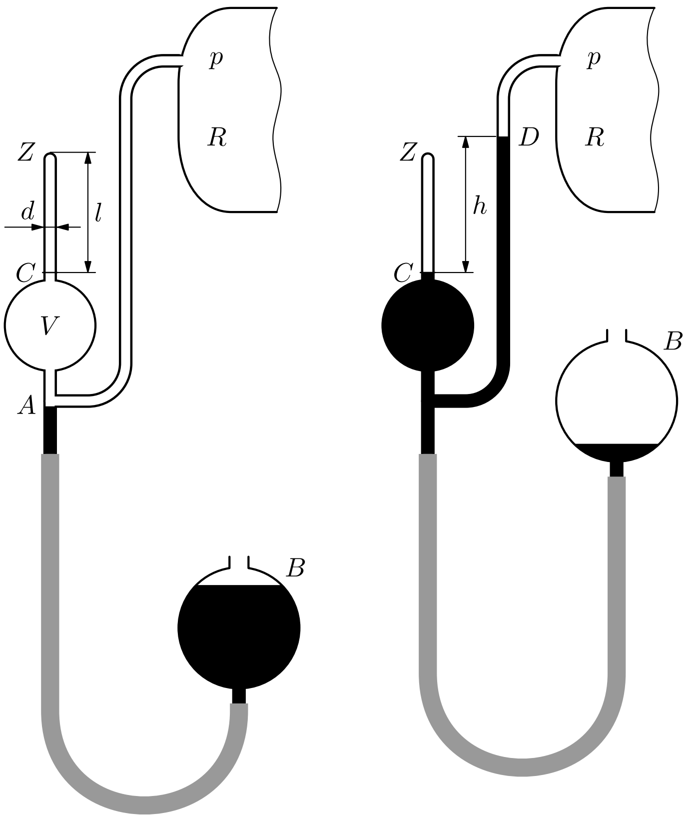
Po každém pootočení trubice chvíli počkáme, aby naměřené délky l (viz tabulka) odpovídaly změnám za stálé teploty. Při měření byl atmosférický tlak $p_{\mathrm{a}} = 989$ hPa, teplota $t = 20$ °C, hustota rtuti $\varrho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}, $g =$ $= 9{,}81$ m · s^{-2}.

α	0°	29,0°	52,5°	90,5°	119°	152°
l/mm	122	128	144	205	302	510

Představte si, že jste v roli objevitele Boyla a vaším úkolem je objevit zákon který váže tlak a objem plynu při konstantní teplotě.

Poznámka

Zákon objevil nezávisle na Boylovi také francouz E. Mariotte. Bylo to sice o 17 let později (r. 1677), přesto nese zákon jména obou fyziků.



Obr. 12 McLeodův vakuometr

4. Poradíte si s McLeodovým vakuometrem?
Při měření malých tlaků se používá McLeodův vakuometr podle obr. 12. Recipient, v němž máme měřit tlak p, se propojí hadicí s vakuometrem, v němž je rtuť v první fázi pod ústím A do hlavní trubice vakuometru. Pak zvedneme zásobní baňku B se rtutí, čímž se nejprve uzavře otvor A a pak se plyn v horní části zatavené hlavní trubice začne stlačovat. Zvedáním baňky B se dosáhne toho, že rtuť vystoupí ke značce C. Současně vystoupí v přívodní části trubice k bodu D, přičemž rozdíl h můžeme měřit. Objem horní části trubice – od otvoru A až po zatavený konec Z je $V = 150\ \mathrm{cm}^3$, vnitřní průměr zatavené trubičky je $d = 1{,}00$ mm a její délka od značky C je $l = 110$ mm. Hustota rtuti $\varrho = 13{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Děj s plynem v prostoru V při manipulaci s baňkou B považujte za izotermický. Určete tlak v recipientu, když měřením zjistíme $h = 105$ mm. Jak lze ovlivňovat měřicí rozsah vakuometru?

5. Odvoďte stavovou rovnici
V čl. 1.3 byla odvozena stavová rovnice z experimentálních zákonů Boylova-Mariottova a Charlesova. Odvoďte je ještě užitím zákona Boylova-Mariottova a Gay-Lussacova a také užitím zákona Charlesova a Gay-Lussacova. Příslušné děje při změně stavu 1 na stav 2 znázorněte v p-V diagramu.

6. Co způsobila netěsnost vývěvy?
Vývěva trvale čerpala vzduch z recipientu o objemu $V = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ a při teplotě $t = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ bylo dosaženo tlaku $p_1 = 2{,}4$ Pa. Pak ale vznikla v čerpacím potrubí netěsnost, v jejímž důsledku se tlak v recipientu zvětšil na $p_2 = 8{,}7$ Pa za konstantní teploty. Kolik molekul vzduchu proniklo vlivem netěsnosti do recipientu?

7. Mícháme plyny
V nádobě o objemu $V_1 = 3{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ je kyslík O_2 o tlaku $p_1 = 4{,}00 \cdot 10^4$ Pa a teplotě $T_1 = 280$ K, ve druhé nádobě o objemu $V_2 = 5{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ je dusík N_2 o tlaku $p_2 = 7{,}00 \cdot 10^4$ Pa a teplotě $T_2 = 300$ K. Spojíme-li nádoby trubicí zanedbatelného objemu, plyny se smísí. Vypočtěte výsledný tlak a teplotu po dosažení rovnovážného stavu. Předpokládáme, že plyny jsou ideální, chemicky spolu nereagují a soustava nádob je izolovaná od okolí. Molární tepelná kapacita dvouatomových plynů při stálém objemu je $C_V = \frac{5}{2}R$.

8. Prozkoumejte směs plynů
V uzavřené nádobě je směs dvou plynů: dusíku N_2 o hmotnosti $m_1 = 200$ g a molární hmotnosti $M_{\mathrm{m}1} = 28{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$ a kyslíku O_2 o hmotnosti $m_2 = 100$ g a molární hmotnosti $M_{\mathrm{m}2} = 32{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$. Tlak směsi

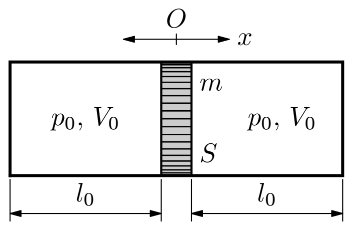
je $p = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa při teplotě $T = 293$ K. Oba plyny považujte za ideální. Vypočítejte:
a) parciální tlaky jednotlivých plynů,
b) hustotu směsi plynů.

9. Voda v zásobníku vzduchu

V zásobníku o objemu $V = 0{,}100\ \mathrm{m^3}$ je suchý vzduch o teplotě $t_0 = 0\ °\mathrm{C}$ a tlaku $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Do zásobníku byly přivedeny $\Delta m = 2{,}00$ g vody a zásobník byl zahřát na teplotu $t_1 = 30\ °\mathrm{C}$. Jaký byl tlak p_1 v zásobníku po zahřátí a odpaření vody? Objem vpravené vody a roztažnost zásobníku zanedbejte. Při 30 °C je tlak sytých par $p_\mathrm{s} = 4\,240$ Pa a jejich hustota $\varrho_\mathrm{s} = 3{,}03 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

10. Neviditelná pružina oscilátoru

V uzavřeném válci se vzduchem o tlaku $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa se nachází píst, který se může pohybovat bez tření. Píst o hmotnosti $m = 500$ g a plošném obsahu $S = 100\ \mathrm{cm^2}$ je umístěn uprostřed ve vzdálenosti $l_0 = 150$ mm od každého z čel válce (obr. 13). Píst dokonale utěsňuje obě poloviny válce od sebe. Vypočtěte frekvenci kmitů pístu, když jej nepatrně vychýlíme z rovnovážné polohy.



Obr. 13 Kmity pístu ve válci

Děje probíhající ve vzduchu považujte za adiabatické, přičemž pro vzduch $\varkappa = 1{,}40$. Ke zjednodušení matematických vztahů můžete použít přibližný vzorec $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$, je-li $x \ll 1$.

2 Plyn v tíhovém poli

2.1 Atmosférický tlak

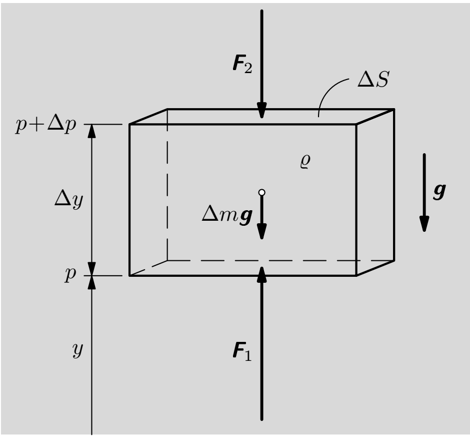
Vložíme-li plynné těleso do silového pole o intenzitě $\boldsymbol{K}$, projeví se to vznikem sil působících na částice plynu. Takovým silovým polem na povrchu Země je všudypřítomné pole tíhových sil o intenzitě $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{g}$, přičemž v blízkosti zemského povrchu můžeme uvažovat $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{konst}$. Tíhové zrychlení $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}_G/m$ je tíhová síla vztažená na jednotkovou hmotnost tělesa.

Uvažujme pro jednoduchost plynné těleso v tíhovém poli, ze kterého vyjmeme element ve tvaru elementárního kvádru o výšce Δy a plošném obsahu podstavy ΔS. Obsahuje plyn o hmotnosti $\Delta m = \varrho \Delta y \Delta S$, kde ϱ je hustota plynu, kterou považujeme v rozsahu kvádru za konstantní. Pak tíhové pole působí na element silou $\Delta \boldsymbol{F} = \Delta m \boldsymbol{g}$. Protože pole vyvolává v plynném tělese tlak, který je funkcí y, bude na dolní stěnu o poloze y působit tlaková síla o velikosti $F_1 = p\Delta S$ a na horní stěnu o poloze $y + \Delta y$ tlaková síla o velikosti $F_2 = (p+\Delta p)\Delta S$. Na čtyři boční stěny budou rovněž působit tlakové síly, které budou kolmé k $\boldsymbol{g}$, přičemž dvě a dvě budou mít stejnou velikost a opačný směr, a proto se vzájemně vyruší. *Podmínka statické rovnováhy* elementu ve směru vektoru $\boldsymbol{g}$ má proto tvar

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \Delta m \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}, \quad \text{neboli} \quad F_1 - F_2 - \Delta m g = 0\,, \quad -\Delta p \Delta S - \varrho \Delta y\, \Delta S\, g = 0\,.$$

Odtud rovnice rovnováhy je $\Delta p = -\varrho g \Delta y$, resp. v diferenciálním tvaru

$$\boxed{\mathrm{d}p = -\varrho g \mathrm{d}y}\,. \tag{17}$$



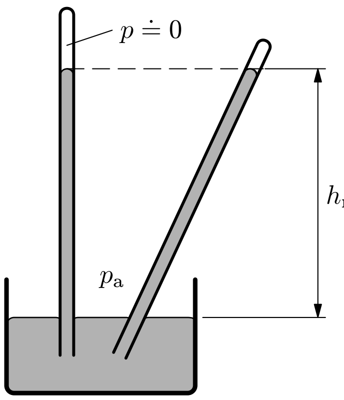
Obr. 14 Působení tíhového pole na element plynného tělesa

Protože plyn je stlačitelný, je $\varrho \neq$ konst. K integraci rovnice (17) je proto třeba znát funkční závislost hustoty na tlaku (jednoduchý případ je řešen v následujícím článku 2.2). Budeme-li uvažovat malý rozdíl výšek $y_2 - y_1$, můžeme zjednodušeně uvažovat $\varrho =$ konst. Pak je integrace rovnice (17) jednoduchá: $p_2 - p_1 = -\varrho g(y_2 - y_1)$. Označíme-li okrajové podmínky: $p_1 = p_0$ pro $y_1 = 0$ a $p_2 = p$ pro $y_2 = h$, dostaneme

$$p = p_0 - \varrho g h \quad \text{pro} \quad \varrho \approx \text{konst.} \tag{18}$$

Z výsledku (18) můžeme udělat jednoduchý kvalitativní závěr – atmosférický tlak s výškou klesá. V přízemních vrstvách vzduchu je to na 100 m výšky asi o $1{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 100\ \text{Pa} \doteq 1{,}2\ \text{kPa}$.

Integrace rovnice (17) pro celý vzdušný obal Země není možná, protože není známa exaktní funkce, podle níž se mění hustota vzduchu. Barometrický tlak celého plynného obalu Země, který dosahuje tloušťky až 1000 km (3/4 hmotnosti vzduchu je ovšem v přízemní vrstvě 16 km) je však znám již od r. 1643 díky *Torricelliho experimentu*.



Obr. 15 Torricelliho pokus

Ital G. E. Torricelli udělal pokus, při kterém dal do rovnováhy aerostatický tlak vzdušného obalu Země s hydrostatickým tlakem sloupce rtuti. Vzal tlustostěnnou trubici o délce asi 1 m, kterou na jednom konci zatavil, naplnil ji rtutí, volný konec uzavřel prstem a ponořil do nádobky se rtutí. Potom uvolnil prst a rtuť klesla na výšku $h_\text{r} \doteq 75$ cm (obr. 15). Nad hladinou rtuti jsou jen zbytkové páry rtuti o zanedbatelném tlaku, je zde tedy $p \doteq 0$ (prakticky vakuum). Z toho vyplývá, že v tomto případě je atmosférický tlak roven hydrostatickému tlaku sloupce rtuti o výšce 75 cm, neboli

$$p_\text{a} = h_\text{r} \varrho_\text{r} g = 0{,}75 \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81\ \text{Pa} = 1{,}00 \cdot 10^5\ \text{Pa}\,.$$

Normální atmosférický tlak $p_\text{n} = 101{,}325$ kPa byl zvolen tak, aby při teplotě 0 °C ($\varrho_\text{r} = 13\,595{,}1\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) odpovídal výšce rtuťového sloupce

$$h_\text{r} = \frac{p_\text{n}}{\varrho_\text{r} g_\text{n}} = \frac{1{,}013\,25 \cdot 10^5}{13{,}595\,1 \cdot 10^3 \cdot 9{,}806\,65}\ \text{m} = 0{,}760\,00\ \text{m} = 760\ \text{mm}\,.$$

Odtud pro vedlejší jednotku 1 torr, která odpovídá hydrostatickému tlaku sloupce rtuti o výšce 1 mm, plyne:

$$1\ \mathrm{torr} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 13{,}595\,1 \cdot 10^{3} \cdot 9{,}806\,65\ \mathrm{Pa} = 133{,}322\ \mathrm{Pa}\,.$$

Dříve se k měření atmosférického tlaku užívala přímo jednotka „mm rtuťového sloupce“, což však nebylo z hlediska rozměru veličiny fyzikálně správné.

Normální atmosférický tlak odpovídá při teplotě 0 °C výšce vodního sloupce ($\varrho = 998{,}6\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) o hodnotě

$$h_{\mathrm{v}} = \frac{p_{\mathrm{n}}}{\varrho g_{\mathrm{n}}} = \frac{1{,}013\,25 \cdot 10^{5}}{998{,}6 \cdot 9{,}806\,65}\ \mathrm{m} = 10{,}346\ \mathrm{m}\,.$$

K měření atmosférického tlaku se užívají *tlakoměry* neboli *barometry*. Základní konstrukce *rtuťového barometru* je založena na Torricelliho pokusu. Běžně se používá kovový barometr, tzv. *aneroid*, jehož podstatnou částí je kovová vakuová nádoba z vlnovce, která se deformuje vnějším tlakem a deformace se měří pomocí pákového (případně ozubeného) mechanismu. K měření podtlaku se používají *vakuometry*. Pro malý podtlak to může být běžná U trubice se rtutí nebo vodou, pro velký podtlak např. McLeodův vakuometr (viz úloha 4). Podrobnější informace o barometrech a vakuometrech lze najít např. v [5].

2.2 Barometrická rovnice

Uvažujme jednoduchý model atmosféry, u něhož se s výškou nebude měnit teplota ani tíhové zrychlení, a zkoumejme, jak se v závislosti na výšce bude měnit atmosférický, resp. barometrický tlak.

Považujeme-li vzduch za ideální plyn, můžeme pro změny stavových veličin použít Boylův-Mariottův zákon (1), který přepíšeme do tvaru pro tlak a hustotu. Dělíme-li hmotností m, dostaneme

$$\frac{p}{\varrho} = \mathrm{konst}\,, \quad \text{neboli} \quad \varrho = \varrho_0 \frac{p_{\mathrm{a}}}{p_{\mathrm{a0}}}\,, \tag{19}$$

kde ϱ je hustota vzduchu při atmosférickém tlaku p_{a} a ϱ_0 při atmosférickém tlaku p_{a0} ve výchozí nulové výšce. Podle (19) tedy hustota vzduchu v uvažovaném případě $T = $ konst. závisí pouze na p. Dosadíme-li (19) do (17), dostaneme jednoduchou diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}p_{\mathrm{a}} = -\varrho_0 \frac{p_{\mathrm{a}}}{p_{\mathrm{a0}}} g\,\mathrm{d}y\,,$$

kterou můžeme snadno integrovat, když separujeme (oddělíme od sebe) proměnné p_{a} a y, tedy

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{a}}}{p_{\mathrm{a}}} = -\frac{\varrho_0}{p_{\mathrm{a0}}} g\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrovat budeme pro tlak v mezích od p_{a0} do p_{a} a pro odpovídající výšky $y = 0$ a $y = h$. Pak

$$\int\limits_{p_{a0}}^{p_a} \frac{\mathrm{d}p_a}{p_a} = -\frac{\varrho_0}{p_{a0}} g \int\limits_0^h \mathrm{d}y\,, \quad \text{neboli} \quad \ln\frac{p_a}{p_{a0}} = -\frac{\varrho_0}{p_{a0}} gh\,.$$

Odtud dostaneme hledanou *barometrickou rovnici*

$$\boxed{p_a = p_{a0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0}{p_{a0}} gh} = p_{a0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{M_m}{RT} gh}\,,} \tag{20}$$

když jsme ještě provedli výhodnou úpravu exponentu užitím stavové rovnice (7), kde $n = m/M_m$ a $m/V_0 = \varrho_0$.

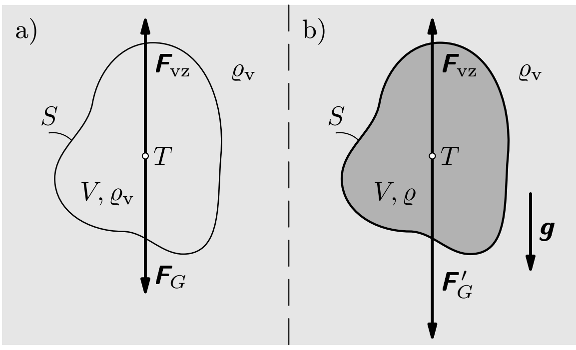
Závislost hustoty vzduchu na výšce při konstantní teplotě dostaneme ze vztahu (19), do kterého dosadíme z (20):

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0}{p_{a0}} gh}\,. \tag{21}$$

Uvedený model předpokládal $T =$ konst. To však není pro velké výškové rozdíly splněno (viz třeba příklad 9). Uvažujeme-li i změnu teploty, je řešení úlohy obtížnější (viz například [5], s. 434, kde je uveden vzorec pro „srovnávací atmosféru“, nebo MFCh tabulky, kde je závislost tlaku na výšce a teplotě tabelována).

2.3 Archimedův zákon

Podobně jako u těles ponořených v kapalinách, které se nacházejí v tíhovém poli, bude rovněž u těles obklopených plynem nacházejícím se v tíhovém poli platit Archimedův zákon. Protože jsme se Archimedovým zákonem pro kapaliny podrobně zabývali v textu [14], omezíme se zde na stručný výklad s důrazem na specifika, která vyplývají z toho, že tekutinou je plyn.



Obr. 16 K odvození Archimedova zákona

K odvození Archimedova zákona provedeme úvahu (myšlenkový pokus) platnou pro těleso libovolného tvaru. Představme si, že ve vzduchu o hustotě

ϱ_v, který se nachází v tíhovém poli $\boldsymbol{g} = \textbf{konst}.$, vymezíme myšlenou uzavřenou plochou S vzduchové těleso stejného tvaru, jaký má těleso, jehož vztlakovou sílu vyšetřujeme. Při tomto myšleném vymezení vzduchového tělesa se nic nezměnilo – vymezené těleso se bude vznášet. Pak tedy vztlaková síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{vz}$ je v rovnováze s tíhovou silou $\boldsymbol{F}_G = V\varrho_\mathrm{v}\boldsymbol{g}$ s působištěm v těžišti T (obr. 16a) neboli

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{vz} + \boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{0} \quad \text{a tedy} \quad \boldsymbol{F}_\mathrm{vz} = -\boldsymbol{F}_G = -V\varrho_\mathrm{v}\boldsymbol{g}\,. \tag{22}$$

Nyní vzduchové těleso vymezené myšleným řezem nahradíme tělesem o stejném objemu V a tvaru, avšak o hustotě ϱ (obr. 16b). Protože tíhová síla je teď $\boldsymbol{F}'_G = V\varrho\boldsymbol{g}$, bude na těleso působit výsledná síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{c}$, která je součtem vztlakové síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{vz}$, která se nezměnila, a tíhové síly $\boldsymbol{F}'_G$:

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{c} = \boldsymbol{F}'_G + \boldsymbol{F}_\mathrm{vz} = V(\varrho - \varrho_\mathrm{v})\boldsymbol{g} = m\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right)\boldsymbol{g}\,, \tag{23}$$

kde $m = \varrho V$ je hmotnost vloženého tělesa. Vztah (23) je vyjádřením Archimedova zákona pro plyny:

Těleso vložené celým svým povrchem do plynu (vzduchu) nacházejícího se v tíhovém poli je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost je rovna tíze plynu (vzduchu) stejného objemu, jako je objem vloženého tělesa.

Archimedův zákon (23) můžeme ještě přepsat do jiného tvaru v případě, že vložené těleso bude plynné o hustotě ϱ. Pak užitím vztahu (8) pro $p = p_\mathrm{v}$ můžeme vyjádřit podíl hustot podílem teplot T, T_v a podílem molárních hmotností M_m, M_mv:

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{c} = m\left(1 - \frac{T}{T_\mathrm{v}}\,\frac{M_\mathrm{mv}}{M_\mathrm{m}}\right)\boldsymbol{g}\,, \tag{24}$$

kde $m = \varrho V$ je hmotnost vloženého plynného tělesa. Budou-li obě plynná tělesa vzduchová, avšak různých teplot (např. horkovzdušný balon o teplotě vnitřního vzduchu T, teplota okolního vzduchu T_v), pak

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{c} = m\left(1 - \frac{T}{T_\mathrm{v}}\right)\boldsymbol{g}\,. \tag{25}$$

Jedná-li se např. o balony, je nutné do kalkulace sil zahrnout ještě i tíhovou sílu konstrukce, obalu, zátěže atd. (viz příklady 6 a 9 a úlohy 15 až 18).

Archimedův zákon pro plyny má také velký význam pro přesné vážení (viz příklad 4) a jiná měření související s vážením (příklad 5).

Příklad 4 – redukce na vzduchoprázdný prostor při vážení

Vážíme-li těleso na vzduchu a má-li jiný objem než závaží, kterým je vyvažováno, působí na těleso jiná vztlaková síla než na závaží. Při vážení na vzduchu tak vzniká chyba, která může být při přesném vážení nezanedbatelná.

Najděte vztah mezi hmotností m tělesa o hustotě ϱ při jeho vyvážení na rovnoramenných vahách závažím o hmotnosti z a hustotě ϱ_z ve vzduchu o hustotě ϱ_v, neboli proveďte redukci výsledku dosaženého vážením na vzduchu na vzduchoprázdný prostor.

Řešení

Pro rovnováhu na rovnoramenných vahách podle Archimedova zákona a momentové věty platí

$$\left(m - \frac{m}{\varrho}\varrho_v\right) gl = \left(z - \frac{z}{\varrho_z}\varrho_v\right) gl \,.$$

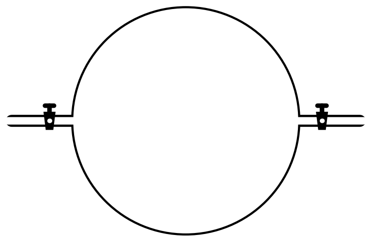
Z toho

$$m = z\frac{1 - \dfrac{\varrho_v}{\varrho_z}}{1 - \dfrac{\varrho_v}{\varrho}} \approx z\left[1 + \varrho_v\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_z}\right)\right] \,.$$

Budme-li např. vážit vodu ($\varrho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) mosazným závažím ($\varrho_z = 8{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$), přičemž $\varrho_v \doteq 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, je $m = 1{,}0011z$, tedy odchylka je jen asi 1 ‰. Tato odchylka je sice velmi malá, avšak při přesném vážení ji musíme uvažovat.

Příklad 5 – určování hustoty plynů trojím vážením

Hustota plynů se určuje nesnadně – jednak pro prchavost tohoto fyzikálního tělesa, jednak proto, že hustota plynů závisí značně i na jejich tlaku a teplotě. Hustotu plynu můžeme určit pomocí skleněné koule opatřené dvěma kohouty (obr. 17) metodou trojího vážení. Koule nechť má vnitřní objem V a vnější objem V_1. K dispozici máme vývěvu, přesné váhy, destilovanou vodu o hustotě ϱ_1, tlakoměr, vakuometr a teploměr. Navrhněte postup měření hustoty ϱ plynu.



Obr. 17 Skleněná koule pro určování hustoty plynů

Řešení

1. Skleněnou kouli připojíme jedním kohoutem k vývěvě, ke druhému kohoutu připojíme vakuometr. Vývěvou vyčerpáme z koule vzduch na co nejhlubší vakuum. Poté uzavřeme oba kohouty, odpojíme přístroje a kouli zvážíme. Při respektování vztlakových sil bude při rovnováze platit

$$m - V_1\varrho_\mathrm{v} = z_1\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{z}}\right),$$

kde m je hmotnost prázdné koule, ϱ_z hustota závaží a z_1 hmotnost závaží při vyvážení na vahách ve vzduchu o hustotě ϱ_v.

2. Ke kouli připojíme zásobník s plynem, jehož hustotu ϱ máme určit, a ke druhému kohoutu tlakoměr. Nyní otevřeme kohout k zásobníku plynu, poté k tlakoměru, uzavřeme kohout k zásobníku a odpojíme jej. Po vyrovnání teploty plynu v kouli s teplotou okolí (poznáme to z toho, že se už nebude měnit tlak) odpojíme tlakoměr a provedeme druhé vážení koule:

$$m + V\varrho - V_1\varrho_\mathrm{v} = z_2\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{z}}\right).$$

3. Kouli zcela naplníme vodou, pečlivě osušíme její povrch a vyvážíme ji závažím z_3:

$$m + V\varrho_1 - V_1\varrho_\mathrm{v} = z_3\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{z}}\right).$$

Odečteme-li první rovnici od druhé a pak od třetí rovnice, dostaneme

$$V\varrho = (z_2 - z_1)\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{z}}\right),$$

$$V\varrho_1 = (z_3 - z_1)\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{z}}\right).$$

Dělením rovnic vychází $\quad \dfrac{\varrho}{\varrho_1} = \dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$

a z toho konečný výsledek pro hustotu plynu $\quad \varrho = \dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\varrho_1\,.$

Příklad 6 – klasický aerostat

Navrhněte balon kulového tvaru plněný heliem (klasický aerostat), který má sloužit k výstupu do výšky $h = 1\,500$ m. Předpokládaná hmotnost konstrukce balonu (bez plynové náplně) a zátěže je $m_\mathrm{b} = 1\,200$ kg. Balon bude mít ve spodní části otvor, který umožní vyrovnávání tlaku s okolním atmosférickým tlakem (jinak by mohl aerostat po výstupu působením přetlaku prasknout. Pro zjednodušení předpokládejte, že teplota vzduchu $t_0 = 20{,}0$ °C se s výškou nemění a tlak se mění podle barometrické rovnice z počáteční hodnoty $p_{a0} = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa.

a) Určete potřebný objem V balonu, jeho poloměr r a hmotnost m_{He} heliové náplně pro výšku $h_0 = 0$.

b) Jaký bude relativní úbytek hmotnosti helia po výstupu do výšky h, jestliže ve výšce $h_0 = 0$ byl celý objem V balonu vyplněn heliem o tlaku $p_{a0} = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa a teplotě $t_0 = 20$ °C okolního vzduchu?

c) O jakou výšku Δh balon ještě vystoupí z výšky h, uvolní-li se zde část zátěže o hmotnosti $\Delta m_b = 20{,}0$ kg?

Při řešení předpokládejte, že termodynamické děje, při nichž se bude rovnoměrně vyrovnávat tlak helia s tlakem okolního vzduchu, probíhají dostatečně pomalu a že přitom nebude do balonu vnikat vzduch.

Molární hmotnost vzduchu $M_m = 28{,}96 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, molární hmotnost helia $M'_m = 4{,}003 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}. Předpokládejte konstantní tíhové zrychlení $g = 9{,}81$ m · s^{-2}.

Řešení

a) Ve výšce h musí nastat rovnováha tíhových sil se vztlakovou silou. Označíme-li m_v hmotnost vzduchu vytlačeného balonem o objemu V ve výšce h a m'_{He} hmotnost heliové náplně v této výšce, musí podle Archimedova zákona platit

$$(m_v - m'_{He} - m_b)g = 0\,.$$

Hmotnosti plynů ve výšce h určíme užitím stavové rovnice:

$$m_v = \frac{p_a V M_m}{RT_0}\,, \qquad m'_{He} = \frac{p_a V M'_m}{RT_0}\,,$$

kde pro tlak vzduchu i helia ve výšce h podle barometrické rovnice platí

$$p_a = p_{a0}\,\mathrm{e}^{-\frac{\varrho_v}{p_{a0}}gh} = p_{a0}\,\mathrm{e}^{-\frac{M_m}{RT_0}gh}\,.$$

Pak z podmínky rovnováhy sil vychází

$$\frac{V}{RT_0}(M_m - M'_m)p_a = m_b\,,$$

neboli potřebný objem balonu je

$$V = \frac{m_b RT_0}{(M_m - M'_m)p_{a0}}\mathrm{e}^{\frac{M_m}{RT_0}gh} = 1\,380\ \mathrm{m}^3$$

a jeho poloměr je $\quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 6{,}91\ \mathrm{m}\,.$

Hmotnost helia ve výšce $h_0 = 0$ je dána stavovou rovnicí pro vypočtený objem V:

$$m_{He} = \frac{p_{a0} V M'_m}{RT_0} = 229\ \mathrm{kg}\,.$$

b) Úbytek hmotnosti helia ve výšce h bude úměrný úbytku tlaku:

$$\Delta m_{\mathrm{He}} = m_{\mathrm{He}} - m'_{\mathrm{He}} = \frac{VM'_{\mathrm{m}}}{RT_0}(p_{\mathrm{a0}} - p_{\mathrm{a}}) = \frac{p_{\mathrm{a0}}VM'_{\mathrm{m}}}{RT_0}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0}gh}\right),$$

$$\frac{\Delta m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0}gh} = 0{,}160\,.$$

c) Protože při uvolnění zátěže Δm_{b} zůstane zachován objem V, musí se výška výstupu h zvětšit o Δh tak, aby v souladu s řešením v bodě a) platilo

$$V = \frac{(m_{\mathrm{b}} - \Delta m_{\mathrm{b}})RT_0}{(M_{\mathrm{m}} - M'_{\mathrm{m}})p_{\mathrm{a0}}}\,\mathrm{e}^{\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0}g(h+\Delta h)}\,.$$

Dělením obou výrazů pro V dostaneme

$$1 = \frac{m_{\mathrm{b}} - \Delta m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{b}}}\,\mathrm{e}^{\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT_0}g\,\Delta h}\,, \quad \text{neboli} \quad \Delta h = \frac{RT_0}{M_{\mathrm{m}}g}\ln\frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{b}} - \Delta m_{\mathrm{b}}} = 144\ \mathrm{m}\,.$$

2.4 Úlohy ke kapitole 2

11. Vzdušný obal Země není peříčko

Vypočtěte hmotnost vzduchu, který obklopuje Zemi. Je dán poloměr Země $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, normální atmosférický tlak $p_{\mathrm{n}} = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa a tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Porovnejte tuto hmotnost s celkovou hmotností Země $m_{\mathrm{z}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

12. Měření výšky pomocí tlakoměru

V určité výšce h nad zemským povrchem byl naměřen tlak $p_h = 7{,}50 \cdot 10^4$ Pa. Určete výšku h, je-li u zemského povrchu tlak $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa a uvažujete-li teplotu vzduchu $t_0 = 10$ °C za konstantní. Molární hmotnost vzduchu $M_{\mathrm{m}} = 28{,}96 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$.

13. Expedice v Himaláji

Předsunutý tábor expedice byl ve výšce $h_0 = 2\,450$ m n.m., teplota vzduchu zde byla 0 °C a atmosférický tlak $p_{\mathrm{a0}} = 74{,}2$ kPa. Zvídavý horolezec si vypočítal, v jaké výšce H klesne atmosférický tlak na polovinu oproti tlaku v táboře za předpokladu stálé teploty atmosféry. Znal hustotu vzduchu $\varrho_{\mathrm{n}} = 1{,}29\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ pro normální podmínky (0 °C, $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa). Co mu vyšlo? Výsledek porovnejte s údaji v MFCh tabulkách.

14. Hmotnost vzduchu v komíně překvapí

Určete hmotnost vzduchu ve vysokém elektrárenském komíně, o kterém budete pro jednoduchost předpokládat, že má tvar válce o výšce $h = 200$ m a poloměru

$r = 2{,}40$ m. Komín není v provozu a vzduch v něm neproudí. Tlak vzduchu v podstavě komínu je $p_{a0} = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa, teplotu vzduchu $t = 20{,}0$°C považujte za konstantní. Při výpočtu přihlédněte k závislosti tlaku na výšce. Výsledek porovnejte s výsledkem přibližného řešení, při kterém pokles tlaku s výškou zanedbáme.

Molární hmotnost vzduchu $M_m = 28{,}96 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $g = 9{,}81$ m · s^{-2}.

15. Řešíme vzducholoď pro dopravu zemního plynu

K dopravě zemního plynu ze Severního moře byla navrhována vzducholoď o vnitřním objemu nádrží $V = 8{,}0 \cdot 10^5$ m^3. Plyn o hustotě $\varrho_p = 0{,}80$ kg · m^{-3} byl nosným i pohonným médiem. Hmotnost konstrukčních systémů lodě včetně nádrží pro vodní zátěž je $m_l = 65$ t; jejich objem oproti objemu lodě zanedbejte. Hustota vzduchu $\varrho = 1{,}2$ kg · m^{-3}.

a) Vypočtěte velikost F výslednice sil, které by na loď působily po naplnění plynem.
b) Z funkčního hlediska je nutné velikost výsledné síly zmenšit na $F' = 3{,}0 \cdot 10^5$ N. Jaký objem V' musí mít vodní nádrže, abychom po jejich napuštění dosáhli požadovanou velikost výsledné síly? Hustota vody $\varrho = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}.
c) Určete hlavní rozměry plynové nádrže lodě, bude-li mít přibližně tvar válce o poměru délka (l) : průměr $(d) = 4$. Jaká bude celková hmotnost lodě po jejím naplnění plynem a vodou?

16. Heliový versus vodíkový balon

Aerostat o objemu $V = 4\,000$ m^3 naplněný heliem se pohybuje v malé výšce. Jeho užitečné zatížení, tj. hmotnost posádky a nákladu, činí $m_u = 900$ kg. O kolik by bylo možné zvětšit užitečné zatížení, pokud by se místo helia použil vodík. Pro normální atmosferický tlak a teplotu 20 °C je hustota helia $\varrho_{He} = 0{,}166$ kg · m^{-3}, hustota vodíku $\varrho_H = 0{,}083\,7$ kg · m^{-3} a hustota vzduchu $\varrho_v = 1{,}20$ kg · m^{-3}. Proč se přesto používá mnohem dražší helium?

17. Síly působící na balon

Balon ve tvaru koule o poloměru $r = 6{,}00$ m je naplněn heliem o tlaku $p' = 1{,}09 \cdot 10^5$ Pa a teplotě $t' = 18{,}0$ °C. Okolní vzduch má tlak $p_a = 987$ hPa a stejnou teplotu. Obalová tkanina má plošnou hustotu hmotnosti $\mu = 250$ g · m^{-2}, gondola se zátěží má hmotnost $m_0 = 500$ kg. Za normálních fyzikálních podmínek ($p_n = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, $t_n = 0$ °C) má helium hustotu $\varrho_{He} = 0{,}178$ kg · m^{-3} a vzduch hustotu $\varrho_v = 1{,}29$ kg · m^{-3}. Vypočtěte velikost počáteční vztlakové síly $\boldsymbol{F}_{vz}$, počáteční urychlující síly $\boldsymbol{F}_0$ a počátečního zrychlení $\boldsymbol{a}_0$ balonu.

18. Jak musíme ohřát horkovzdušný balon?

Horkovzdušný balon má objem $V = 1\,000\ \mathrm{m}^3$ a hmotnost konstrukce včetně zátěže $m_\mathrm{b} = 300$ kg. Ve spodní části je balon opatřen otvorem pod nímž jsou propanbutanové hořáky, kterými se ohřívá vzduch v balonu. Pro jednoduchost předpokládáme, že celý vnitřní prostor balonu se ohřívá rovnoměrně a že znečištění vzduchu spalinami je zanedbatelné.

a) Na jakou teplotu T_0' musíme ohřát vzduch v balonu ve výšce $h = 0$, kde při teplotě okolí $T_0 = 273$ K a atmosférickém tlaku $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa je hustota vzduchu $\varrho_0 = 1{,}29\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, aby se balon právě vznesl?

b) Jaká musí být teplota vzduchu T_h' v balonu, aby vystoupil do výšky $h = 800$ m, za předpokladu, že hustota vzduchu se s výškou mění podle barometrické rovnice (21)?

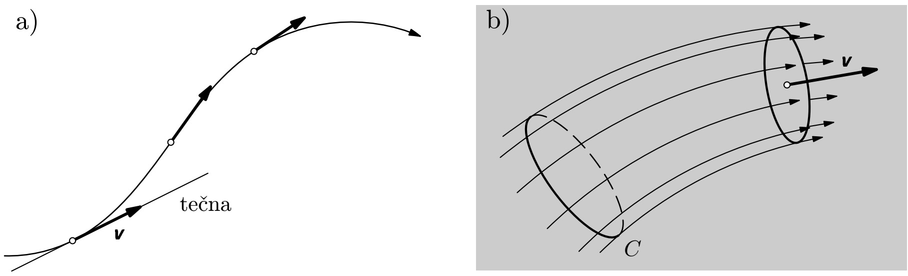
3 Proudění plynu

3.1 Popis proudění plynu

Jestliže jsme v textu [14] zdůrazňovali, že proudění kapalin je daleko složitější než pohyb pevných těles, tak u plynů to platí ještě výrazněji. Je to dáno velkou pohyblivostí částic plynu a jeho rozpínavostí. Částice plynu vykonávají mikroskopický pohyb velkou rychlostí v závislosti na teplotě T. Je-li z makroskopického pohledu plyn v klidu, jsou rychlosti částic statisticky rozděleny do všech směrů, takže výsledná rychlost plynu v uvažovaném objemu je nulová. Převládá-li pohyb částic v jednom směru, plyn se makroskopicky pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ – pak hovoříme o *proudění plynu*.

Rychlost $\boldsymbol{v}$ se obecně mění v závislosti na poloze a čase. Je-li $\boldsymbol{v}$ časově neproměnná, dostáváme důležitý zvláštní případ proudění, které se nazývá *ustálené* neboli *stacionární*. Mění-li se $\boldsymbol{v}$ s časem, jde o proudění *nestacionární*.

Pohybový stav plynu obecně popisujeme *rychlostním polem*, které matematicky udává vektor rychlosti jako funkci polohy a času. Geometricky se rychlostní pole znázorňuje pomocí proudnic. *Proudnice je myšlená orientovaná čára, jejíž tečna v libovolném bodě, avšak v určitém okamžiku má směr rychlosti* $\boldsymbol{v}$ *částice plynu* (obr. 18a). *Hustota proudnic* (tj. jejich počet procházející jednotkovou plochou postavenou kolmo k čarám) se volí tak, aby byla *úměrná velikosti rychlosti* $\boldsymbol{v}$ v uvažovaném místě. Proudnice tak podávají obraz o rozložení rychlostí proudícího plynu v určitém čase.



Obr. 18 a) Proudnice. b) Proudová trubice

Proudnice si lze představit jako trajektorie, po nichž se pohybují malá tělíska unášená plynem (typickým příkladem je stoupající proud ohřátého vzduchu u zapálené cigarety unášející částečky spalin – kouř). Proudnice se zviditelňují kouřem, např. při zkoumání proudění vzduchu kolem automobilu v aerodynamickém tunelu.

Určitým bodem prostoru může z důvodu jednoznačnosti pohybu procházet jen jedna proudnice. Zvolíme-li v proudícím plynu uzavřenou rovinnou křivku C

(obr. 18b), která protíná jednotlivé proudnice jen jedenkrát, vymezí se útvar, který se nazývá *proudová trubice*.

Rychlost objemového elementu plynu je obecně funkcí polohy $\boldsymbol{r}$ v prostoru a času: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. I u nestacionárního proudění, kdy $\boldsymbol{v}$ nezávisí na t, může být pohyb elementu složitý v důsledku závislosti $\boldsymbol{v}$ na $\boldsymbol{r}$. Koná-li tento element translační (posuvný) pohyb, hovoříme o proudění *nevířivém*. Přitom se může pohybovat i po kruhové trajektorii (jako např. kabinka v ruském kole). Otáčí-li se element plynu okolo nějaké osy, je proudění *vířivé*.[1])

Proudění *skutečných plynů* je v důsledku existence vnitřního tření ještě daleko složitější (viz např. studijní texty [12] a [13]). Při malých rychlostech vzniká proudění *laminární*, u něhož jsou proudnice stálé nebo mění jen pozvolna směr. Od určité kritické rychlosti však vznikají víry a proudění přechází na složitější proudění *turbulentní*. V tomto textu se omezíme jen na jednoduchý případ proudění ideálních plynů, o kterém budeme předpokládat, že je *stacionární* a *nevířivé*. Pak bude rychlost ve všech bodech příčného průřezu proudové trubice stejná a časově neproměnná.

3.2 Rovnice kontinuity pro plyn

Předmětem našeho dalšího zkoumání bude nejjednodušší případ proudění plynu: *stacionární nevířivé proudění ideálního plynu*, tj. tekutiny dokonale tekuté, avšak stlačitelné ($\varrho \neq$ konst.).

Proudění tekutiny (v našem případě plynu) charakterizují vedle rychlosti další dvě veličiny. *Objemový tok* Q_V (někdy označovaný jako *objemový průtok*) je definován vztahem

$$Q_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,.$$

Jeho jednotkou je $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Je to objem plynu, který proteče určitou plochou o plošném obsahu S za jednotku času. Pro stacionární tok je

$$Q_V = Sv\,. \tag{26}$$

U proudění plynu je významnější veličinou *hmotnostní tok* Q_m (někdy označovaný jako *hmotnostní průtok*) definovaný vztahem

$$Q_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,.$$

[1]Matematicky lze tyto dva druhy proudění snadno rozlišit, avšak je nutno použít vektorovou analýzu. Je-li $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, je proudění nevířivé, je-li $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, je proudění vířivé. Nevířivé proudění se také označuje jako *potenciálové*, protože lze rychlost vyjádřit jako gradient jisté skalární funkce $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$, která se nazývá potenciál rychlosti. Pak $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$.

Jeho jednotkou je $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Je to hmotnost plynu, který proteče určitou plochou o plošném obsahu S za jednotku času. Pro stacionární tok je

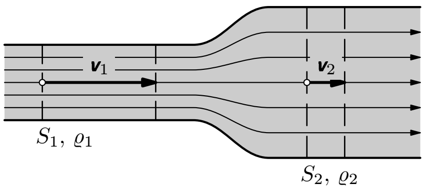
$$Q_V = \varrho S v\,. \tag{27}$$

Plyn se nemůže při stacionárním průtoku proudovou trubicí v žádném místě hromadit. Proto musí každým průřezem proudové trubice protéct za stejnou dobu plyn o stejné hmotnosti. Pro hmotnostní tok musí tedy platit

$$\boxed{Q_m = \varrho S v = konst.} \tag{28}$$

Toto je *rovnice kontinuity* neboli *rovnice spojitosti toku* ideální stlačitelné tekutiny (plynu). Budeme-li jako příklad uvažovat trubici z obr. 19, jejíž průřez se zvětší z plošného obsahu S_1 na S_2, bude plyn proudit tak, že

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\varrho_2 S_2}{\varrho_1 S_1}\,. \tag{29}$$



Obr. 19 K rovnici kontinuity pro plyny

Abychom mohli problém vztahu mezi rychlostmi podle (29) dořešit, musíme znát, jak se při průtoku bude měnit hustota plynu. Dochází-li při průtoku k velkým stavovým změnám, považuje se probíhající děj zpravidla za adiabatický, protože plyn se pohybuje velkou rychlostí (viz příklad 8). Při řešení řady technických problémů se považuje plyn za nestlačitelný, tudíž $\varrho_2 \approx \varrho_1$ (viz příklad 7). Považujeme-li hustotu plynu za konstantní, zachovává se v proudové trubici *objemový tok*: $Q_V = Sv = \mathrm{konst.}$

3.3 Bernoulliho rovnice

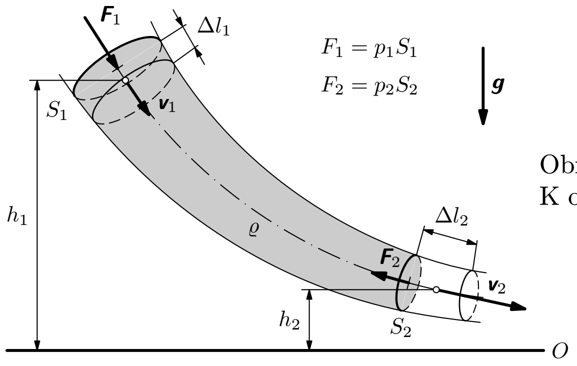
Podobně jako u proudění kapaliny, tak i u proudění plynu závisí tlak na rychlosti a poloze uvažovaného elementu proudové trubice. U plynu je však situace složitější v tom, že plyn je tekutina snadno stlačitelná a do kalkulace obecně vstupuje i jeho proměnná hustota ϱ.

Odvození Bernoulliho rovnice pro $\varrho \approx$ konst.

U řady úloh a řešení technických problémů (např. obtékání křídla letadla nebo lopatky turbíny, pohyb vzduchu vyvolaný rotující vrtulí letadla nebo rotorem dmychadla) lze považovat jeho hustotu za velmi málo proměnnou. Jde o situace, kdy v plynu nedochází k velkým tlakovým a teplotním změnám. Při řešení lze pak přijmout zjednodušený model plynu jako nestlačitelné tekutiny, u níž změna hustoty je zanedbatelná. To velmi usnadní řešení.

Odvození Bernoulliho rovnice pro nestlačitelnou tekutinu (kapalinu) jsme podrobně provedli v textu [14], proto je zde jen stručně připomeneme. Jeho základem je *zákon zachování mechanické energie* elementu nestlačitelného plynu při jeho průtoku proudovou trubicí (obr. 20). Uvažujme element, který se z polohy 1 přemístí do polohy 2, přičemž se nemění jeho hmotnost

$$\Delta m = \varrho_1 S_1 \Delta l_1 = \varrho_2 S_2 \Delta l_2 \,, \qquad \varrho_1 \approx \varrho_2 = \varrho = \text{konst.} \tag{30}$$



Obr. 20
K odvození Bernoulliho rovnice

Přírůstek ΔE_k kinetické energie elementu při změně jeho polohy z 1 do 2 je roven úbytku jeho potenciální energie tíhové a rozdílu prací tlakových sil na příslušných elementech drah. Tedy

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\Delta m(v_2^2 - v_1^2) = \Delta m g(h_1 - h_2) + p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 \,. \tag{31}$$

Dosadíme-li sem za Δm z (30), dostaneme

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\varrho} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\varrho} = \text{konst.},$$

neboli v obecnějším zápisu

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\varrho} = \text{konst.}} \quad \text{pro} \quad \varrho \approx \text{konst.}, \tag{32}$$

což je *Bernoulliho rovnice pro stacionární nevířivé proudění nestlačitelného plynu.*

Násobíme-li rovnici (32) hustotou ϱ, dostaneme Bernoulliho rovnici ve tvaru pro energii nestlačitelného plynu o jednotkovém objemu, jak jsme se s ní setkali v [14], výraz (18):

$$\boxed{\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h + p = \text{konst.}} \quad \text{pro} \quad \varrho \approx \text{konst.} \tag{33}$$

Zde první člen představuje *kinetickou energii* plynu o jednotkovém objemu, neboli *aerodynamický tlak*, druhý člen *potenciální energii tíhovou*, neboli tlak plynu popsaný výškou h od zvolené nulové hladiny. Třetí člen je *potenciální energie tlaková*, která má současně význam *tlaku v proudícím plynu*.

Pokud je proudová trubice *vodorovná*, tj. $h = \text{konst.}$, lze rovnice (32) resp. (33) použít ve zjednodušeném tvaru:

$$\boxed{\frac{1}{2}\varrho v^2 + p = \text{konst.}} \quad \text{pro} \quad \varrho \approx \text{konst.} \tag{34}$$

Odvození Bernoulliho rovnice pro $\varrho \neq$ konst.

Budeme-li uvažovat, že se při ustáleném proudění plynu mění jeho hustota, tedy bude-li se plyn při průtoku proudovou trubicí ještě stlačovat nebo rozpínat, bude řešení problému poněkud složitější. Do kalkulace energie popsané rovnicí (31) musíme ještě zahrnout změnu vnitřní energie ΔU plynu v důsledku změny teploty mezi průřezy 1, 2: $\Delta U = mc_V(T_2 - T_1)$. Stejně jako v případě nestlačitelné tekutiny uvažujeme, že mezi průřezy 1, 2 nedochází k tepelné výměně ($Q = 0$) a že tedy dochází k adiabatickým stavovým změnám. Pak

$$\Delta E_\mathrm{k} + \Delta U = \frac{1}{2}\Delta m(v_2^2 - v_1^2) + \Delta m c_V(T_2 - T_1) = \Delta m g(h_1 - h_2) + \Delta m\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right), \tag{35}$$

kde jsme rozdíl prací tlakových sil vyjádřili pomocí hmotnosti Δm elementu podle vztahu (30). Nyní však $\varrho_1 \neq \varrho_2$.

Rovnici (35) vydělíme hmotností Δm a užitím stavové rovnice ve tvaru (8) provedeme úpravu: $p/\varrho = RT/M_\mathrm{m}$. Pak

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \left(c_V + \frac{R}{M_\mathrm{m}}\right)T_1 = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \left(c_V + \frac{R}{M_\mathrm{m}}\right)T_2 = \text{konst.},$$

neboli v obecnějším zápisu

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + gh + c_p T = \text{konst.}} \quad \text{pro} \quad \varrho \neq \text{konst.}, \tag{36}$$

když jsme člen v závorce nahradili podle (18) měrnou tepelnou kapacitou za stálého tlaku. Dále užitím vztahu (20) můžeme psát

$$\left(c_V + \frac{R}{M_\mathrm{m}}\right) T = c_p T = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{RT}{M_\mathrm{m}} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\varrho}\,.$$

Bernoulliho rovnice má pak obecný tvar

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + gh + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\varrho} = \text{konst.}} \quad \text{pro} \quad \varrho \neq \text{konst.} \tag{37}$$

Aplikaci této rovnice ukážeme na řešení výtoku plynu z tlakové nádoby v příkladě 8.

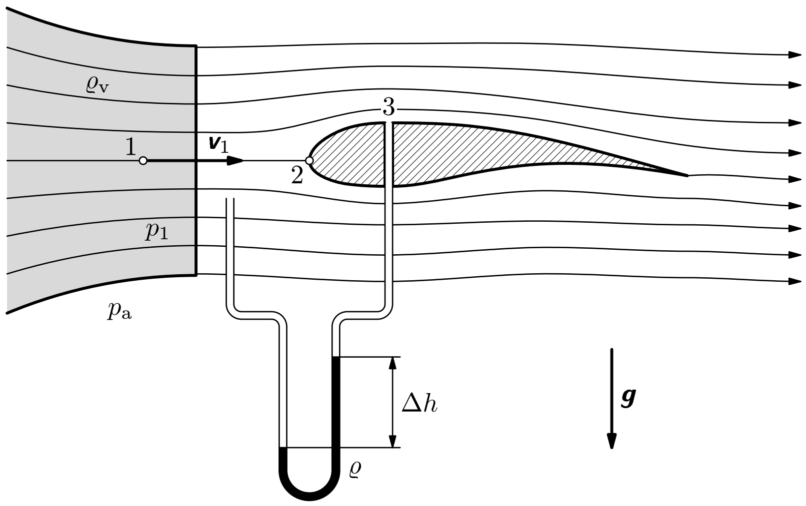
Přímým důsledkem Bernoulliho rovnice je to, že v místech, kde vzrůstá rychlost proudu plynu, klesá tlak – jde-li o proudění vzduchu atmosférického tlaku, vzniká podtlak. Toho se využívá např. ke konstrukci karburátoru, rozprašovače (viz úlohu 20), vývěv založených na proudění páry nebo vody. Největší význam mají tyto jevy pro konstrukci nosných ploch (křídel) letadel. Zde je proudnice na horní straně křídla delší, vzduch musí obtékat křídlo rychleji a tlak je zde menší než na spodní straně křídla (viz příklad 7). Účinky aerodynamického tlaku při prudkém větru ohrožují celistvost staveb (viz úlohu 19).

Příklad 7 – obtékání křídla

V aerodynamickém tunelu, v němž proudí vzduch o hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}29\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ rychlostí $v_1 = 40{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, je umístěno křídlo (obr. 21). Ve volném proudu má vzduch tlak $p_\mathrm{a} + p_1$, přičemž přetlak p_1 odpovídá výšce $h_1 = 95{,}0$ mm vodního sloupce ($\varrho = 1{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).

a) Vypočtěte přetlak p_2 vzduchu v bodě 2 náběžné části křídla, tj. v místě, kde končí proudnice, která dělí obtékání křídla na horní a dolní část,
b) Jaká bude rychlost v_3 proudu vzduchu v bodě 3 horního povrchu křídla, jestliže tlakový rozdíl $p_3 - p_1$ byl změřen U-trubicí a bylo zjištěno, že rozdíl hladin vodního sloupce činí $\Delta h = 210$ mm? Předpokládejte, že proudící vzduch se při ustáleném proudění chová jako nestlačitelná tekutina.

Poznámka:
Tento běžně uváděný předpoklad $\varrho_\mathrm{v} =$ konst. je reálný jen pro ustálené proudění, při němž se rozložení tlaků ani rozložení hustoty ϱ nemění s časem. To platí zpravidla tehdy, když plyn proudí rychlostmi mnohem menšími, než je rychlost zvuku.



Obr. 21 Obtékání křídla v aerodynamickém tunelu

Řešení

a) Napíšeme Bernoulliho rovnici pro body 1 a 2, přičemž v bodě 2 bude rychlost $v_2 = 0$. Tedy

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_{\rm a} + p_1}{\varrho_{\rm v}} = \frac{p_{\rm a} + p_2}{\varrho_{\rm v}}\,,$$

kde $p_1 = h_1 \varrho g$ je přetlak v bodě 1. Pak přetlak v bodě 2 je

$$p_2 = h_1 \varrho g + \frac{\varrho_{\rm v} v_1^2}{2} = 1\,970\ \text{Pa}\,.$$

Člen

$$p_2 - p_1 = \frac{\varrho_{\rm v} v_1^2}{2}$$

popisuje zvýšení tlaku, které vzniká zabrzděním tekutiny a nazývá se *aerodynamický tlak*.

b) Nyní napíšeme Bernoulliho rovnici pro body 1, 3 a dostaneme

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_{\rm a} + p_1}{\varrho_{\rm v}} = \frac{v_3^2}{2} + \frac{p_{\rm a} + p_3}{\varrho_{\rm v}}\,.$$

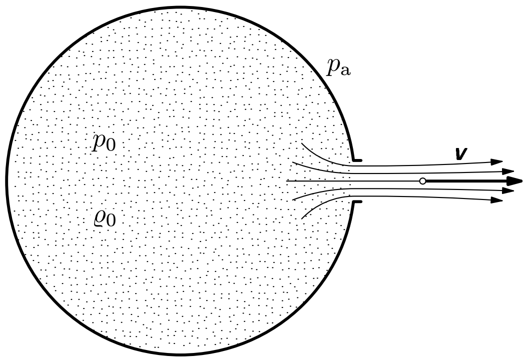
Odtud

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2}{\varrho_{\rm v}}(p_1 - p_3)} = \sqrt{v_1^2 + \frac{2\Delta h \varrho g}{\varrho_{\rm v}}} = 69\ \text{m} \cdot s^{-1}\,.$$

Příklad 8 – adiabatický výtok plynu

Řešení výtoku plynů z nádob patří k důležitým problémům technických aplikací. Jde např. o řešení výtoku spalin ze spalovací komory proudových a raketových motorů. Pro přiblížení tohoto problému řešme výtok plynu malým otvorem z tlakové nádoby (obr. 22). Předpokládáme, že se jedná o nádobu dostatečných rozměrů, abychom mohli zanedbat makroskopický pohyb plynu v podstatné části nádoby, a že přetlak $p_0 - p_\mathrm{a}$ v nádobě je velký – způsobí, že plyn bude z nádoby vytékat rychle. Uvažujeme proto, že při výtoku dochází k *adiabatické expanzi*.

Vypočtěte výtokovou rychlost a diskutujte zvláštní případ, kdy expanze bude probíhat do vakua.



Obr. 22 Adiabatický výtok plynu z tlakové nádoby

Řešení

Použijeme Bernoulliho rovnici ve tvaru (37), kterou napíšeme pro dva body vodorovné proudnice a to uvnitř nádoby (kde předpokládáme $v \approx 0$) a vně (kde předpokládáme $p \approx p_\mathrm{a}$). Pak

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,\frac{p_0}{\varrho_0} = \frac{v^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,\frac{p_\mathrm{a}}{\varrho_\mathrm{a}}\,.$$

Odtud dostaneme pro výtokovou rychlost výraz

$$v = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\,\frac{p_0}{\varrho_0}\left[1 - \left(\frac{p_\mathrm{a}}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}\,.$$

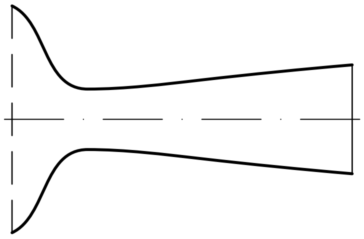
Bude-li expanze probíhat do vakua, tj. $p_\mathrm{a} \to 0$, nabude výtoková rychlost podle našeho výpočtu zřejmě maximální velikost

$$v_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\,\frac{p_0}{\varrho_0}} = c_0\sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1}}\,,$$

kde

$$c_0 = \sqrt{\varkappa \frac{p_0}{\varrho_0}}$$

je *rychlost zvuku* v plynu pro termodynamický stav uvnitř nádoby (viz např. [4], [5]). Budeme-li v nádobě dvouatomový plyn (např. vzduch), bude $\varkappa = 7/5$ a $v_{\max} \approx 2{,}24 c_0$. Proudění by tedy mělo probíhat nadzvukovou rychlostí. Provedený výpočet je však značně zjednodušený, protože neuvažuje složité aerodynamické poměry (rázové vlny) ve výtokovém otvoru při velkých rychlostech. Ukazuje se (viz např. [2], [5]), že výtoková rychlost při výtoku jednoduchým otvorem anebo zužující se dýzou nemůže překročit rychlost zvuku. To se potvrzuje i experimentálně.



Obr. 23 Lavalova tryska

Připojíme-li však k výtokovému otvoru *Lavalovu trysku* (viz např. [5]), u níž se výtokový průřez nejprve zužuje a pak zvolna kuželovitě rozšiřuje (obr. 23), může výtoková rychlost překročit rychlost zvuku i několikanásobně. Lavalova tryska je důležitou součástí tepelných turbín (parních i spalovacích) a raketových motorů. Například motory kosmických raket běžně pracují s výtokovou rychlostí $3\,000\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 9 c_0$.

3.4 Úlohy ke kapitole 3

19. Okna při nárazu větru

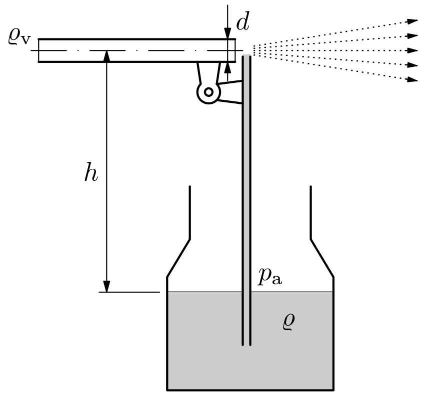
Kolem horních pater budovy se přehnal vítr rychlostí $v = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Vypočtěte sílu, která působila na okno o rozměrech 3,5 m × 2,5 m postavené kolmo ke směru větru. Hustota vzduchu je $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

20. Kolik vzduchu foukáme do rozprašovače?

Student má v hodině výtvarné výchovy použít rozprašovač (fixírku) podle obr. 22, u něhož je známo: vnitřní průměr foukací trubičky na výstupu $d =$ $= 3{,}5$ mm, výška $h = 80$ mm, hustota rozprašované kapaliny $\varrho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a hustota vzduchu $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

a) Jakou minimální rychlost musí mít vzduch na výstupu z foukací trubičky, aby rozprašovač začal pracovat?

b) Jaký minimální objemový tok Q_V musí vyvinout plíce studenta k dosažení rozprašovacího efektu?



Obr. 22 Rozprašovač

4 Náročnější příklady z aeromechaniky

Příklad 9 – stoupající balon

Úloha z 35. MFO v Koreji v r. 2004

Pryžový balon naplněný heliem stoupá vysoko k obloze, kde tlak i teplota vzduchu klesají v závislosti na výšce. Při řešení následujících problémů předpokládejte, že tvar balonu zůstává kulový nezávisle na zatížení a že objem zátěže je zanedbatelný. Dále předpokládejte, že teplota helia uvnitř balonu je vždy stejná jako teplota okolního vzduchu a že všechny plyny se chovají jako ideální. Molární plynová konstanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$, molární hmotnost helia $M_{\mathrm{He}} = 4{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, molární hmotnost vzduchu $M_{\mathrm{A}} = 28{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, tíhové zrychlení $g = 9{,}80\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Část A

a) Nechť tlak okolního vzduchu je p a teplota T. Tlak uvnitř balonu je větší než tlak okolního vzduchu díky povrchového pnutí v obalu balonu: $p + \Delta p$. Balon obsahuje n molů helia. Určete velikost F_{B} vztlakové síly působící na balon jako funkci p a Δp.

b) Jednoho letního dne v Koreji byla teplota vzduchu T v nadmořské výšce z určena v rozmezí $0 < z < 15$ km vztahem

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) ,$$

přičemž $z_0 = 49$ km a $T_0 = 303$ K. Tlak a hustota vzduchu na úrovni hladiny moře byly $p_0 = 1\ \mathrm{at} = 1{,}01 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$ a $\varrho_0 = 1{,}16\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Pro uvedené rozmezí výšek se závislost tlaku na výšce dá vyjádřit vztahem

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\gamma} . \tag{38}$$

Vyjádřete γ pomocí veličin z_0, ϱ_0, p_0, g a určete její číselnou hodnotu na *dvě platné číslice*. Tíhové zrychlení považujte za stálé, nezávislé na výšce.

Část B

Když gumový balon kulového tvaru, který má v nenapjatém stavu poloměr r_0, nafoukneme na kouli o poloměru $r > r_0$, má obal balonu navíc energii pružnosti neboli elastickou energii, v důsledku svého roztažení. Užitím zjednodušené teorie pružnosti lze tuto elastickou energii při konstantní teplotě T vyjádřit výrazem

$$U = 4\pi r_0^2 \varkappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3\right) , \tag{39}$$

kde $\lambda = r/r_0 > 1$ je poměrné roztažení a $\varkappa$ [2]) je konstanta v jednotkách $\mathrm{mol \cdot m^{-2}}$.

c) Vyjádřete Δp pomocí parametrů (veličin) ve výrazu (39) a načrtněte graf Δp jako funkci $\lambda = r/r_0$.

d) Konstanta $\varkappa$ může být určena pomocí množství plynu potřebného k nafouknutí balonu. Při $T_0 = 303$ K a $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa obsahuje nenafouknutý balon ($\lambda = 1$) celkem $n = 12{,}5$ molů helia. K naplnění balonu na hodnotu $\lambda = 1{,}5$ je při těchže T_0 a p_0 zapotřebí $n = 3{,}6 n_0 = 45$ molů helia. Vyjádřete parametr a definovaný výrazem $a = \varkappa/\varkappa_0$ pomocí veličin n, n_0, λ, přičemž je dáno

$$\varkappa_0 = \frac{r_0 p_0}{4RT_0}\,.$$

Vypočítejte a na tři platné číslice.

Část C

Balon je připraven jako v úloze d) na úrovni moře (tj. nafouknutý na $\lambda = 1{,}5$, obsahuje $n = 3{,}6 n_0 = 45$ molů helia teploty $T_0 = 303$ K a tlaku $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa). Celková hmotnost, zahrnující plyn, obal a zátěž je $M_\mathrm{T} = 1{,}12$ kg. Nyní nechť balon stoupá z nulové nadmořské výšky.

e) Předpokládejte,že se balon nakonec zastaví v takové výšce z_f, kde vztlaková síla je rovna celkové tíhové síle. Určete tuto výšku a poměrné roztažení λ_f v této výšce. Výsledek určete na dvě platné číslice. Předpokládejte, že nefouká vítr, a dále, že žádný plyn z balonu během letu neunikne.

Řešení

a) Objem n molů helia o tlaku $p + \Delta p$ a teplotě T je podle stavové rovnice ideálního plynu

$$V = \frac{nRT}{p + \Delta p}\,, \tag{40}$$

zatímco objem n' molů vzduchu o tlaku p a teplotě T je

$$V = \frac{n'RT}{p}\,. \tag{41}$$

Balon tedy vytlačí $n' = np/(p + \Delta p)$ molů vzduchu, jehož celková tíha je $M_\mathrm{A} n' g$. Tíhová síla vytlačeného vzduchu je rovna vztlakové síle, tj.

$$F_\mathrm{B} = M_\mathrm{A} n g \frac{p}{p + \Delta p}\,. \tag{42}$$

[2]Nezaměňovat s Poissonovou konstantou!

b) Víme, že atmosférický tlak se s výškou z mění podle vztahu $\Delta p = -\varrho g z$, kde hustota ϱ vzduchu je v rozmezí Δz konstantní. Pokud uvažujeme, že hustota ϱ vzduchu je funkcí výšky z, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\varrho g = \frac{\varrho_0 T_0}{p_0} \frac{p}{T} g\,, \tag{43}$$

kde pro ideální plyn je $\varrho T/p =$ konst. Dosadíme-li do vztahu (43) z (38) a uvážíme-li, že teplota se mění podle vztahu $T/T_0 = 1 - z/z_0$, dostaneme

$$-\gamma \frac{p_0}{z_0}\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\gamma-1} = -\varrho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\gamma} g\,.$$

Odtud

$$\gamma = \frac{\varrho_0 z_0 g}{p_0} = 5{,}52 \doteq 5{,}5\,. \tag{44}$$

c) Práce potřebná ke zvětšení poloměru balonu z r na $r + \Delta r$ působením tlakového rozdílu Δp je

$$\mathrm{d}W = 4\pi r^2 \Delta p \mathrm{d}r\,.$$

Tato práce je rovna zvětšení elastické energie pro stejnou změnu $\mathrm{d}r$. Užitím vztahu (39) dostaneme

$$\mathrm{d}W = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right) \mathrm{d}r = 4\pi\varkappa RT \left(4r - 4\frac{r_0^6}{r^5}\right) \mathrm{d}r\,.$$

Porovnáme-li pravé strany výrazů pro $\mathrm{d}W$, dostaneme požadovaný vztah

$$\mathrm{d}p = 4\pi\varkappa RT \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^6}{r^7}\right) = \frac{4\pi\varkappa RT}{r_0}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right) = P\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right), \tag{45}$$

kde $P = 4\pi\varkappa RT/r_0$ má rozměr tlaku. Graf závislosti poměrné změny tlaku $\Delta p/P$ na poměrné změně λ poloměru balonu je na obr. 23. Je zřejmé, že funkce zpočátku prudce roste, nabývá maxima pro $\lambda = 7^{1/6} = 1{,}38$ a pro velké λ klesá jako λ^{-1}.

d) Pro ideální plyn platí

$$p_0 V_0 = n_0 R T_0\,,$$

kde V_0 je objem nenafouknutého balonu. Pro objem $V = \lambda^3 V_0$ obsahující n molů ideálního plynu o tlaku p_{in} a teplotě $T = T_0$ bude analogicky platit $p_{\mathrm{in}} = nRT_0$. Odtud

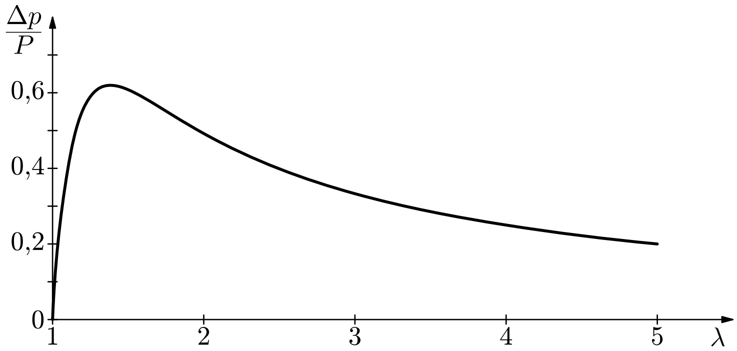
$$p_{\mathrm{in}} = \frac{nRT_0}{V} = \frac{n}{n_0 \lambda^3} p_0\,. \tag{46}$$

Aplikací výsledku (45) pro $T = T_0$ dostaneme

$$p_{\mathrm{in}} = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{4\pi\varkappa RT_0}{r_0}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right) = \left[1 + a\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right)\right] p_0\,. \quad (47)$$

Porovnáním výrazů (46), (47) dostaneme

$$a = \frac{\varkappa}{\varkappa_0} = \frac{\dfrac{n}{n_0\lambda^3} - 1}{\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda^7}} = 0{,}110\,. \quad (48)$$



Obr. 23 Závislost poměrné změny tlaku v balonu na poměrné změně jeho poloměru

e) Využijeme výsledku (42), v němž nyní bude $F_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{T}}g$. Pak

$$\frac{p}{p + \Delta p} = \frac{M_{\mathrm{T}}}{M_{\mathrm{A}}n}\,. \quad (49)$$

Na druhé straně pro objem $V = \lambda^3 V_0$ obsahující n molů helia jako ideálního plynu při teplotě T a tlaku $p + \Delta p$ platí

$$(p + \Delta p)\lambda^3 = \frac{nRT}{V_0} = p_0\frac{T}{T_0}\,\frac{n}{n_0}\,. \quad (50)$$

Dosadíme-li z (50) do (49) za $p + \Delta p$, dostane podmínka rovnováhy sil tvar

$$\frac{pT_0}{p_0T}\lambda^3 = \frac{M_{\mathrm{T}}}{M_{\mathrm{A}}n_0}\,. \quad (51)$$

Dosadíme-li vztah (45) pro Δp do (50), dostaneme vztah

$$p\lambda^3 + \frac{4\pi RT}{r_0}\lambda^2\left(1-\frac{1}{\lambda^6}\right) = p_0\frac{T}{T_0}\,\frac{n}{n_0}\,,$$

který upravíme tak, aby jeho levá strana měla stejný tvar jako podmínka (51):

$$\frac{pT_0}{p_0T}\lambda^3 = \frac{n}{n_0} - a\lambda^2\left(1-\frac{1}{\lambda^6}\right)\,, \tag{52}$$

kde podle definice je

$$a = \frac{\varkappa}{\varkappa_0} = \frac{4\pi RT_0\varkappa}{r_0p_0}\,.$$

Srovnáním vztahů (51) a (52) dostaneme rovnici pro λ:

$$\lambda^2\left(1-\frac{1}{\lambda^6}\right) = \frac{1}{an_0}\left(n-\frac{M_\mathrm{T}}{M_\mathrm{A}}\right)\,, \tag{53}$$

jejíž přibližné řešení provedeme. Pravou stranu (53) můžeme přibližně vyčíslit, dosadíme-li zadané hodnoty a pro a použijeme výsledek (48), tj.

$$\frac{1}{an_0}\left(n-\frac{M_\mathrm{T}}{M_\mathrm{A}}\right) = 4{,}54\,. \tag{54}$$

V rovnici (53) pak můžeme položit $\lambda^2 \approx 4{,}54$, protože

$$\lambda^2 \approx \frac{4{,}54}{1-4{,}54^{-3}} = 4{,}59 \approx 4{,}54\,. \tag{55}$$

Pak $\lambda_\mathrm{f} \approx \sqrt{4{,}54} = 2{,}13$ (kdežto $\sqrt{4{,}59} = 2{,}14$ je jen málo odlišné).
Abychom určili výšku z_f, do níž balon vystoupí, upravíme levou stranu podmínky (51) užitím vztahů mezi teplotami T, T_0 a tlaky p, p_0 podle bodu b) zadání:

$$\frac{p}{p_0}\,\frac{T_0}{T} = \left(1-\frac{z_\mathrm{f}}{z_0}\right)^{\gamma}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z_\mathrm{f}}{z_0}} = \left(1-\frac{z_\mathrm{f}}{z_0}\right)^{\gamma-1}\,.$$

Pak z podmínky plyne

$$1-\frac{z_\mathrm{f}}{z_0} = \left(\frac{M_\mathrm{T}}{\lambda_\mathrm{f}^3M_\mathrm{A}n_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\,.$$

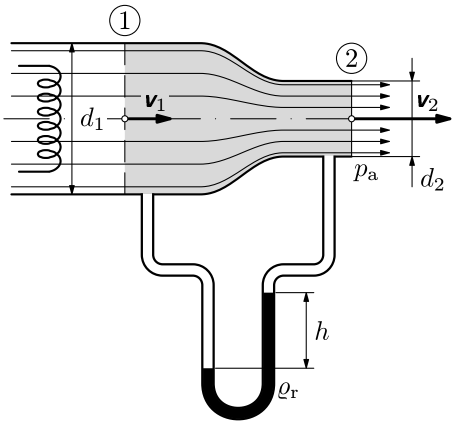
Dosadíme-li zadané hodnoty, podle (44) za $\gamma = 5{,}5$ a podle (55) za $\lambda_\mathrm{f} \approx 2{,}1$, dostaneme pro výšku výstupu balonu výsledek

$$z_\mathrm{f} = z_0\left[1-\left(\frac{M_\mathrm{T}}{\lambda_\mathrm{f}^3M_\mathrm{A}n_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] = 10{,}9\ \mathrm{km} \approx 11\ \mathrm{km}\,.$$

Poznámka autora studijního textu:
Předložené řešení vychází z autorského řešení akademické komise 35. MFO. Je zřejmé, že řešení úkolu e) je z rigorózního matematického hlediska dosti problematické. Je příkladem postupu, jaký někdy užívá numerická matematika pro zkrácení přibližného řešení. Z tohoto hlediska byla tato úloha pro řešitele 35. MFO velmi obtížná. Správné řešení úkolu e) bylo oceněno 3 body z 10 možných za celou úlohu.

Příklad 10 – proudění vzduchu difuzorem

Horký vzduch o teplotě $t_1 = 120\,^\circ\mathrm{C}$ vstupuje do difuzoru opalovače neznámou rychlostí v_1. Vstupní otvor má průměr $d_1 = 30$ mm, výstupní otvor průměr $d_2 = 15$ mm (obr. 24). Aby byly určeny parametry opalovače, byl připojen ke vstupnímu a výstupnímu otvoru rtuťový tlakoměr, na kterém byla naměřena výška $h = 25{,}0$ mm. Dále je znám atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 98$, kPa, hustota vzduchu za normálních podmínek $\varrho_\mathrm{n} = 1{,}29\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ ($T_\mathrm{n} = 273$ K, $p_\mathrm{n} = 1{,}01\cdot 10^5$ Pa), hustota rtuti $\varrho_\mathrm{r} = 13{,}6\cdot 10^3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, měrná tepelná kapacita vzduchu $c_p = 1\,004\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ a Poissonova konstanta $\varkappa = 7/5$. Určete:
a) teplotu t_2 na výstupu difuzoru,
b) velikost rychlostí $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,
c) hmotnostní tok vzduchu Q_m.



Obr. 24 Difuzor opalovače

Řešení

Předpokládáme, že vodorovný proud vzduchu je ustálený a že během jeho proudění mezi průřezy 1, 2 nedochází k výměně tepla ($Q = 0$). Pak stavové změny probíhají adiabaticky, je splněna stavová rovnice v obecném tvaru (36) a rovnice kontinuity ve tvaru (28). Tedy

$$p_1(S_1v_1)^{\varkappa} = p_2(S_2v_2)^{\varkappa}\,, \quad \text{kde} \quad p_2 = p_\mathrm{a}\,, \tag{56}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + c_pT_1 = \frac{v_2^2}{2} + c_pT_2\,, \tag{57}$$

$$\varrho_1S_1v_1 = \varrho_2S_2v_2\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{p_1S_1v_1}{T_1} = \frac{p_2S_2v_2}{T_2} \tag{58}$$

$$p_1 = p_2 + h\varrho_\mathrm{r}g = p_\mathrm{a} + h\varrho_\mathrm{r}g\,. \tag{59}$$

Pro zjednodušení si vyjádříme podíly některých veličin:

$$a = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_\mathrm{a}}{p_\mathrm{a} + h\varrho_\mathrm{r}g} = 0{,}976\,, \quad b = \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\,, \quad \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{2}{7}\,.$$

a) Vyjádříme-li z rovnice (58) $S_1v_1 = S_2v_2\dfrac{p_2T_1}{p_1T_2}$ a dosadíme do (56), dostaneme

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\varkappa-1} \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\varkappa} = 1 \quad \text{neboli} \quad T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = T_1a^{\frac{2}{7}} = 389{,}3\ \mathrm{K}\,.$$

Výstupní teplota tedy bude $t_2 = 116\ {}^\circ\mathrm{C}$.

b) Z rovnic (57) a (58) s využitím vypočteného vztahu mezi teplotami plyne

$$\frac{v_2^2}{2c_p}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right] = T_1 - T_2\,.$$

Odtud

$$v_2 = \sqrt{\frac{2c_pT_1\left(1 - a^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}{1 - a^2b^2}} = 89{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

$$v_1 = v_2\frac{T_1S_2p_2}{T_2S_1p_1} = 22{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

c) Hmotnostní tok je

$$Q_m = v_1S_1\varrho_1 = v_1\frac{\pi d_1^2}{4}\varrho_\mathrm{n}\frac{T_\mathrm{n}p_1}{T_1p_\mathrm{n}} = 0{,}0140\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}\,.$$

4.1 Úlohy ke kapitole 4

21. Zjednodušený problém difuzoru

Vypočtěte velikost rychlostí $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ a hmotnostní tok Q_m difuzoru z příkladu 10 za zjednodušujícího předpokladu, že hustota vzduchu při průchodu difuzorem bude stále stejná jako na vstupu do difuzoru. Porovnáním s výsledky příkladu 10 vyhodnoťte chyby přibližného řešení.

22. Komín s přirozeným tahem

U velkých komínů s vynuceným tahem nebo např. u opalovače řešeného v příkladě 10 zajišťuje pohyb plynu (vzduchu) ventilátor. U klasického komína s přirozeným tahem je přetlak u paty komína způsoben rozdílem teplot kouřových plynů a okolního vzduchu a výškou komína.

Uvažujme zděný (dobře izolovaný) komín kotelny o výšce $h = 50$ m, v němž bylo měřením zjištěno, že kouřové plyny mají průměrnou teplotu $t_\mathrm{k} = 380\ °\mathrm{C}$ a objemový tok $Q_V = 14\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$ (vyplývá z výkonu kotle). Teplota okolního vzduchu je $t_0 = 10\ °\mathrm{C}$ a atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 98$ kPa. Kouřové plyny mají za normálních podmínek prakticky stejnou hustotu jako vzduch $\varrho_\mathrm{n} = 1{,}3\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

a) Vypočtěte statický tah komína Δp_s, tj. rozdíl aerostatických tlaků sloupce okolního vzduchu výšky h a stejně vysokého sloupce kouřových plynů v komíně.

b) Skutečný tah komína je $\Delta p = k\Delta p_\mathrm{s}$, kde k zahrnuje odpory při proudění kotlem a kouřovody (lze je regulovat hradítkem u ohniště a tím i průtok vzduchu – kouřových plynů a rychlost hoření). Uvažujte, že při průtoku komínem je hustota kouřových plynů $\varrho_\mathrm{k} \approx$ konst. Vypočtěte velikosti jejich rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ u paty komína a $\boldsymbol{v}_2$ u jeho ústí, je-li $k = 0{,}85$. Podíl vnitřních průměrů komína u paty (d_1) a ústí (d_2) je 4 : 3.

c) Vypočtěte průměry d_1 a d_2 komína a hmotnostní průtok Q_m kouřových plynů pro daný objemový tok Q_V.

5 Řešení úloh

1. $F = \pi r^2 (p_a - p_i) = 25$ kN.

2. Aby se potápěč nadechl v hloubce h hadicí, musí roztažením hrudního koše snížit tlak vzduchu v ústech a plicích oproti atmosférickému tlaku o více než $\Delta p = h\varrho g$. Jinak se udusí. Maximální bezpečná hloubka pro dýchání tedy je

$$h_{max} = \frac{\Delta p_{max}}{\varrho g} = 1{,}0 \text{ m}\,.$$

3. Vzduch v zaslepené části trubice má

objem $V = lS$ a tlak $p = p_a + \varrho g h_0 \cos\alpha$.

Vyhodnocení experimentu je v tabulce. Je zřejmé, že v mezích pozorovacích je $pV =$ konst, což je Boylův-Mariottův zákon.

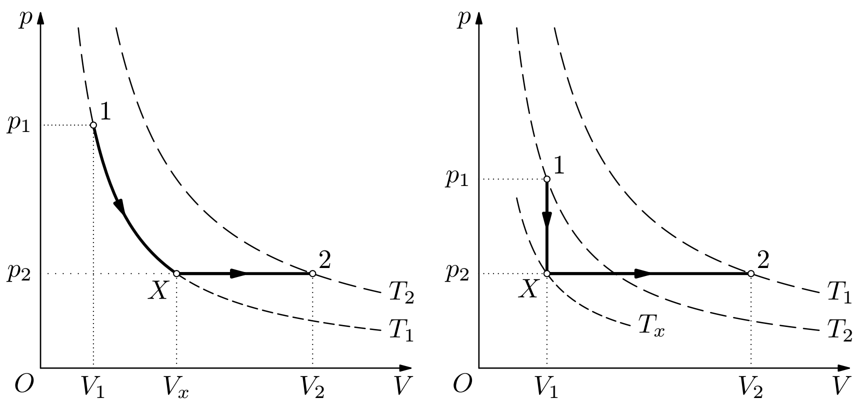
α	0°	29,0°	52,5°	90,5°	119°	152°
$V/10^{-8}\,\text{m}^3$	6,10	6,40	7,20	10,3	15,1	25,5
$p/10^5$ Pa	1,66	1,57	1,40	0,983	0,666	0,400
$pV/10^{-3}$ J	10,1	10,0	10,0	10,1	10,0	10,2

4. Objem V se zmenší na $V' = \dfrac{\pi d^2 l}{4}$ a tlak se zvětší na $p' = \dfrac{pV}{V'}$. Oba tlaky se liší o tlak sloupce rtuti o délce h, tedy $p' - p = h\varrho g$. Pak

$$p = \frac{V'}{V - V'} h\varrho g = \frac{\pi d^2 l h \varrho g}{4V - \pi d^2 l} = 8{,}07 \text{ Pa}\,.$$

Měřicí rozsah lze ovlivňovat poměrem objemů V/V', resp. objemem V a průměrem d a délkou l zatavené trubičky.

5.



a) $p_1 V_1 = p_2 V_x\,,\quad \dfrac{V_x}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$ b) $\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_x}\,,\quad \dfrac{V_1}{T_x} = \dfrac{V_2}{T_2}$

Vynásobením příslušných dvojic vztahů dostaneme stavovou rovnici (4).

6. Označme N_1, N_2 počty molekul v recipientu při tlacích p_1, p_2. Ze stavové rovnice plyne

$$p_1 V = \frac{N_1}{N_\mathrm{A}} RT\,, \qquad p_2 V = \frac{N_1 + N_2}{N_\mathrm{A}} RT\,, \qquad (p_2 - p_1)V = \frac{N_2}{N_\mathrm{A}} RT\,.$$

Odtud

$$N_2 = \frac{(p_2 - p_1) V N_\mathrm{A}}{RT} = 3{,}1 \cdot 10^{18} \text{ molekul.}$$

7. Vnitřní energie kyslíku a dusíku před smíšením jsou

$$U_1 = n_1 C_V T_1 = C_V \frac{p_1 V_1}{R}\,, \quad U_2 = n_2 C_V T_2 = C_V \frac{p_2 V_2}{R}\,.$$

Po smíšení se vyrovná teplota na T a vnitřní energie bude

$$U = U_1 + U_2 = (n_1 + n_2) C_V T\,, \quad \text{neboli} \quad n_1 T_1 + n_2 T_2 = (n_1 + n_2) T\,.$$

Pak

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 = \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} \right) T\,,$$

$$T = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1} T_1 T_2 = 295 \text{ K}\,.$$

Podle Daltonova zákona je výsledný tlak roven součtu parciálních tlaků p_1', p_2' při celkovém objemu $V_1 + V_2$. Pro tyto tlaky ze stavové rovnice vychází

$$p_1' = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T}{V_1 + V_2}\,, \qquad p_2' = \frac{p_2 V_2}{T_2} \frac{T}{V_1 + V_2}\,,$$

takže celkový tlak je

$$p = p_1' + p_2' = \frac{T}{V_1 + V_2} \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} \right) = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 5{,}88 \cdot 10^4 \text{ Pa}\,.$$

8. a) Pro parciální tlaky p_1, p_2 a celkový tlak p ze stavové rovnice a Daltonova zákona vychází

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_\mathrm{m1}} RT\,, \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_\mathrm{m2}} RT\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{M_\mathrm{m2}}{M_\mathrm{m1}}\,,$$
$$p_1 + p_2 = p\,.$$

Pak

$$p_1 = \frac{p}{\dfrac{m_2}{m_1} \dfrac{M_\mathrm{m1}}{M_\mathrm{m2}} + 1} = 6{,}96 \cdot 10^4 \text{ Pa}\,, \qquad p_2 = p - p_1 = 3{,}04 \cdot 10^4 \text{ Pa}\,.$$

b) Ze stavové rovnice

$$V = \frac{(n_1 + n_2) RT}{p} = \left(\frac{m_1}{M_\mathrm{m1}} + \frac{m_2}{M_\mathrm{m2}} \right) \frac{RT}{p}\,,$$

$$\varrho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{(m_1 + m_2)p}{\left(\dfrac{m_1}{M_{\mathrm{m}1}} + \dfrac{m_2}{M_{\mathrm{m}2}}\right) RT} = 1{,}20\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}\,.$$

9. Suchý vzduch bude mít po zahřátí na 30 °C tlak

$$p_1 = p_0 \frac{T}{T_0} = 1{,}121 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

Voda se odpaří a hustota par bude $\varrho = m/V = 2{,}00 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. Protože podle Boylova zákona je za konstantní teploty tlak plynu úměrný hustotě plynu, můžeme při aplikaci na tlak p páry dostatečně přesně psát $p/p_\mathrm{s} = \varrho/\varrho_\mathrm{s}$. Parciální tlak přehřáté páry je tedy

$$p = \frac{\varrho}{\varrho_\mathrm{s}} p_\mathrm{s} = 2\,800\ \mathrm{Pa}\,.$$

Celkový tlak podle Daltonova zákona je

$$p_\mathrm{c} = p_1 + p = 1{,}149 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

10. Při posunutí pístu o x se původně stejné objemy V_0 změní na

$$V_1 = S(l_0 + x)\,, \qquad V_2 = S(l_0 - x)$$

a tlak p_0 na p_1 a $p_2 > p_1$. Protože probíhající změna je adiabatická, musí platit

$$p_0 l_0^{\varkappa} = p_1 (l_0 + x)^{\varkappa}\,, \qquad p_0 l_0^{\varkappa} = p_2 (l_0 - x)^{\varkappa}\,.$$

V rovnovážné poloze je výsledná síla působící na píst nulová, při vychýlení o x působí na píst síla o velikosti

$$\begin{aligned} F = (p_2 - p_1)S &= S p_0 l_0^{\varkappa} \left[\frac{1}{(l_0 - x)^{\varkappa}} - \frac{1}{(l_0 + x)^{\varkappa}}\right] = \\ &= S p_0 \left[\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^{-\varkappa} - \left(1 + \frac{x}{l_0}\right)^{-\varkappa}\right] \approx \frac{2 S p_0 \varkappa}{l_0} x\,, \end{aligned}$$

když uvažujeme malé výchylky x $(x \ll l_0)$. Síla $\boldsymbol{F}$ má zřejmě opačný směr než výchylka x, vrací tedy píst do rovnovážné polohy. Pohybová rovnice pístu je

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2 S p_0 \varkappa}{l_0} x\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2 S p_0 \varkappa}{m l_0} x = 0\,.$$

Jde o pohybovou rovnici kmitavého pohybu, pro jehož úhlovou frekvenci platí

$$\omega^2 = \frac{2 S p_0 \varkappa}{m l_0}\,.$$

Frekvence kmitání pístu je tedy $\quad f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2Sp_0\varkappa}{ml_0}} = 30{,}8\ \mathrm{Hz}\,.$

Poznámka
Čtenář, kterému ještě není blízká diferenciální pohybová rovnice, může problém řešit z analogie s pružinovým oscilátorem. Jak jsme odvodili, působí na píst při jeho vychýlení o x síla o souřadnici

$$F = -\frac{2Sp_0\varkappa}{l_0}x = -kx\,,$$

kde k je ekvivalentní tuhost soustavy. Pak

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2Sp_0\varkappa}{ml_0}}\,.$$

11. Tíhové zrychlení v oblasti atmosféry můžeme považovat přibližně za konstantní. Tíhovou sílu atmosféry působící na zemský povrch vydělíme tíhovým zrychlením:

$$m_{\mathrm{vz}} = \frac{4\pi R^2 p_{\mathrm{n}}}{g} = 5{,}25\cdot 10^{18}\ \mathrm{kg} \qquad \frac{m_{\mathrm{vz}}}{m_{\mathrm{z}}} = 8{,}81\cdot 10^{-7}\,.$$

Značná hmotnost vzduchu tedy činí necelou 1 miliontinu hmotnosti Země.

12. $h = \dfrac{RT_0}{M_{\mathrm{m}}g}\ln\dfrac{p_0}{p_h} = 2\,380\ \mathrm{m}.$

13. $H = h_0 + \dfrac{p_{\mathrm{n}}}{\varrho_{\mathrm{n}}g}\ln 2 = 8\,000\ \mathrm{m}.$
Atmosférický tlak v této výšce by tedy byl $p_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{a}0}/2 = 37{,}1\ \mathrm{kPa}.$

MFCh tabulky uvádějí pro výšku 8 000 m tlak jen 35,1 kPa. Je to způsobeno tím, že teplota vzduchu v této výšce není 0 °C, jak předpokládalo řešení, nýbrž v průměru −37 °C.

14. Přesné řešení:

$$m = \int_0^h \pi r^2 \varrho\,\mathrm{d}y = \pi r^2\frac{p_{\mathrm{a}0}M_{\mathrm{m}}}{RT}\int_0^h \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}g}{RT}y}\mathrm{d}y = \frac{\pi r^2 p_{\mathrm{a}0}}{g}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}gh}{RT}}\right) =$$
$$= 4\,294\ \mathrm{kg} \doteq 4{,}3\ \mathrm{t}\,.$$

Přibližné řešení: $\quad m' = \pi r^2 h\dfrac{M_{\mathrm{m}}p_{\mathrm{a}0}}{RT} = 4\,346\ \mathrm{kg},$

$$\delta = \frac{m'-m}{m}\cdot 100\ \% = 1{,}2\ \%.$$

15. a) $F = [V(\varrho_{\mathrm{v}}-\varrho_{\mathrm{p}}) - m_{\mathrm{l}}]g = 2{,}5\cdot 10^6\ \mathrm{N}$, síla směřuje vzhůru.
b) $V' = \dfrac{F-F'}{\varrho g} = 225\ \mathrm{m}^3.$

c) $d = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} = 63$ m, $\quad l = 4d = 250$ m, $\quad m_\mathrm{c} = V\varrho_\mathrm{p} + m_\mathrm{l} + V'\varrho = 930$ t.

16. $\Delta m_\mathrm{u} = (\varrho_\mathrm{He} - \varrho_\mathrm{H})V = 329$ kg. Vodík je výbušný plyn, helium je nehořlavé, avšak drahé.

17. Přepočet hustot na skutečné podmínky:

$$\varrho'_\mathrm{He} = \varrho_\mathrm{He}\frac{T_\mathrm{n}p'}{T'p_\mathrm{n}} = 0{,}180\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,, \quad \varrho'_\mathrm{v} = \varrho_\mathrm{v}\frac{T_\mathrm{n}p_\mathrm{a}}{T'p_\mathrm{n}} = 1{,}18\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,.$$

Hmotnost pláště balonu $\quad m_\mathrm{b} = 4\pi r^2\mu = 113\ \mathrm{kg}\,.$

Hmotnost heliové náplně $\quad m_\mathrm{He} = \dfrac{4}{3}\pi r^3\varrho'_\mathrm{He} = 163\ \mathrm{kg}\,.$

Počáteční vztlaková síla má velikost $\quad F_\mathrm{vz} = \dfrac{4}{3}\pi r^3\varrho'_\mathrm{v}g = 10{,}5\ \mathrm{kN}\,.$

Počáteční urychlující síla má velikost

$$F_0 = F_\mathrm{vz} - (m_\mathrm{b} + m_0 + m_\mathrm{He})g = 2{,}89\ \mathrm{kN}\,.$$

Počáteční zrychlení má velikost $\quad a_0 = \dfrac{F_0}{m_\mathrm{b} + m_0 + m_\mathrm{He}} = 3{,}72\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$

18. Protože prostor balonu je otevřený, probíhají stavové změny uvnitř balonu izobaricky vzhledem k okolnímu vzduchu, tj. podle Gay-Lussacova zákona, který pro hustotu a absolutní teplotu má tvar $\varrho T = \mathrm{konst.}$

a) Výška $h = 0$: $\quad T'_0 = \dfrac{T_0}{1 - \dfrac{m_\mathrm{b}}{V\varrho_0}} = 355\ \mathrm{K}\,, \quad t'_0 = 82\ °\mathrm{C}\,.$

b) Výška h: $\quad T'_h = \dfrac{T_0}{1 - \dfrac{m_\mathrm{b}}{V\varrho_0}\,\mathrm{e}^{\frac{\varrho_0}{p_0}gh}} = 367\ \mathrm{K}\,, \quad t'_h = 94\ °\mathrm{C}\,.$

19. $F = \dfrac{1}{2}S\varrho_\mathrm{v}v^2 = 3{,}3$ kN.

20. a) $v_\mathrm{min} = \sqrt{\dfrac{2h\varrho g}{\varrho_\mathrm{v}}} = 36\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

b) $Q_V = \dfrac{\pi d^2}{4}v_\mathrm{min} = 3{,}5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}} = 0{,}35$ l/s.

21. Vyjdeme z rovnic

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\varrho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\varrho}\,, \quad \text{kde} \quad \varrho = \varrho_\mathrm{n}\frac{p_1T_\mathrm{n}}{p_\mathrm{n}T_1}\,,$$

$$p_1 = p_2 + h\varrho_\mathrm{r}g = p_\mathrm{a} + h\varrho_\mathrm{r}g\,, \qquad S_1v_1 = S_2v_2\,.$$

Dostaneme

$$v_1 = \sqrt{\frac{2h\varrho_\mathrm{r}g}{\left[\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]} \frac{p_\mathrm{n}T_1}{\varrho_\mathrm{n}(p_\mathrm{a} + h\varrho_\mathrm{r}g)T_\mathrm{n}}} = 22{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

$$v_2 = v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 89{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

$$Q_m = \varrho_\mathrm{n}\frac{(p_\mathrm{a} + h\varrho_\mathrm{r}g)T_\mathrm{n}}{p_\mathrm{n}T_1}\cdot\frac{\pi d_1^2 v_1}{4} = 0{,}0141\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}\,.$$

Chyby přibližného řešení jsou velmi malé:

$$\delta(v_1) = 0{,}9\ \%,\quad \delta(v_2) = 0{,}3\ \%,\quad \delta(Q_m) = 0{,}7\ \%.$$

22. a) $\Delta p_\mathrm{s} = h(\varrho_0 - \varrho_\mathrm{k})g \approx h\varrho_0 g\left(1 - \dfrac{T_0}{T_\mathrm{k}}\right) = \dfrac{h\varrho_\mathrm{n}gp_\mathrm{a}T_\mathrm{n}}{p_\mathrm{n}T_0}\left(1 - \dfrac{T_0}{T_\mathrm{k}}\right) = 338\ \mathrm{Pa}.$

b) Skutečný tah je $\Delta p = k\Delta p_\mathrm{s} = 287\ \mathrm{kPa}$. Pro výpočet rychlosti napíšeme Bernoulliovu rovnici (32) a rovnici kontinuity pro bod 1 u paty komína a bod 2 u jeho ústí:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_\mathrm{a} + \Delta p}{\varrho_\mathrm{k}} = \frac{v_2^2}{2} + gh + \frac{p_\mathrm{a}}{\varrho_\mathrm{k}}\,,\quad S_1v_1 = S_2v_2\,,$$

kde hustota kouřových plynů $\varrho_\mathrm{k} \approx \varrho_\mathrm{n}\dfrac{p_\mathrm{a}T_\mathrm{n}}{p_\mathrm{n}T_\mathrm{k}} = 0{,}53\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}} = \mathrm{konst.}$

a $S_1/S_2 = 16/9$. Řešením dostaneme

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\dfrac{S_1}{S_2} - 1}\left(\frac{\Delta p}{\varrho_\mathrm{k}} - gh\right)} = 12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,\qquad v_2 = v_1\frac{S_1}{S_2} = 22\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

c) $d_1 = \sqrt{\dfrac{4Q_V}{\pi v_1}} = 1{,}20\ \mathrm{m}\,,\quad d_2 = 0{,}90\ \mathrm{m}\,,\quad Q_m = Q_V\varrho_\mathrm{k} = 7{,}1\ \mathrm{kg}\,.$

Základní konstanty vybraných plynů

při tlaku $1{,}00 \cdot 10^5$ Pa a teplotě 0 °C: hustota ϱ, Molární hmotnost M_m, měrná tepelná konstanta při stálém tlaku c_p, Poissonova konstanta $\varkappa$ a dynamická viskozita η (Podle [15])

Plyn		$\dfrac{\varrho}{\mathrm{kg \cdot m^{-3}}}$	$\dfrac{M_\mathrm{m} \cdot 10^3}{\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}}$	$\dfrac{c_p \cdot 10^{-3}}{\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}}$	$\varkappa$	$\dfrac{\eta \cdot 10^6}{\mathrm{Pa \cdot s}}$
amoniak	NH_3	0,771	17,03	2,050	1,313	9,3
dusík	N_2	1,25	28,01	1,039	1,40	16,6
helium	He	0,178	4,003	5,328	1,66	18,6
chlorovodík	HCl	1,639	36,46	0,80	1,40	13,8
kyslík	O_2	1,429	32,00	0,914	1,40	19,2
metan	CH_4	0,717	16,04	2,152	1,319	10,35
neon	Ne	0,899	20,18	1,030	1,66	29,8
Oxidy						
dusnatý	NO	1,340	30,01	0,998	1,385	17,97
dusný	N_2O	1,988	44,01	0,89	1,27	13,7
uhelnatý	CO	1,25	28,01	1,041	1,40	16,6
uhličitý	CO_2	1,977	44,01	0,819	1,301	13,82
sirovodík	H_2S	1,539	34,01	1,105	1,292	11,75
vodní pára (400 °C)			18,02	1,859	1,40	24,12
vodík	H_2	0,0898	2,016	14,248	1,409	8,4
vzduch		1,293	28,96	1,004	1,402	17,1

Literatura

[1] *Bauer, F. – Brůha, V. – Jaňour, Z.:* Základy proudění. Technický průvodce, svazek 18. Vědecko-technické nakladatelství, Praha 1950.

[2] *Brdička, M. – Samek, L. – Sopko, B.:* Mechamika kontinua. Academia, Praha, 2000.

[3] *Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.:* Fyzika, část 2: Mechanika – Termodynamika. VUTIUM, Prometheus, Brno, 2000.

[4] *Horák, Z. – Krupka, F.:* Fyzika. SNTL/Alfa, Praha, 1976 a 1981.

[5] *Horák, Z. – Krupka, F. – Šindelář, V:* Technická fyzika. SNTL, Praha, 1960 a 1961.

[6] *Mechlová, E. – Košťál, K. at al.:* Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz. Prometheus, Praha, 1999.

[7] Ročenky fyzikální olympiády, roč. I. – XXIX. SPN, Praha, 1962 – 1993.

[8] *Svoboda, E. at al.:* Přehled středoškolské fyziky. Prometheus, Praha, 1996.

[9] *Šedivý, P.:* Kruhový děj s ideálním plynem. Knihovnička FO č. 63, MAFY, Hradec Králové, 2004.

[10] *Ungermann, Z.:* Matematika a řešení fyzikálních úloh. Škola mladých fyziků, SPN, Praha, 1990.

[11] *Vybíral, B.:* Mechanika tekutin. GAUDEAMUS, Hradec Králové, 1999.

[12] *Vybíral, B. – Zdeborová, L.:* Odporové síly. Knihovnička FO č. 48, MAFY, Hradec Králové, 2001.

[13] *Vybíral, B. – Zdeborová, L.:* Pohyb těles s vlivem odporových sil. Knihovnička FO č. 55, MAFY, Hradec Králové, 2002.

[14] *Vybíral, B.:* Mechanika ideálních kapalin. Knihovnička FO č. 62, MAFY, Hradec Králové, 2003.

[15] *Kříž, R. – Vávra, P.:* Strojírenská příručka, 4. svazek. SCIENTIA, pedagogické nakladatelství, Praha, 1994.