POHYB TĚLES
S VLIVEM ODPOROVÝCH SIL

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral a Lenka Zdeborová

Obsah

Úvod

Pohyb reálných těles významně ovlivňují odporové síly – např. rychlost kuličky při pádu ve vzduchu lineárně nevzrůstá, jak tomu je ve vakuu, nýbrž přírůstek se zmenšuje, až se rychlost kuličky ustálí na mezní hodnotě. Podobně kmity lineárního oscilátoru nebudou vlivem odporu prostředí harmonické, protože jejich amplituda se bude s narůstajícím časem zmenšovat, až kmity ustanou. Vrhneme-li těleso ve vzduchu, nebude jeho trajektorií parabola, jak říká zjednodušené řešení, nýbrž balistická křivka. Rovněž proudění reálných tekutin významně omezují odporové síly – vnitřní tření.

Tyto uvedené příklady pohybu reálných těles nás vybízejí k detailnější analýze těchto dějů. V úvodních partiích mechaniky, jak se s nimi setkáváme ve středoškolské fyzice, se vliv odporových sil na pohyb těles zanedbává. Je to dáno tím, že zahrnutí těchto sil do pohybových rovnic zpravidla vede k řešení netriviálních diferenciálních rovnic, což převyšuje možnosti středoškolské matematiky.

Předložený text, který je nadstavbou středoškolské fyziky, se před matematickou problematikou nezastavuje a s citlivým přístupen ke středoškolským studentům a ostatním zájemcům ji překonává. Tento text je volným pokračováním naší publikace [19], věnované analýze odporových sil. Zabývá se nejprve pohybovými rovnicemi a obecnými schémata jejich řešení, poté kmity tlumeného oscilátoru, balistikou a prouděním vazkých tekutin. Obecný výklad je ilustrován na 8 řešených příkladech a k procvičení je zařazeno 15 úloh s uvedenými výsledky.

1 Pohyb tělesa při působení odporové síly

1.1 Popis pohybu tělesa

Volné tuhé těleso má šest *stupňů volnosti* (viz např. [16]), protože k popisu jeho pohybu je zapotřebí udat šest nezávislých skalárních souřadnic popisujících okamžitou polohu tělesa. Výhodné je obecný pohyb tělesa rozložit na prostorový pohyb hmotného středu (těžiště) a na rotační pohyb kolem okamžité osy procházející hmotným středem. Trajektorií hmotného středu je v obecném případě prostorová křivka. Rotaci lze rozložit na tři rotace buď ve směru kartézských os nebo na Eulerovy úhly (viz např. [15], [18])

V tomto textu se budeme zabývat jednoduššími případy pohybu tělesa. Při *rovinném pohybu* má těleso tři stupně volnosti a jeho pohyb lze opět popsat pohybem hmotného středu, tentokrát dvěma souřadnicemi, např. kartézskými $x = x(t)$, $y = y(t)$ a jednou rotací kolem hmotného středu $\varphi = \varphi(t)$ – v uvažovaných případech ve směru osy z. Bude-li $\varphi =$ konst, bude mít těleso dva stupně volnosti a bude vykonávat *translační (posuvný) pohyb*. Často se v našich úvahách omezíme jen na přímočarý pohyb tělesa (jeden stupeň volnosti), kdy bude pohyb popsán např. rovnicí $x = x\,(t)$. Bude-li naopak $x =$ konst, $y =$ konst, bude mít těleso rovněž jeden stupeň volnosti a bude konat *rotační pohyb* $\varphi = \varphi(t)$ *kolem pevné osy.*

Funkce $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$ popisují časový průběh pohybu jako fyzikálního děje. Zajímá-li nás *trajektorie*, jakou opisuje hmotný střed, musíme z těchto parametrických rovnic eliminovat čas t a dostaneme rovnici trajektorie $y = y(x)$.

Pohybové rovnice tělesa (viz následující odstavec 1.2) nám poskytují informaci o zrychlení tělesa. Máme-li určit rychlost, musíme tyto rovnice integrovat; máme-li určit polohu, musíme integraci provést dvakrát. Při každé integraci musíme připojit k získané primitivní funkci *integrační konstantu* – dostáváme *obecný integrál*, obsahující konstanty C_1, C_2. Abychom dostali popis pohybu pro konkrétní úlohu, neboli *partikulární integrál*, musíme konstanty C_1, C_2 určit z *počátečních podmínek* úlohy. Např. z dané situace je pro $t = 0$ známo $v(0) = v_0$, $x(0) = x_0$.

Počáteční podmínky můžeme do řešení pohybové rovnice rovněž vložit jako meze určitého integrálu, který užijeme místo integrálu neurčitého (tento postup je použit např. v příkladech 1 až 5).

Integrace pohybových rovnic je často složitá matematická úloha a ne vždy se nám ji podaří provést a dostat výsledek v uzavřeném analytickém tvaru. Někdy se podaří získat jen první integrál. Při řešení konkrétní úlohy je častým východiskem numerické řešení (viz např. [14]).

1.2 Pohybové rovnice

Pro popis pohybu tělesa v inerciální vztažné soustavě obecně použijeme *první a druhou impulsovou větu* (viz např. [16])

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{p}$ je okamžitá hybnost tělesa v uvažované vztažné soustavě, $\boldsymbol{F}$ je výslednice vnějších sil (včetně síly odporové), $\boldsymbol{L}$ moment hybnosti tělesa vzhledem k určitému bodu a $\boldsymbol{M}$ moment výslednice vnějších sil k témuž bodu.

Pokud těleso koná *rovinný pohyb* (viz např. [16]), bude rozpis pohybových rovnic (1) do složek poměrně jednoduchý. Zvolíme-li za momentový bod hmotný střed S, bude moment hybnosti $\boldsymbol{L} = J_\mathrm{S}\boldsymbol{\omega}$, kde J_S je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející hmotným středem kolmo k rovině pohybu a $\omega = \dot{\varphi}$ je okamžitá úhlová rychlost rotace tělesa. Pak pohybové rovnice při vyjádření v kartézských složkách mají tvar

$$m\ddot{x}_\mathrm{S} = F_x, \quad m\ddot{y}_\mathrm{S} = F_y, \quad J_\mathrm{S}\ddot{\varphi} = M,$$

kde $x_\mathrm{S}, y_\mathrm{S}$ jsou souřadnice trajektorie hmotného bodu.

Koná-li těleso translační (posuvný) pohyb nebo zanedbáváme-li jeho rotaci, můžeme pohyb tělesa modelovat pohybem hmotného bodu o hmotnosti m. Pak pohybové rovnice při rovinném pohybu mají v kartézských souřadnicích tvar

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y$$

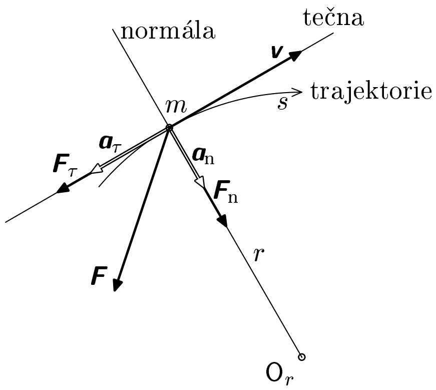
a v přirozených (Eulerových) souřadnicích tvar

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_\mathrm{n} = F_\mathrm{n},$$

kde tečné a normálové zrychlení je

$$a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}, \quad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r}.$$

V těchto vztazích jsou F_τ, F_n velikosti složek výslednice sil $\boldsymbol{F}$ ve směru tečny a normály k trajektorii v uvažované poloze bodu m, r okamžitý poloměr křivosti trajektorie v této poloze



Obr. 1. Složky sil a zrychlení pohybujícího se bodu

(obr. 1) a $s = s(t)$ je dráha, kterou bod opíše od zvoleného počátku na trajektorii.

1.3 Řešení pohybových rovnic pro přímočarý pohyb

a) Síla je funkcí polohy

Je dána funkce $F = F(x)$. Pohybovou rovnici píšeme ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(x),$$

což je díky derivaci složené funkce $v\left(x\left(t\right)\right)$ totéž jako

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(x).$$

Máme diferenciální rovnici, u níž lze separovat proměnné a psát

$$\int_{v_0}^{v} mv\,\mathrm{d}v = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Levá strana rovnice představuje změnu kinetické energie hmotného bodu a pravá strana práci, kterou síla vykoná při změně polohy bodu.

Po integraci pravé strany rovnice (2) a po dosazení $v = \mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$ do její levé strany dostaneme další diferenciální rovnici. Po separaci proměnných x, t a po její integraci dostaneme hledanou funkci $t = t(x)$, resp. $x = x(t)$. Často jde ovšem – v případě druhé integrace – o složitý matematický úkon.

b) Síla je funkcí rychlosti

Je dána funkce $F = F(v)$, což je častý případ pro odporové síly. Napíšeme pohybovou rovnici ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(v). \tag{3}$$

Způsob jejího řešení je závislý na tom, kterou veličinu určujeme.

1. Řešíme-li závislost $t = t(v)$, resp. $v = v(t)$, provedeme separaci proměnných v (3) a integrujeme

$$\int_{v_0}^{v} \frac{m\,\mathrm{d}v}{F(v)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t.$$

Zvolíme-li $t_0 = 0$, dostaneme

$$t = m\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{F(v)}.$$

Další postup je závislý na funkci $F(v)$.

2. Řešíme závislost $x = x(v)$, resp. $v = v(x)$. Časovou derivaci rychlosti opět rozepíšeme podle vztahu pro derivaci složené funkce, rovnice (3) přejde na

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(v).$$

Po separaci proměnných můžeme integrovat

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{v\,\mathrm{d}v}{F(v)} = \int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x,$$

neboli

$$x = x_0 + m\int_{v_0}^{v}\frac{v\,\mathrm{d}v}{F(v)}. \tag{4}$$

Příklad 1 – svislý vrh vzhůru s odporem vzduchu

Koule o hmotnosti $m = 90{,}0\,\mathrm{g}$ a o poloměru $r = 30{,}0\,\mathrm{mm}$ je vržena ve vzduchu počáteční rychlostí $v_0 = 20{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ svisle vzhůru tak, že při vrhu nerotuje. Vypočtěte:

a) Rychlost koule na vzestupné i sestupné části trajektorie,
b) výšku h výstupu koule, přičemž získaný výsledek upravte také pro případ zanedbávání odporu vzduchu (výška h_0),
c) rychlost v_0', kterou bude koule procházet místem, z něhož byla vržena,
d) mezní rychlost koule,
e) relativní úbytek mechanické energie koule po jejím návratu do místa vrhu.

Řešte nejprve obecně, přičemž vzhledem k uvedené rychlosti předpokládejte turbulentní obtékání. Pro numerický výpočet si potřebné konstanty najděte v tabulkách v dodatku textu [19].

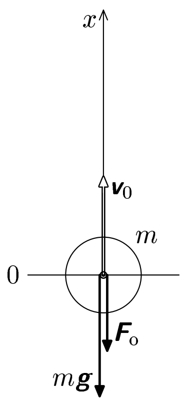
Řešení

a) Na kouli působí tíhová síla a odporová síla daná Newtonovým vztahem (viz [19]). Výsledná síla pro vzestupnou část trajektorie je (viz obr. 2)

$$F = -mg - \frac{1}{2}CS\varrho v^2 = -mg\left(1 + Kv^2\right), \tag{5}$$

kde je vhodně zavedena konstanta

$$K = \frac{CS\varrho}{2mg}.$$



Obr. 2.

Pro sestupnou část trajektorie se změní směr odporové síly (obr. 3) a výsledná síla bude

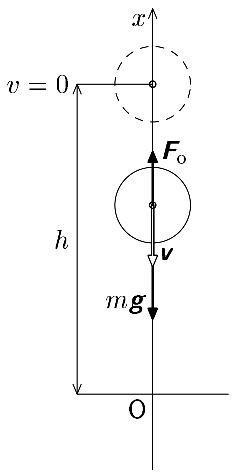
$$F' = -mg\left(1 - Kv'^2\right), \tag{6}$$

kde jsme rychlost v sestupné části označili v'. Dosadíme-li sílu (5) do rovnice (4) pro $x_0 = 0$ a provedeme-li s ohledem na integraci násobení a dělení výrazu činitelem $2K$, dostaneme

$$x = -\frac{1}{2gK}\int_{v_0}^{v}\frac{2Kv\,\mathrm{d}v}{1+Kv^2} = \frac{1}{2gK}\ln\frac{1+Kv_0^2}{1+Kv^2}.$$

Odtud pro rychlost na vzestupné části trajektorie vychází

$$v = \sqrt{\frac{1}{K}\left[\left(1+Kv_0^2\right)\mathrm{e}^{-2gKx} - 1\right]}. \tag{7}$$



Obr. 3.

b) Maximální výšku koule dosáhne v bodě $x = h$, v němž platí $v = 0$. Pak z (7) plyne

$$1 = \left(1+Kv_0^2\right)\mathrm{e}^{-2gKh},$$

odtud

$$h = \frac{\ln\left(1+Kv_0^2\right)}{2gK}. \tag{8}$$

Zanedbáme-li odpor vzduchu, předpokládáme $Kv_0^2 \ll 1$. Pak můžeme logaritmus $\ln(1+x)$ nahradit x a výraz (8) přejde do známého tvaru

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

c) V sestupné části trajektorie půjde o volný pád koule z výšky h (8). Do obecné rovnice (4) tedy dosadíme za sílu výraz (6) a uvážíme okrajové podmínky $x_0 = h$, $v_0 = 0$. Pak po násobení a dělení výrazu činitelem $(-2K)$ dostaneme

$$x = h + \frac{1}{2gK}\int_0^{v'}\frac{-2Kv'\,\mathrm{d}v'}{1-Kv'^2} = h + \frac{1}{2gK}\ln\left(1-Kv'^2\right).$$

Z tohoto výrazu vyjádříme $v' = v'(x)$, přičemž za h dosadíme z výrazu (8). Pak

$$v' = \sqrt{\frac{1}{K}\left[1-\mathrm{e}^{2gK(x-h)}\right]} = \sqrt{\frac{1}{K}\left[1-\frac{\mathrm{e}^{2gKx}}{1+Kv_0^2}\right]}. \tag{9}$$

Při průchodu koule místem jejího počátečního vrhu, tj. pro $x = 0$, bude její rychlost

$$v_0' = \frac{v_0}{\sqrt{1 + Kv_0^2}}.$$

d) Po průchodu koule bodem $x = 0$ nabude exponent ve výrazu (9) záporných hodnot a uvedený zlomek se bude zmenšovat až v limitě $x \to \infty$ bude nulový. Mezní rychlost tedy je

$$v_m = \sqrt{\frac{1}{K}} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\varrho}}.$$

Uvedený výsledek bychom rovněž získali z výrazu (6) a podmínky nulové celkové síly.

e) Zvolíme-li nulovou hladinu potenciální energie v bodě $x = 0$, bude mechanická energie koule v okamžiku jejího vržení $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Mechanická energie koule při jejím návratu do bodu $x = 0$ bude

$$E_0' = \frac{1}{2}m{v_0'}^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{1 + Kv_0^2} = \frac{E_0}{1 + Kv_0^2} < E_0.$$

Relativní úbytek mechanické energie koule v této poloze tedy je

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 1 - \frac{E_0'}{E_0} = \frac{Kv_0^2}{1 + Kv_0^2}.$$

Při pohybu koule v odporujícím prostředí se mechanická energie koule mění na vnitřní energii zúčastněných těles (padajícího tělesa a prostředí).

Numerické výsledky: $K = 9{,}91 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^{-2}{\cdot}s^2}$, $h = 17{,}2\,\mathrm{m}$, $h_0 = 20{,}4\,\mathrm{m}$,
$v_0' = 16{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\Delta E/E_0 = 28{,}4\,\%$.

Poznámka: Výpočty prováděné v tomto příkladě jsou zatíženy jistou (nevelkou) systematickou chybou, protože jsme předpokládali, že podél celé trajektorie nastává turbulentní obtékání koule. V okolí jejího vrcholu se však rychlost zmenší natolik, že turbulentní proudění přejde v laminární a odporová síla se bude řídit jiným vztahem, než jsme předpokládali.

Příklad 2 – pád kuličky ve vodě

Kulička o poloměru r je ponořena do vody, přičemž hustota ϱ kuličky je jen o málo větší než hustota ϱ_v vody. Kuličku z její výchozí polohy pustíme nulovou počáteční rychlostí. Vypočtěte:

a) závislost rychlosti kuličky na čase,
b) mezní rychlost kuličky,

c) závislost polohy kuličky na čase.

Závislost $v = v(t)$, $x = x(t)$ znázorněte rovněž graficky pro vhodně volené veličiny.

Řešení

S ohledem na zadanou relaci hustot předpokládáme laminární obtékání a pro odporovou sílu použijeme Stokesův vztah (viz [19]). Na kuličku bude působit ještě tíhová a vztlaková síla. Osu x zvolíme kladně ve směru tíhového zrychlení $\boldsymbol{g}$ s počátkem ve výchozí poloze kuličky. Počáteční podmínky úlohy tedy jsou: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$. Pohybovou rovnici

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(\varrho - \varrho_\mathrm{v}\right) g - 6\pi r \eta v$$

můžeme formálně přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a - bv, \tag{10}$$

kde

$$a = \left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right) g, \quad b = \frac{9\eta}{2r^2\varrho}.$$

a) V diferenciální rovnici (10) separujeme proměnné a integrujeme v mezích daných počátečními podmínkami:

$$t = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{a - bv} = -\frac{1}{b}\int_0^v \frac{-b\,\mathrm{d}v}{a - bv} = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{a - bv}{a}\right).$$

Odtud

$$v = \frac{a}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right). \tag{11}$$

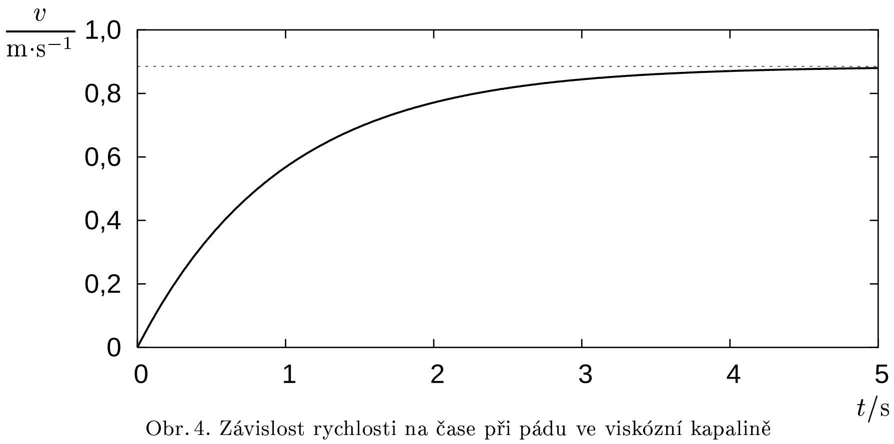
b) Mezní rychlost dostaneme z (11) pro $t \to \infty$ nebo též rovnou z pohybové rovnice pro nulovou změnu rychlosti za čas, tj.

$$v_m = \frac{a}{b} = \left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right)\frac{2r^2\varrho g}{9\eta}.$$

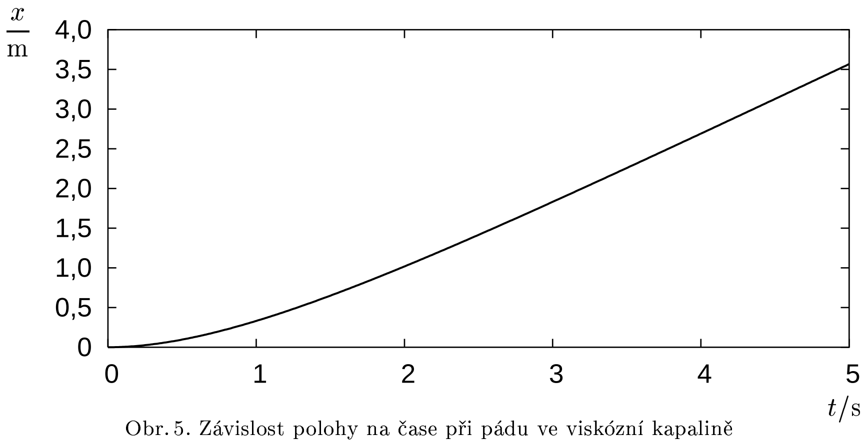
c) Uvážíme, že ve vztahu (11) je $v = \mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$. Po dosazení dostaneme diferenciální rovnici, v níž separujeme proměnné, zavedeme rychlost v_m a integrujeme

$$x = v_m \int_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right)\mathrm{d}t = v_m\left[t + \frac{1}{b}\left(\mathrm{e}^{-bt} - 1\right)\right]. \tag{12}$$

Grafická závislost funkcí (11) a (12) pro hodnoty $\varrho_\mathrm{v} = 998{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $\varrho = 1100\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $\eta = 1{,}001 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$ a $r = 2{,}00\,\mathrm{mm}$ je na obr. 4 a 5. Pro zvolené hodnoty je $v_m = 0{,}885\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 4. Závislost rychlosti na čase při pádu ve viskózní kapalině



Obr. 5. Závislost polohy na čase při pádu ve viskózní kapalině

Popsaného jevu – pádu kuličky vhodné hustoty v kapalině – lze využít pro měření viskozity kapaliny.

Příklad 3 – odpor úměrný obecné mocnině rychlosti

Uvažme těleso pohybující se vodorovně rychlostí $v_0 \neq 0$, na které začne působit odporová síla úměrná r-té mocnině rychlosti. Pro jaké r má těleso konečnou brzdnou dráhu? Jaká je tato brzdná dráha?

Řešení

Pohybová rovnice tělesa je

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^r.$$

Pro $r \neq 1$ dostáváme po separaci proměnných a integraci

$$-\frac{k}{m}t = \int_{v_0}^{v} v^{-r}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{1-r}\left(v^{1-r} - v_0^{1-r}\right).$$

Rychlost se tedy mění s časem podle vztahu

$$v(t) = \left[\frac{(r-1)\,kt}{m} + v_0^{1-r}\right]^{\frac{1}{1-r}}.$$

Abychom dostali závislost dráhy na čase, musíme vztah pro rychlost ještě jednou zintegrovat a pro $r \neq 2$ dostáváme

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{m}{(r-2)\,k}\left\{\left[\frac{(r-1)\,kt}{m} + v_0^{1-r}\right]^{\frac{2-r}{1-r}} - v_0^{2-r}\right\}.$$

Konečnou brzdnou dráhu mají jistě ty pohyby, které se v konečném čase zastaví, neboli pro které existuje řešení rovnice $v(t) = 0$. Pro $r < 1$ se pohyb zastaví v čase

$$t = \frac{mv_0^{1-r}}{(1-r)\,k}.$$

Brzdná dráha pak je

$$x_\mathrm{b} = \frac{mv_0^{2-r}}{(2-r)\,k}. \tag{13}$$

Pro $r \in (1,2)$ se pohyb sice teoreticky nikdy nezastaví, ale jeho brzdná dráha je konečná, neboť exponent $\frac{2-r}{1-r}$ ve vztahu pro dráhu je záporný. Pro $t \to \infty$ je brzdná dráha stejně jako v předchozím případě

$$x_\mathrm{b} = \frac{mv_0^{2-r}}{(2-r)\,k}.$$

Pro $r = 1$ je z důvodu nutnosti spojitosti řešení výsledek pro brzdnou dráhu stejný jako (13), rychlost však v tomto případě nikdy neklesne na nulu stejně jako pro $r \in (1,2)$. Pro úplnost, podle výsledků předchozích příkladů, uvedeme, že pro $r = 1$ je

$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}, \quad x(t) = \frac{mv_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}\right).$$

Pro $r > 2$ je dráha brzdícího tělesa teoreticky neomezená; je to vidět ze vztahu pro $x(t)$. Pro $r = 2$ bude

$$x(t) = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_0 t}{m} + 1\right),$$

což je také neomezená funkce času.

Shrneme-li poznatky, tak brzdná dráha je konečná pro $r < 2$ a její délka je

$$x_\mathrm{b} = \frac{mv_0^{2-r}}{(2-r)\,k}.$$

Pro ostatní r se bude těleso teoreticky pohybovat do nekonečné vzdálenosti, prakticky se však díky fluktuacím při velmi malých rychlostech někdy zastaví, nelze ovšem obecně říci v jaké vzdálenosti.

Příklad 4 – potápění padající kuličky

Dřevěná kulička o hustotě $\varrho_\mathrm{k} = 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a poloměru $r = 20\,\mathrm{mm}$ padá z výšky $h_0 = 2{,}0\,\mathrm{m}$ do vody. Určete, jak hluboko se potopí a) zanedbáte-li odpor vody, b) nezanedbáte-li odpor vody.

Při výpočtu neuvažujte jevy vznikající, když je kulička ponořena jen z části.

Řešení

Určujeme-li rychlost, kterou kulička dopadá na hladinu, můžeme zanedbat odpor vzduchu. Platí $v_0 = \sqrt{2gh_0} = 6{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

a) Zanedbáme-li odporovou sílu vody, působí po dobu ponořování na kuličku síla $F = -\frac{4}{3}\pi r^3 g\,(\varrho_\mathrm{v} - \varrho_\mathrm{k}) = ma_0$, kde a_0 je zrychlení a m hmotnost kuličky. Kulička se v tomto případě potopí do hloubky

$$h = \frac{v_0^2}{2a_0} = \frac{h_0 \varrho_\mathrm{k}}{(\varrho_v - \varrho_\mathrm{k})} = 8{,}0\,\mathrm{m}.$$

Vidíme, že výsledek nezávisí na poloměru kuličky, a že hloubka je nad očekávání veliká.

b) Nezanedbáme odporovou sílu vody, přičemž předpokládáme turbulentní obtékání. Pak je odporová síla dána Newtonovým vzorcem (viz [19]). Označíme-li kladné konstanty

$$a = \frac{\varrho_\mathrm{k}}{g\,(\varrho_v - \varrho_\mathrm{k})}, \quad b = \frac{3C\varrho_v}{8rg\,(\varrho_v - \varrho_\mathrm{k})},$$

bude mít pohybová rovnice tvar

$$a\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + bv^2 + 1 = 0.$$

Po separaci proměnných a integraci je

$$\frac{t}{a} = \int_{v_0}^{v} -\frac{\mathrm{d}v}{1+bv^2} = \frac{1}{\sqrt{b}}\left[\operatorname{arctg}\left(v_0\sqrt{b}\right) - \operatorname{arctg}\left(v\sqrt{b}\right)\right],$$

z čehož vyjádříme závislost rychlosti na čase

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\left(v_0\sqrt{b}\right) - \frac{t}{a}\sqrt{b}\right].$$

Integrací tohoto vztahu dostaneme závislost dráhy na čase. Zavedeme substituci

$$y(t) = \cos\left[\operatorname{arctg}\left(v_0\sqrt{b}\right) - \frac{t}{a}\sqrt{b}\right], \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{b}}{a}\sin\left[\operatorname{arctg}\left(v_0\sqrt{b}\right) - \frac{t}{a}\sqrt{b}\right],$$

$$x(t) = \frac{a}{b}\int\limits_{y(0)}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{a}{b}\ln\left\{\frac{\cos\left[\operatorname{arctg}\left(v_0\sqrt{b}\right) - \frac{t}{a}\sqrt{b}\right]}{\cos\left(\operatorname{arctg} v_0\sqrt{b}\right)}\right\}.$$

Do tohoto vztahu dosadíme čas, ve kterém je rychlost pohybu kuličky nulová a dostaneme hloubku, do které se kulička potopí. Po dosazení za námi zavedené pomocné konstanty je hloubka

$$h = \frac{a}{2b}\ln\left(1+bv_0^2\right) = \frac{4r\varrho_\mathrm{k}}{3C\varrho_v}\ln\left[1+\frac{3Ch_0\varrho_v}{4r\left(\varrho_v-\varrho_\mathrm{k}\right)}\right],$$

kde, připomeňme, ϱ_k je hustota kuličky a ϱ_v vody. Číselně máme po dosazení $h = 23\,\mathrm{cm}$, což je výrazně méně než při zanedbání odporu prostředí. Ač je tento výsledek realističtější než předchozí, o jeho správnosti nás může přesvědčit jedině experiment. Nepřesnost našeho výsledku způsobuje zejména fakt, že jsme zanedbali to, co se děje, když je kulička ponořena jen z části (jde jednak o vzrůstající vztlakovou sílu, měnící se sílu odporovou, o vliv povrchového napětí a o ráz kuličky s kapalinou, při kterém kulička předá část své mechanické energie kapalině – kapalina se rozvlní).

Příklad 5 – pád parašutisty

Rychlost parašutisty se bez rozevřeného padáku ustálí na hodnotě $v_0 = 50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V jaké výšce nad zemí musí otevřít padák, je-li pro něj velmi nebezpečné dopadnout rychlostí vyšší než $v_d = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Hmotnost parašutisty i s padákem je 100 kg. Předpokládejte, že rozevřený padák je polokoule o průměru $d = 7{,}0\,\mathrm{m}$.

Řešení

Na parašutistu působí Newtonova odporová síla, jeho pohybová rovnice tedy je

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = mg - \frac{1}{2}CS\varrho v^2.$$

Označíme

$$k = \frac{CS\varrho}{2m}.$$

Uvážíme-li, že rychlost v je vždy během pádu větší než ustálená (mezní) rychlost pádu s padákem $v_m = \sqrt{g/k}$, dostáváme separací proměnných a integrací závislost doby pádu na rychlosti

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{g - kv^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int_{v_0}^{v} \left(\frac{1}{v\sqrt{k} + \sqrt{g}} - \frac{1}{v\sqrt{k} - \sqrt{g}} \right) \mathrm{d}v,$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{kg}} \ln \left[\frac{\left(v\sqrt{k} + \sqrt{g}\right)\left(v_0\sqrt{k} - \sqrt{g}\right)}{\left(v\sqrt{k} - \sqrt{g}\right)\left(v_0\sqrt{k} + \sqrt{g}\right)} \right].$$

Maximální bezpečné rychlosti dopadu parašutista dosáhne v čase $t_d = t(v_d)$. Z rovnice vyjádříme závislost rychlosti na čase

$$v(t) = \frac{(v_0 + v_m) + (v_0 - v_m)\,\mathrm{e}^{-2t\sqrt{kg}}}{(v_0 + v_m) - (v_0 - v_m)\,\mathrm{e}^{-2t\sqrt{kg}}}\, v_m.$$

Abychom získali závislost výšky na čase, musíme tento výraz zintegrovat v mezích od 0 do času t. To uděláme zavedením substituce $y = \exp\left(-2t\sqrt{kg}\right)$ a rozepsáním na parciální zlomky. Pak

$$x(t) = -\frac{1}{2k} \int_{1}^{y(t)} \left[\frac{2\,(v_0 - v_m)}{(v_0 + v_m) - (v_0 - v_m)\,y} + \frac{1}{y} \right] \mathrm{d}y,$$

$$x(t) = v_m t + \frac{1}{k} \ln \frac{(v_0 + v_m) - \mathrm{e}^{-2t\sqrt{kg}}\,(v_0 - v_m)}{2v_m}.$$

Nyní už jen do $x(t)$ dosadíme $t_d = t\,(v_d)$ a po pracné, ale přímočaré úpravě dostaneme pro výšku, ve které musí parašutista otevřít padák, výraz

$$x = \frac{1}{2k} \ln \frac{kv_0^2 - g}{kv_d^2 - g} = 5{,}5\,\mathrm{m}.$$

Při výpočtu jsme zanedbali děje při otevírání padáku. Z výsledku je vidět, že kdyby se padák otevřel okamžitě, parašutistovi by na zabrzdění stačilo asi šest metrů, ale na začátku brzdění by jeho zpomalení bylo $a = g - kv_0^2 \sim -80g$, což by nepřežil. Ve skutečnosti si samozřejmě nemůžeme dovolit zanedbat otevírání padáku, kdybychom ho uvažovali, vyšel by nám jistě realističtější výsledek.

2 Tlumený kmitavý pohyb

Ve všech oblastech fyziky i techniky se běžně setkáváme s periodickým kmitavým pohybem. K popisu kmitajícího tělesa užíváme pojmu rovnovážná poloha, což je poloha, ve které je výslednice sil působících na těleso nulová. Je-li situace taková, že výslednice sil působících na těleso je přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy a působí proti ní (tj. vrací těleso do rovnovážné polohy), mluvíme o pohybu harmonickém. Harmonické kmity koná harmonický oscilátor, a jak poznáme, jsou jeho kmity netlumené, idealizované.

2.1 Harmonický mechanický oscilátor

Uvažujme nyní harmonický oscilátor s jedním stupněm volnosti (tj. s jednou souřadnicí, která stačí na popis okamžité polohy), např. závaží na pružině. Pohybová rovnice má tvar $ma = -ky$, kde y je výchylka z rovnovážné polohy, druhá časová derivace výchylky $\ddot{y} = a$ je zrychlení, m hmotnost tělesa a konstanta k tuhost pružiny. Rovnici zjednodušíme zavedením konstanty, která má význam vlastní úhlové frekvence $\omega = \sqrt{k/m}$. Pak platí

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Toto je obecný tvar pohybové rovnice harmonického oscilátoru. Je to obyčejná lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Vyřešíme ji využitím následujících vztahů

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right) = \dot{y}\ddot{y}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y^2}{2}\right) = y\dot{y}.$$

Vynásobíme-li totiž pohybovou rovnici $\dot{y}$, můžeme psát

$$0 = \ddot{y}\dot{y} + \omega^2 y\dot{y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2\right),$$

z čehož díky tomu, že jedině derivace konstanty je nula, plyne (integrační konstantu označíme $\omega^2 A^2$, musí být $A \geq y$)

$$\dot{y}^2 + \omega^2 y^2 = \omega^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right| = \omega\sqrt{A^2 - y^2}.$$

Tím jsme dostali separovatelnou diferenciální rovnici a můžeme provést její integraci

$$\omega t = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{A^2 - y^2}} = \arcsin\frac{y}{A} - \varphi_0,$$

kde φ_0 je druhá integrační konstanta. Vyjádříme-li závislost výchylky na čase, dostáváme známý vztah pro harmonické kmity

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

ve kterém konstanta A má význam amplitudy a konstanta φ_0 má význam počáteční fáze. Velikost těchto integračních konstant se určí z počátečních podmínek. Je-li na počátku pohybu $y(0) = y_0$ a $v(0) = \dot{y}(0) = v_0$, vychází

$$A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + y_0^2}\,, \qquad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_0 \omega}{v_0}.$$

Perioda harmonických kmitů je $T = 2\pi/\omega$.

2.2 Tlumený mechanický oscilátor

Harmonický pohyb je ovšem opět jen idealizací reálné situace. Ve skutečnosti na každé pohybující se těleso působí odporové (tlumící) síly, které kmitání tlumí a jeho mechanickou energii přeměňují na vnitřní energii. Pohybová rovnice tlumených harmonických kmitů nabývá tvaru

$$ma = -ky - F_\mathrm{t}, \tag{14}$$

kde F_t je tlumící síla, která obecně může libovolně záviset na výchylce, rychlosti nebo i čase. Nejčastěji se v praxi vyskytuje odporová síla přímo úměrná rychlosti $F_\mathrm{t} = bv$, kde konstanta b je součinitel lineárního (viskózního) tlumení. S takovou lineární tlumící silou se setkáváme např. při hydraulických odporech nebo při pomalém pohybu ve viskózním prostředí.

Pokud odporová síla nezávisí na rychlosti lineárně, můžeme funkci $F_\mathrm{t}(v)$ rozvinout do Taylorovy řady

$$F_\mathrm{t}(v) = F_\mathrm{t}(0) + F_\mathrm{t}'(0)\, v + \frac{1}{2} F_\mathrm{t}''(0)\, v^2 + \cdots$$

V konkrétních úlohách se často stává, že členy s vyšší než první mocninou rychlosti v tomto rozvoji jsou zanedbatelně malé. Pak můžeme rovnici (14) řešit s lineárním tlumením jako aproximativní přiblížení problému.

Nyní pohybovou rovnici (14) s lineárním tlumením vyřešíme. Zavedeme kladné konstanty: druhou mocninu vlastní úhlové frekvence harmonických kmitů $\omega^2 = k/m$ a součinitel tlumení $\delta = b/2m$. Pohybovou rovnici napíšeme ve tvaru

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega^2 y = 0. \tag{15}$$

To je obyčejná lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a z teorie vyplývá, že její partikulární řešení (jedno ze všech možných řešení) můžeme hledat ve tvaru $\mathrm{e}^{\lambda t}$. Dosadíme-li tuto funkci a její derivaci do rovnice (15), dostaneme pro koeficient λ kvadratickou *charakteristickou rovnici* s řešením

$$\left(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}. \tag{16}$$

Mohou nastat tři případy:

a) $\delta > \omega \ldots$ přetlumený oscilátor konající aperiodický pohyb,
b) $\delta = \omega \ldots$ oscilátor s kritickým tlumením,
c) $\delta < \omega \ldots$ oscilátor konající tlumené kmity.

a) Přetlumený oscilátor

Odmocnina v (16) je reálné číslo. Označíme $\Omega = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ (narozdíl od případu c) zde Ω nemá význam úhlové frekvence). Obecné řešení rovnice (15) pak můžeme psát jako lineární kombinaci dvou možných partikulárních řešení

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{(-\delta+\Omega)t} + C_2\,\mathrm{e}^{(-\delta-\Omega)t},$$

kde C_1, C_2 jsou integrační konstanty závisející na počátečních podmínkách. Pro počáteční hodnoty výchylky $y(0) = y_0$ a rychlosti $\dot{y}(0) = v(0) = v_0$, vychází konstanty

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{v_0 + y_0\delta}{\Omega}\right), \qquad C_2 = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{v_0 + y_0\delta}{\Omega}\right)$$

a závislost výchylky na čase má tvar

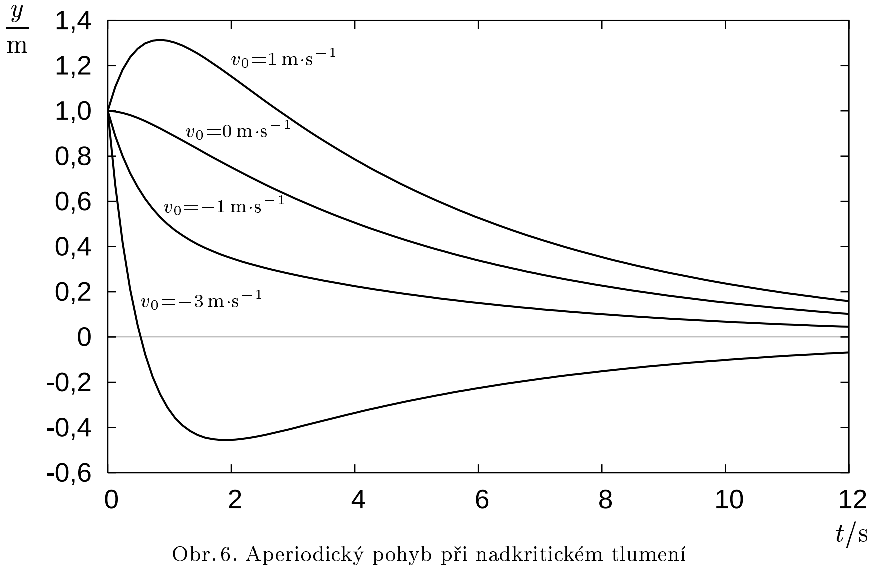
$$y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\delta t}\left[\left(y_0 + \frac{v_0 + y_0\delta}{\Omega}\right)\mathrm{e}^{\Omega t} + \left(y_0 - \frac{v_0 + y_0\delta}{\Omega}\right)\mathrm{e}^{-\Omega t}\right].$$

Vidíme tedy, že řešení je ve tvaru součtu dvou exponenciálních funkcí, přičemž pro $t \to \infty$ je $y(t) \to 0$ (viz obr. 6). Podíváme se ještě, kolikrát za dobu pohybu se soustava může dostat do rovnovážné polohy, neboli hledáme počet řešení rovnice $y(t) = 0$. Tato rovnice má jedno řešení pokud

$$-\frac{C_2}{C_1} \geq 1,$$

je-li tomu jinak, nemá žádné řešení. Takže pokud například přetlumený oscilátor vychýlíme z rovnovážné polohy, a pak jej s nulovou počáteční rychlostí uvolníme, vrátí se k rovnovážné poloze, aniž by jí prošel. Přetlumený oscilátor nekoná periodický pohyb, rovnovážnou polohu překmitne maximálně jednou a blíží se k ní pro $t \to \infty$.

Graf na obr. 6 zachycuje časovou závislost výchylky přetlumeného oscilátoru s parametry $\delta = 1{,}00\,\mathrm{s}^{-1}$ a $\Omega = 0{,}80\,\mathrm{s}^{-1}$ pro počáteční výchylku $y_0 = 1\,\mathrm{m}$ a různé počáteční rychlosti.



Obr. 6. Aperiodický pohyb při nadkritickém tlumení

b) Kritické tlumení

Koeficient λ má jen jednu hodnotu $\lambda = \delta$, a protože pohybová rovnice je diferenciální rovnicí druhého řádu, musíme hledat ještě jeden partikulární integrál. Zpětným dosazením snadno zjistíme, že diferenciální rovnici (15) vyhovyje rovněž funkce $y = t\mathrm{e}^{-\delta t}$. Proto má obecné řešení tvar

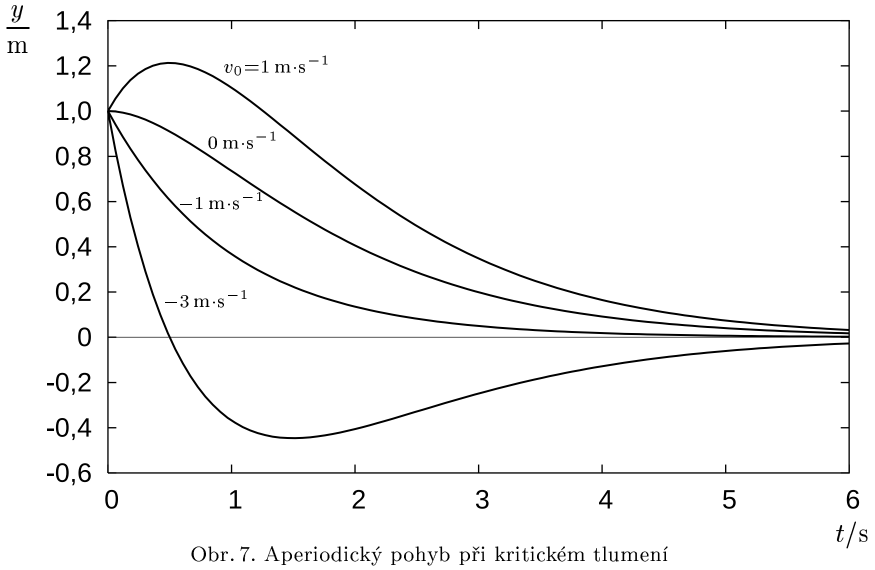
$$y(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\,(C_1 + C_2 t)\,.$$

Z počátečních podmínek opět vypočítáme integrační konstanty C_1, C_2 a dostáváme závislost výchylky na čase

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left[y_0 + (v_0 + y_0\delta)\,t\right].$$

Oscilátor se v tomto případě chová kvalitativně stejně jako v případě předchozím, rovnovážnou polohu překmitne jednou, je-li $C_2/C_1 < 0$. V tomto mezním případě tedy pohyb stále ještě není periodický, oscilátor se ovšem do rovnovážné polohy vrací nejrychleji. Toho se využívá např. u elektrických měřících přístrojů, kde ručička a její uložení tvoří kmitavý systém. Kdyby tento systém byl málo tlumen, kmitala by ručička dlouho kolem rovnovážné polohy, u přetlumeného systému by se zase vracela příliš pomalu.

Závislost $y\,(t)$ pro kritické tlumení s $\delta = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ je na obr. 7. Počáteční podmínky jsou voleny stejně jako v předchozím případě.



Obr. 7. Aperiodický pohyb při kritickém tlumení

c) Tlumené kmity

Dostáváme se ke třetí a nejdůležitější části. Odmocnina v (16) je imaginární číslo a charakteristické rovnice má komplexně sdružené kořeny. Označíme $\Omega =$ $= \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$. Zde Ω je *vlastní úhlová frekvence* tlumeného oscilátoru a je to reálné číslo. Obecné řešení rovnice (15) v tomto případě má tvar

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{(-\delta+\mathrm{i}\Omega)t} + C_2\,\mathrm{e}^{(-\delta-\mathrm{i}\Omega)t} = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(C_1\,\mathrm{e}^{i\Omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\Omega t}\right),$$

kde C_1, C_2 jsou tentokrát obecně komplexní integrační konstanty. Protože výchylka $y(t)$ musí být reálná, konstanty C_1, C_2 musí být komplexně sdružené. Napíšeme-li je v komplexním tvaru $C_1 = \frac{1}{2}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $C_2 = \frac{1}{2}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, kde $A \geq 0$ a α jsou nové, tentokrát již reálné, konstanty, dostáváme pro výchylku

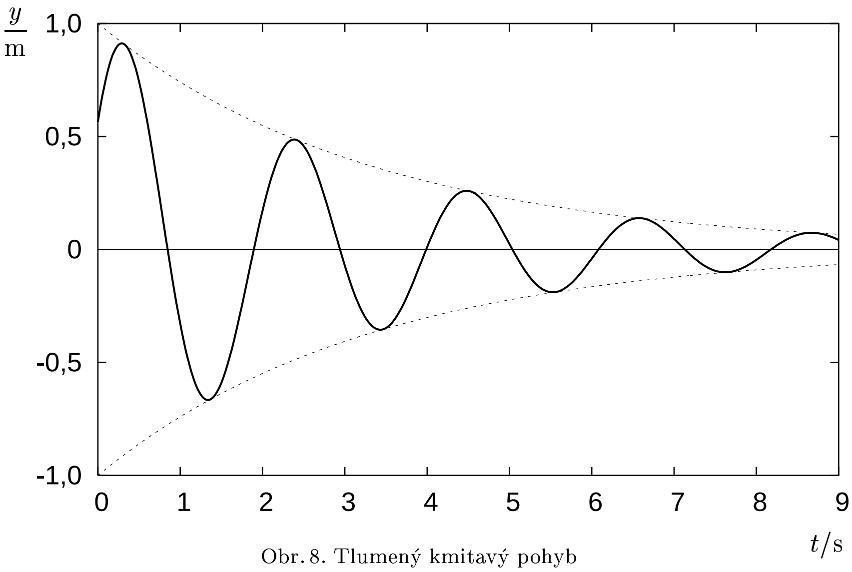
$$y(t) = \frac{1}{2}A\mathrm{e}^{-\delta t}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t+\alpha)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega t+\alpha)}\right] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\left(\Omega t + \alpha\right),$$

kde jsme využili vzorce

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Konstanta A má význam amplitudy kmitů v nulovém čase, α je počáteční fáze. Tyto konstanty se opět dají určit z počátečních podmínek. Je-li y_0 počáteční výchylka a v_0 počáteční rychlost, vychází po úpravě

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{v_0 + y_0\delta}{\Omega y_0}, \qquad A^2 = y_0^2 + \frac{(v_0 + y_0\delta)^2}{\Omega^2}.$$



Obr. 8. Tlumený kmitavý pohyb

Amplituda výchylky těchto kmitů není konstantní, nýbrž klesá exponenciálně s časem $A(t) = A\exp(-\delta t)$. Tlumený kmitavý pohyb je tedy omezen podmínkou $|y| \leq A(t)$ a křivky $\pm A\exp(-\delta t)$ jsou obalovými křivkami tlumených kmitů (viz obr. 8). Doba kmitu, která se zavádí vztahem $T = 2\pi/\Omega$, není periodou funkce $y(t)$ (ta periodická není), nýbrž jen periodou funkce $\cos(\Omega t + \alpha)$; je vždy větší než perioda netlumeného pohybu. Maxima či minima nabývá výchylka v čase, kdy je rychlost pohybu nulová, neboli po derivaci a úpravě vztahu pro výchylku

$$\Omega t + \alpha = -\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\Omega} + n\pi, \quad \text{kde } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Z tohoto lze vyjádřit dobu, která uplyne od průchodu rovnovážnou polohou do dosažení maxima nebo minima výchylky. Tato doba je

$$\Delta t = \frac{1}{\Omega}\operatorname{arctg}\frac{\Omega}{\delta} \leq \frac{T}{4}.$$

U tlumených kmitů je tedy doba mezi průchodem rovnovážnou polohou a dosažením extrému výchylky vždy menší než u netlumených kmitů, tj. než čtvrtina periody. Kmitající bod se pohybuje rychleji od rovnovážné polohy než nazpět a dosáhne maximální výchylky dříve než uprostřed mezi dvěma průchody rovnovážnou polohou.

Podíl dvou hodnot amplitudy či výchylky y v čase t a $t+T$ nezávisí na čase a nazývá se *útlum* po sobě jdoucích kmitů. Přirozený logaritmus útlumu se nazývá *logaritmický dekrement útlumu*,

$$\vartheta = \ln\left[\frac{y(t)}{y(T+t)}\right] = \delta T.$$

Tato bezrozměrná veličina charakterizuje míru tlumení.

Mechanická energie je dána součtem energie potenciální a kinetické, tj.

$$E = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2.$$

Mechanická energie však není konstantní, nýbrž klesá s časem. Její část se spotřebuje na vykonání práce potřebné k překonávání tlumící síly.

Příklad 6 – samozavírací dveře

Dveře mají šířku (resp. vzdálenost od kliky k pantům) $d = 70\,\mathrm{cm}$ a hmotnost $m = 40\,\mathrm{kg}$, držíte-li je otevřené kolmo k jejich původní poloze, musíte za kliku táhnout silou $F_0 = 40\,\mathrm{N}$ kolmo k ploše dveří. Na pantech dveří je připevněné samozavírací zařízení. Tlumící moment tohoto zařízení je úměrný úhlové rychlosti zavírání. Nalezněte konstantu této úměrnosti b tak, aby zavírání dveří bylo rychlé, ale zároveň aby dveře nebouchaly o zárubně.

Řešení

Nejlépe se budou dveře zavírat, bude-li tlumící zařízení zprostředkovávat kritické tlumení. Pohybová rovnice zavírajících se dveří plynoucí z druhé impulsové věty je

$$\frac{1}{3}md^2\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + \frac{2F_0 d}{\pi}\varphi = 0,$$

kde $md^2/3$ je moment setrvačnosti dveří vzhledem k ose procházející panty, $2F_0\varphi d/\pi$ je moment síly způsobující zavírání dveří (člen $2F_0 d/\pi$ se nazývá *direkční moment*). Kritické tlumení nastává, je-li úhlová frekvence netlumených harmonických kmitů stejná jako součinitel tlumení, tj.

$$\omega = \sqrt{\frac{6F_0}{\pi m d}} = \delta = \frac{3b}{2md^2},$$

z čehož pro konstantu úměrnosti b mezi tlumícím momentem a úhlovou rychlostí zavírání dostáváme

$$b = \sqrt{\frac{8F_0 m d^3}{3\pi}} = 22\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}.$$

Příklad 7 – kmitající hustoměr

Jednoduchý hustoměr má formu válcové skleněné trubičky se zataveným a zatíženým spodním koncem. Hustoměr má hmotnost $m = 20\,\mathrm{g}$, vnější průměr trubičky, ze které je vyroben, je $d = 10\,\mathrm{mm}$. Tento hustoměr necháme vertikálně kmitat ve vodě. Z toho, že amplituda výchylky se vždy po jednom překmitnutí zmenší na polovinu, určete koeficient viskózního tlumení b, tj. podíl odporové síly a rychlosti. Kolikrát je perioda tlumených kmitů větší než kmitů netlumených? Určete rovněž periodu tlumených kmitů.

Řešení

Hustoměr vychýlený z rovnovážné polohy je vracen zpět vztlakovou silou

$$ma = F_{\mathrm{vz}} + F_{\mathrm{o}} = \Delta V \varrho g + F_{\mathrm{o}} = -\frac{\pi d^2}{4}\varrho g y + F_{\mathrm{o}},$$

kde ϱ je hustota vody, y je výchylka z rovnovážné polohy, $F_{\mathrm{o}} = -bv$ je odporová síla. Závislost výchylky kmitů na čase je

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\varOmega t + \alpha),$$

kde A a α jsou konstanty plynoucí z počátečních podmínek, $\delta = b/2m$ je součinitel tlumení, $\varOmega = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ je vlastní úhlová frekvence, kde $\omega^2 = \pi d^2 \varrho g/4m$ je úhlová frekvence harmonických kmitů. Logaritmus podílu dvou následujících amplitud u tlumeného kmitavého pohybu (logaritmický dekrement útlumu) je

$$\ln 2 = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\varOmega} = \frac{2\pi b}{\sqrt{\pi d^2 \varrho m g - b^2}},$$

z čehož vyjádříme koeficient tlumení

$$b = d\sqrt{\varrho m g}\sqrt{\frac{\pi}{1 + \left(\frac{2\pi}{\ln 2}\right)^2}} \approx 0{,}194\, d\sqrt{\varrho m g} = 0{,}027\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}.$$

Podíl periody tlumených a netlumených kmitů je

$$\frac{T_{\mathrm{t}}}{T_n} = \frac{\omega}{\varOmega} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\delta/\omega)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^2} = 1{,}054.$$

Vidíme tedy, že i při poměrně velkém tlumení se perioda kmitů změní velmi málo (o 5,4 %). Perioda tlumených kmitů je

$$T_{\mathrm{t}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - (\delta/\omega)^2}}\sqrt{\frac{4m}{\pi d^2 \varrho g}} = 1{,}0\,\mathrm{s}.$$

3 Balistika

Balistika je obor mechaniky, který se zabývá šikmým vrhem těles na povrchu Země při uvážení odporu vzduchu. Obor založil významný matematik a fyzik L. Euler (1707–1783), původně vojenský inženýr. Zabýval se pohybem střel ve vzduchu a vyřešil základní problém balistiky – *balistickou křivku* – pro případ odporové síly přímo úměrné druhé mocnině rychlosti.

Ve vojenství se balistika člení na vnitřní a vnější. *Vnitřní balistika* se zabývá zrychleným pohybem střel uvnitř hlavně zbraně za působení explodující prachové nálože. *Vnější balistika* řeší pohyb střel po opuštění hlavně. Fyzikální stránkou tohoto druhého problému se budeme zabývat.

Řešení pohybu střely, zejména přihlédneme-li k její rotaci, je mimořádně složitý problém mechaniky. Je nutné si uvědomit, že počáteční rychlost střely zpravidla několikanásobně překračuje rychlost zvuku a odporová síla je složitou funkční závislostí rychlostí (viz [19]). My provedeme jen zjednodušené grafické řešení pohybové rovnice hmotného bodu (nerotující střely), avšak při uvážení rázových sil. Eulerovo řešení problému provedeme numericky.

3.1 Pohybové rovnice, hodograf pohybu

Nebudeme-li uvažovat rotaci tělesa (střely), půjde o rovinnou úlohu. Pohybové rovnice můžeme psát buď v kartézském tvaru anebo lépe v přirozených Eulerových souřadnicích (viz článek 1.2), tj. po dosazení za zrychlení ve tvaru

$$m\dot{v} = F_\tau, \qquad m\frac{v^2}{r} = F_\mathrm{n}. \tag{17}$$

Pro velikost tečné a normálové složky výslednice sil při uvážení odporové síly $\boldsymbol{F}$ podle Newtonova vzorce (12) v [19], kde ovšem $C = C_v$ je součinitel odporu závislý na rychlosti (viz obr. 19 v [19]), dostáváme

$$F_\tau = -\left(mg\sin\alpha + \frac{1}{2}C_v\varrho S v^2\right), \tag{18}$$

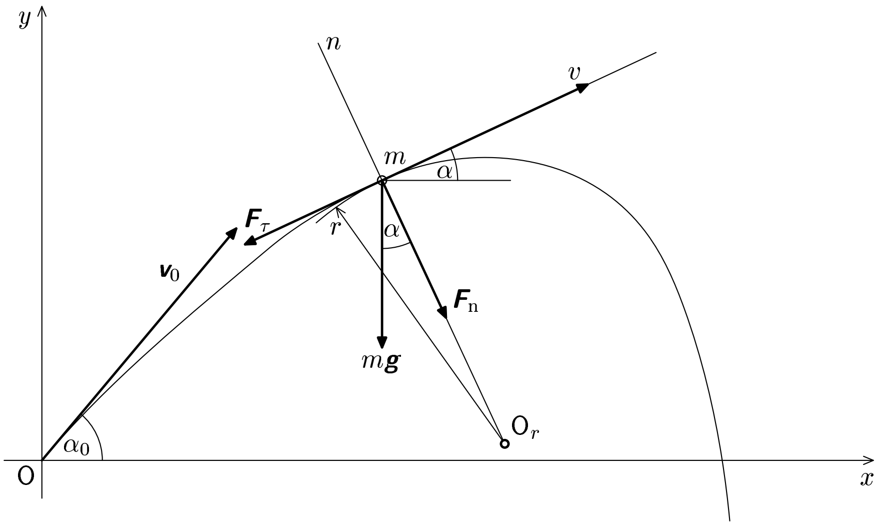
$$F_\mathrm{n} = -mg\cos\alpha, \tag{19}$$

kde α je okamžitý úhel, který svírá rychlost $\boldsymbol{v}$ s vodorovnou rovinou (obr. 9).

Vyšetřme nejprve, jaký je v určité poloze okamžitý poloměr r křivosti balistické křivky a jakou úhlovou rychlostí se mění směr okamžité rychlosti. Z druhého výrazu (17) po dosazení z (19) dostaneme

$$r = -\frac{v^2}{g\cos\alpha} \tag{20}$$

Poloměr křivosti je třeba chápat jako souřadnici středu křivosti O_r na ose n s okamžitým počátkem v těžišti tělesa m; z toho pak plyne význam záporného znaménka poloměru.



Obr. 9. Těleso při šikmém vrhu v odporujícím prostředí – k odvození balistické křivky

Označíme-li ω_α okamžitou úhlovou rychlost otáčení vektoru $\boldsymbol{v}$, je zřejmé, že platí $v = r\omega_\alpha$. Odtud pak

$$\omega_\alpha = -\frac{g\cos\alpha}{v}. \tag{21}$$

Záporné znaménko v tomto výrazu naznačuje, že orientace úhlové rychlosti je taková, že zmenšuje úhel α. Úhlová rychlost změny směru je nejmenší na počátku dráhy (při ústí hlavně), kde je největší $\boldsymbol{v}$, a největší v bodě mezi vrcholem dráhy (tj. bodem, kde $\cos\alpha = 1$) a bodem nejmenší rychlosti $\boldsymbol{v}$. Bodu, v němž je ω_α největší, se vzhledem ke stabilitě střely říká *kritický*.

Časový průběh rychlosti obecně křivočarého pohybu se v mechanice přehledně vyznačuje tzv. *hodografem pohybu*. Pro sestrojení hodografu pro balistickou křivku si zvolíme pevný bod P, tzv. pól hodografu, do kterého přemístíme vektory rychlosti pro všechny uvažované okamžiky. Spojnicí koncových bodů těchto vektorů je hledaný hodograf daného pohybu.

Při konstrukci (sledujte obr. 10) hodografu vycházíme z vektoru počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ a elevačního úhlu α_0. Velikost rychlosti se za malý časový interval Δt změní o hodnotu danou rovnicí (17), do níž za zrychlení dosadíme $\Delta v/\Delta t$

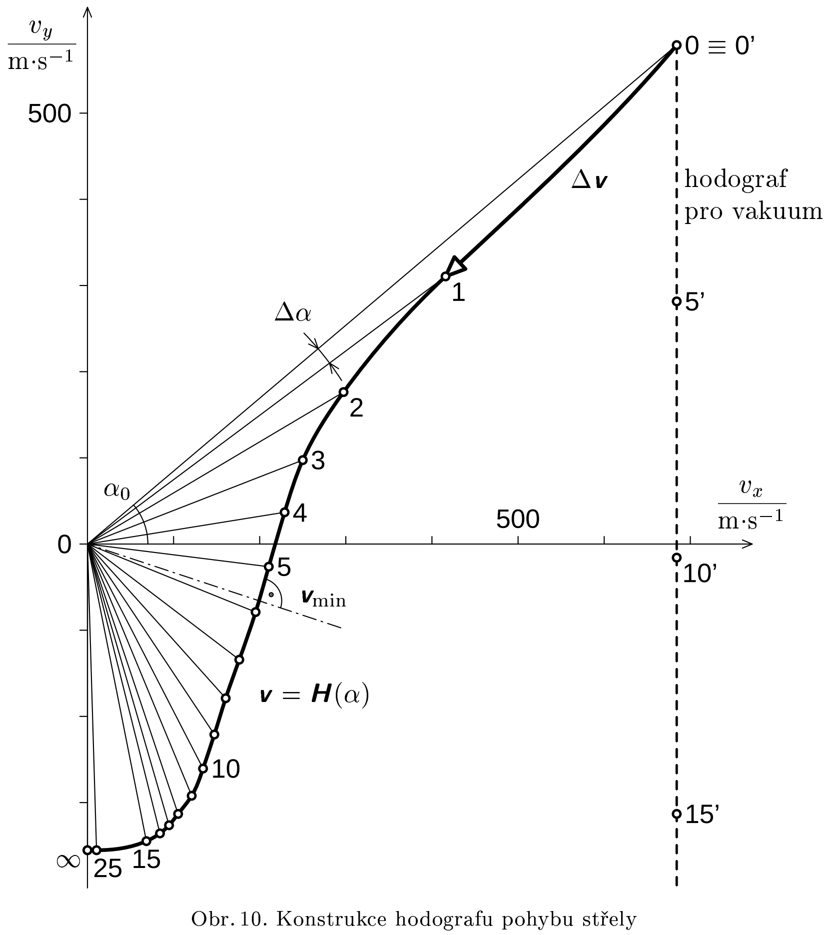
a za sílu výraz (18), tj.

$$\Delta v \approx \frac{F_\tau}{m}\Delta t = -\left(g\sin\alpha + C_v\frac{\varrho v^2}{2m}S\right)\Delta t.$$

Směr rychlosti se podle (21) změní o

$$\Delta\alpha \approx \omega_\alpha \Delta t = -\frac{g\cos\alpha}{v}\Delta t.$$

Hodograf budeme sestrojovat jako funkci $v = H(\alpha)$. Zvolíme si vhodný časový interval, pro který budeme počítat hodnoty veličin Δv a $\Delta\alpha$ a vynášet



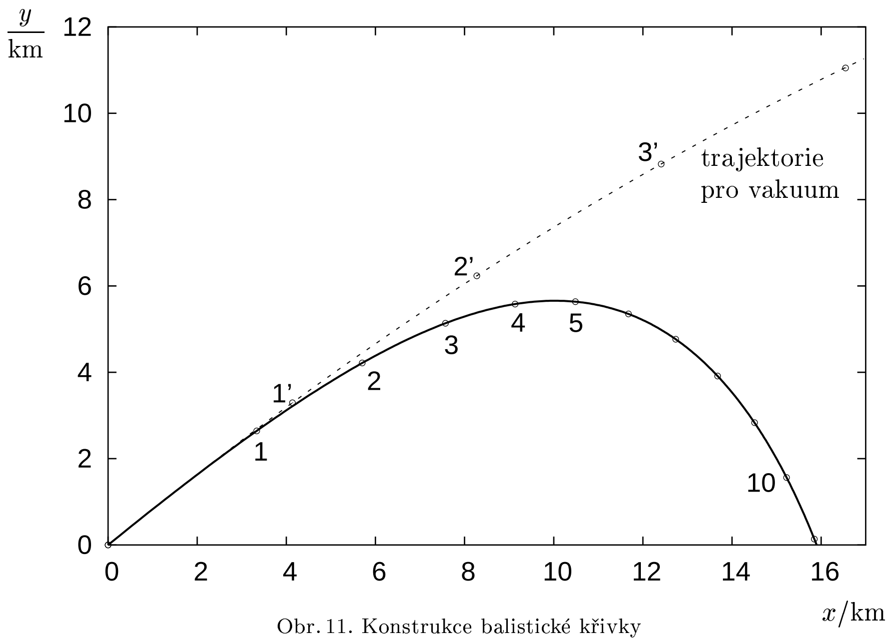
Obr. 10. Konstrukce hodografu pohybu střely

je do hodografu. Výpočet a konstrukce hodografu bude tím přesnější, čím bude Δt menší. Koeficient C_v určujeme podle křivky 2 grafu na obr. 19 v [19], pro okamžitou rychlost v daném bodě hodografu.

Na obr. 10 je znázorněn hodograf pohybu pro střelu o hmostnosti $m = 30{,}0\,\mathrm{kg}$, ráže $d = 100\,\mathrm{mm}$, $v_0 = 900\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\alpha_0 = 40{,}0°$, Δt je voleno $6{,}00\,\mathrm{s}$. Čísla bodů na křivce značí čísla výpočtových intervalů. Z hodografu pohybu je vidět, že bod dráhy, ve kterém bude minimální rychlost, je až za vrcholem dráhy ($\alpha < 0$). Pro velké hodnoty času je $\alpha \approx -90°$ a střela by padala konstatntní mezní rychlostí svisle dolů. Pro srovnání je v obr. 10 čárkovaně vyznačen hodograf pohybu pro případ bez působení odporu vzduchu. Je to svislá polopřímka. Příslušná idealizovaná balistická křivka se v tomto případě redukuje na parabolu.

3.2 Balistická křivka

Balistická křivka je závislost výšky střely na vodorovné vzdálenosti od místa výstřelu. Konstruuje se přímo z hodografu pohybu, kdy do grafu (roviny (x, y)) postupně vynášíme v příslušném směru střední rychlost v daném časovém intervalu vynásobenou zvoleným Δt.



Obr. 11. Konstrukce balistické křivky

Na obr. 11 je vynesena balistická křivka pro pohyb střely popsaný v předešlé kapitole, přičemž čísla bodů opět odpovídají číslům výpočtových intervalů. Dostřel vychází 15,9 km, doba letu 64,1 s. Pro srovnání je zde čárkovaně nakreslena část paraboly pro vakuum, u níž by byl dolet 81,2 km.

V této kapitole byly dány jen velmi stručné základy balistiky. Při střelbách na velké vzdálenosti ovlivňuje pohyb střely řada dalších faktorů jako vliv rotace Země (Coriolisovo zrychlení), vliv proměnnosti tíhového zrychlení s výškou, vliv zakřivení Země, vliv změny hustoty vzduchu s výškou a v neposlední řadě vliv vlastní rotace střely. Např. vlivem změny hustoty vzduchu nabývá odpor vzduchu ve výšce 1, 5, 10 a 50 km přibližně 0,907, 0,600, 0,336, 0,0007 své hodnoty pro nulovou výšku.

Podrobnější informace o balistice lze najít ve specializované literatuře, např. [9], [13].

3.3 Eulerovo řešení balistického problému

Řešením balistického problému se zabýval již roku 1753 L. Euler (viz např. [15], str. 142–150). Předpokládal, že na vržené těleso působí vedle konstantí tíhové síly odporová síla úměrná druhé mocnině rychlosti, tj. (viz např. [19])

$$\boldsymbol{F} = -\frac{1}{2}C\varrho S v^2 \boldsymbol{v}^0 = -mg\frac{v^2}{k^2}\boldsymbol{v}^0,$$

kde koeficient k o rozměru rychlosti má velikost

$$k = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho S}}.$$

Pohybová rovnice nerotujícího tělesa při jeho vrhu v homogenním gravitačním poli má při působení odporové síly $\boldsymbol{F}$ kartézské složky

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha, \qquad m\ddot{y} = F\sin\alpha - mg,$$

kde α je úhel, který svírá okamžitá rychlost (resp. tečna k balistické křivce) s osou x. Vyjádříme-li trigonometrické funkce úhlu α pomocí elementu ds balistické křivky a jeho složek, tj.

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

a dosadíme-li za sílu F, budou mít pohybové rovnice tvar

$$\ddot{x} = -g\,\frac{v^2}{k^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},$$
$$\ddot{y} = -g\left(\frac{v^2}{k^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - 1\right).$$

Počáteční podmínky volíme takto: pro $t = 0$ je $x = y = 0$, $\dot{x} = v_0 \cos \alpha_0$, $\dot{y} = v_0 \cos \alpha_0$, kde α_0 je elevační úhel.

Integrace těchto rovnic není jednoduchá (v [15] je popsána na 8 stranách) a přesahuje rámec našeho textu. Uvedeme zde proto jen výsledek řešení pro speciální případ, kdy úhel α je velmi malý a oblouk s se nahradí délkou x. Pak je balistické křivka popsána rovnicí ([15], str. 148)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{k^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \left[x - \frac{k^2}{2g} \left(\mathrm{e}^{\frac{2g}{k^2} x} - 1 \right) \right].$$

Pro zanedbatelný odpor vzduchu bude $k^2 \to \infty$ a balistické křivka přejde na parabolu

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \, x^2.$$

Příslušné odvození využívající rozvoje exponenciály v řadu lze opět najít v [15].

3.4 Numerické řešení balistického problému

Soustavu diferenciálních rovnic popisujících pohyb střely v odporujícím prostředí s odporem úměrným v^2, kterou analyticky řešíme s obtížemi, můžeme vyřešit numericky. Následuje výpis jednoduchého zdrojového textu programu *Famulus* a na obr. 12 grafy balistických křivek pro různé elevační úhly z jeho výstupu. Maximální dolet pro střelu daných parametrů je pro úhel 32,5°, zatímco pro neodporující prostředí je to pro 45° nezávisle na parametrech tělesa.

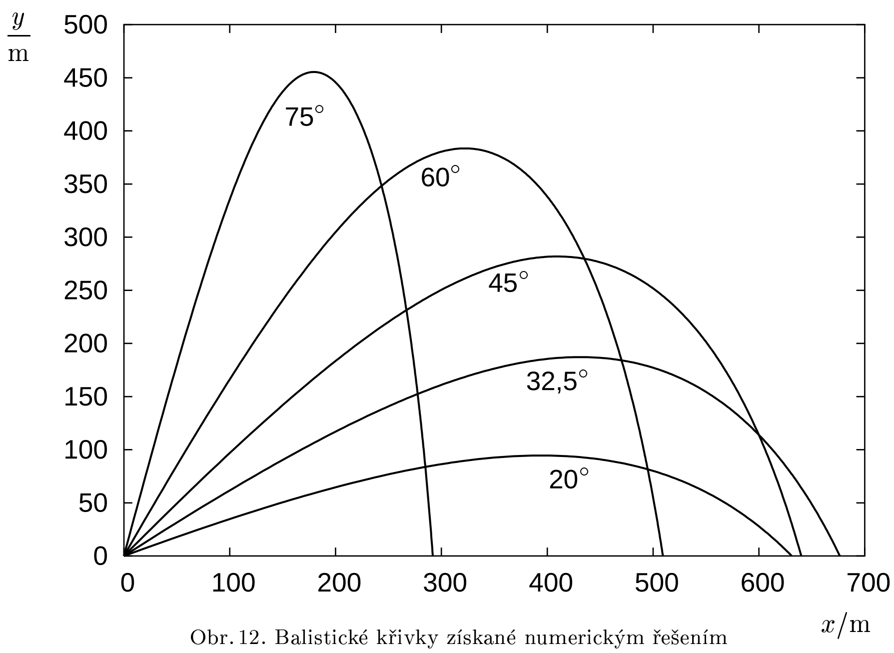
```
! nastavení počátečních hodnot (v~základních jednotkách SI)
t = 0; y = 0; x = 0    ! počáteční hodnoty polohy a času
dt = 0.001             ! časový krok (určuje přesnost výpočtu)
v0 = 200               ! počáteční rychlost
uhel_hodu = 32.54      ! elevační úhel ve stupních

! parametry určující odpor prostředí
R = 0.04               ! poloměr střely
m = 2.5                ! hmotnost střely
ro = 1.3               ! hustota vzduchu
C = 0.48               ! koeficient odporu
g = 9.81               ! tíhové zrychlení

alfa = uhel_hodu/180*pi
vx = v0*cos(alfa)
vy = v0*sin(alfa)
```

```
S~= 4*pi*R^2
k~= C*ro/2*S

v~= sqrt(vx^2+vy^2)   ! velikost rychlosti
Fy = -g*m - k*v*vy    ! svislá složka síly
Fx = -k*v*vx          ! vodorovná složka síly
ax = Fx/m;        ay = Fy/m
vx = vx + ax*dt;  vy = vy + ay*dt
x = x + vx*dt;    y = y + vy*dt
t = t + dt
IF y<0 THEN STOP END  ! skonči při dopadu
```



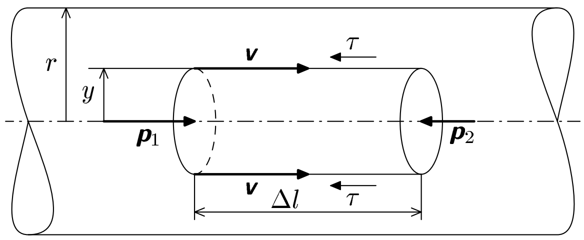
Obr. 12. Balistické křivky získané numerickým řešením

4 Proudění vazké tekutiny

Vnitřní tření významně ovlivňuje proudění reálných tekutin. V případě vazkého tření v nestlačitelné kapalině problém proudění popisuje *Navier-Stokesova pohybová rovnice.* Ve složkovém tvaru jde o soustavu tří parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Jejich řešení v analytickém tvaru je velmi obtížné a je známo jen pro několik málo speciálních případů (viz např. [4]). Pro konkrétní technické problémy, např. v aerodynamice letadel, se řešení provádí numericky.

4.1 Laminární proudění vazké tekutiny válcovou trubicí

Laminární ustálené proudění vazké tekutiny válcovou trubicí kruhového průřezu lze řešit přímo užitím Newtonova zákona o tečném napětí v proudící tekutině (viz [19], vztah 10). Úkolem bude vypočítat rozložení rychlosti tekutiny v příčném řezu, tj. rychlostní profil.



Obr. 13. K odvození rychlostního profilu tekutiny při průtoku trubicí

Protože uvažovaný problém je válcově symetrický, vytkneme v trubici souosý válec o délce Δl a poloměru $y > 0$ (obr. 13), na jehož plášti má tekutina rychlost $\boldsymbol{v}$. K protlačení tekutiny tímto válcem na ni musí působit výsledná tlaková síla (rovná odporové síle) o velikosti

$$F = \pi y^2 (p_1 - p_2) = \pi y^2 \Delta p,$$

kde Δp je tlakový rozdíl na koncích válce. Proti tlakové síle působí na plášti válce odporová síla vnitřního tření

$$F' = -\tau \Delta S = -\tau 2\pi y \Delta l.$$

Dosadíme sem za tečné napětí τ ze zákona pro proudění Newtonovské tekutiny, dostaneme

$$F' = -2\pi\eta y \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \Delta l.$$

Při ustáleném proudění musí být obě síly v rovnováze ($F = -F'$). Po dosazení dostaneme diferenciální rovnici, v níž můžeme separovat proměnné a integrovat*)

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = -\frac{\Delta p}{2\eta \Delta l} \int_0^y y \, \mathrm{d}y .$$

Integrací dostaneme

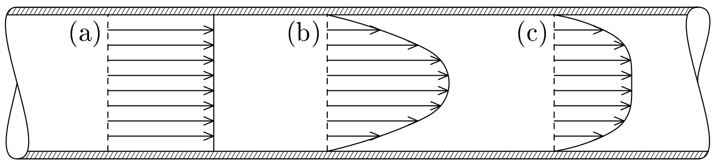
$$v - v_0 = -\frac{\Delta p}{4\eta \Delta l} y^2 .$$

Z idealizované okrajové podmínky, že na stěně trubice je rychlost tekutiny nulová, $v(r) = 0$, dostáváme

$$v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta \Delta l} r^2 , \qquad v = \frac{\Delta p}{4\eta \Delta l} \left(r^2 - y^2 \right) , \tag{22}$$

kde v_0 je rychlost tekutiny na ose trubice ($y = 0$).

Protože y měříme od osy trubice, tvoří koncové body vektorů $\boldsymbol{v}$ plášť rotačního paraboloidu. Pro srovnání jsou na obr. 14 znázorněny rychlostní profily pro ideální a vazkou tekutinu. V případě laminárního proudění vazké tekutiny je rychlostní profil parabolický. Přejde-li proudění na turbulentní, pak se rychlost (v okolí určité vzdálenosti od osy trubice) v důsledku turbulence tekutiny „zrovnoměrní“, s výjimkou tenké vrstvy u stěny.



Obr. 14. Rychlostní profily tekutiny v trubici za různých podmínek – (a) ideální tekutina, (b) vazká tekutina při laminárním proudění, (c) vazká tekutina při turbulentním proudění

Ze známého rozložení rychlosti (22) můžeme vypočítat objemový tok Q_V uvažovanou trubicí. Elementární tok plochou elementárního mezikruží o poloměru y a výšce $\mathrm{d}y$ je

$$\mathrm{d}Q_V = 2\pi y v \, \mathrm{d}y = \frac{\pi \Delta p}{2\eta \Delta l} \left(r^2 - y^2 \right) y \, \mathrm{d}y .$$

*) Integraci lze provést rovněž neurčitým integrálem a integrační konstantu C stanovit z okrajové podmínky, že pro $y = r$ je $v = 0$.

Integrací přes celý příčný průřez trubice dostaneme

$$Q_V = \frac{\pi \Delta p}{2\eta \Delta l} \int_0^r \left(r^2 - y^2\right) y \, \mathrm{d}y = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l}. \tag{23}$$

Tento výsledek vyjadřuje *Hagenův-Poiseuilleův* zákon. Podle něj je objemový tok viskózní tekutiny při laminárním proudění trubicí kruhového průřezu přímo úměrný čtvrté mocnině poloměru trubice, nepřímo úměrný dynamické viskozitě a přímo úměrný tlakovému gradientu $\Delta p / \Delta l$. Vztah (23) na základě experimentů sestavili v roce 1841 francouzský lékař Poiseuille a nezávisle na něm roku 1839 berlínský stavební rada Hagen. Vztah (23) může být východiskem úvah např. o problémech s tlakem krve u starších osob, jimž se zužují (zarůstají) cévy. K dosažení určitého průtoku krve je pak zapotřebí mnohem vyššího tlaku. Problém v použití vztahu (23) je však v tom, že krev je nenewtonovská kapalina a cévy mají proměnný poloměr.

4.2 Ztrátová výška v Bernoulliho rovnici

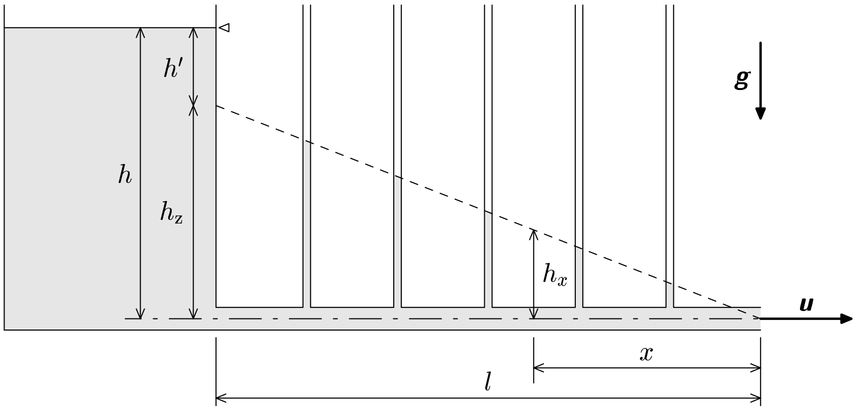
Ze vztahu (23) je zřejmé, že k tomu, abychom při laminárním proudění reálné tekutiny protlačili určitou trubicí objemový tok Q_V, je zapotřebí vytvořit mezi konci trubice tlakový rozdíl Δp k překonání průtokových odporů. O tom bychom se mohli přesvědčit experimentem, při kterém bychom sledovali výtok kapaliny z nádoby vodorovnou trubicí o délce l, kterou bychom připojili k nádobě v hloubce h pod hladinou (obr. 15). K vodorovné trubici jsou připojeny svislé tlakoměrné trubice. Zjistili bychom, že na kinetickou energii by se nemohla přeměnit celá tlaková energie úměrná výšce h, nýbrž jen její část úměrná výšce h'. Druhá část, úměrná výšce $h_\mathrm{z} = h - h'$, se spotřebuje na překonávání odporových sil vnitřního tření v trubici. Výtoková rychlost tedy nebude $v = \sqrt{2gh}$, ale jen $u = \sqrt{2gh'}$. Výška h_z se označuje jako *ztrátová výška.*

Pro pohyb nestlačitelné reálné tekutiny tedy neplatí Bernoulliho rovnice v běžně uváděném tvaru, v němž je součet rychlostní, geodetické a tlakové výšky konstantní, nýbrž v obecnějším tvaru

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\varrho g} + h_\mathrm{z} = \text{konst.}$$

kde h_z je ztrátová výška v uvažovaném bodě nestlačitelné kapaliny.

Ztrátová výška h_x při výtoku trubicí o konstantním průřezu, měřená ve vzdálenosti x od vyústění trubice (obr. 15), je úměrná délce x úseku trubice: $h_x = k_\mathrm{z} x$, kde k_z je *ztrátový koeficient* závislý na poloměru trubice, na rychlosti tekutiny a její kinematické viskozitě (viz následující příklad).



Obr. 15. Výtok kapaliny z nádoby vodorovnou trubicí – sledování ztrátové výšky při výtoku

Příklad 8 – výpočet ztrátové výšky

a) Vypočtěte ztrátovou výšku h_z a h_x a ztrátový koeficient k_z pro soustavu na obr. 15. Je dán poloměr trubice r, její délka l, výtoková rychlost u (jako střední výtoková rychlost všech částic kapaliny) a kinematická viskozita ν kapaliny.

b) Jaká musí být výška h kapaliny v nádobě, aby výtoková rychlost z trubice byla u?

Řešení

a) Nejprve je nutné určit střední hodnotu u výtokové rychlosti. Protože trubice má konstantní příčný průřez, bude u stejné pro každé x. Velikost rychlosti lze určit jednak užitím věty o střední hodnotě, použité na funkci (22), jednak přímo z Hagenova-Poiseuilleova zákona (23). Druhý způsob je jednodušší, neboť pro objemový tok musí platit jednak vztah

$$Q_V = Su = \pi r^2 u,$$

jednak vztah (23). Porovnáním obou dostaneme

$$u = \frac{r^2}{8\eta}\frac{\Delta p}{\Delta l}. \tag{24}$$

Protože trubice má konstantní příčný průřez můžeme tlakový gradient vyjádřit vztahem

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{p_x}{x} = \frac{p_z}{l} = \text{konst},$$

kde p_x je tlak potřebný k tomu, aby kapalina protékala rychlostí u úsekem o délce x (a tím i celou trubicí) a p_z je rozdíl tlaků mezi konci trubice (označuje se jako tlaková ztráta). Dosadíme-li tento vztah do výrazu (24), dostaneme

$$p_z = \frac{8\eta u}{r^2} l, \quad p_x = \frac{8\eta u}{r^2} x.$$

Příslušné ztrátové výšky jsou

$$h_\mathrm{z} = \frac{p_z}{\varrho g} = \frac{8\eta u}{\varrho g r^2}\, l = \frac{8\nu u}{g r^2}\, l, \qquad h_x = \frac{p_x}{\varrho g} = \frac{8\nu u}{g r^2}\, x = k_\mathrm{z} x,$$

kde

$$k_\mathrm{z} = \frac{8\nu u}{g r^2}$$

je ztrátový koeficient, který má význam ztrátové výšky připadající na jednotkovou délku trubice a $\nu = \eta/\varrho$ je kinematická viskozita.

b) Z Torricelliho vztahu pro rychlost u určíme rychlostní výšku h':

$$h' = \frac{u^2}{2g}.$$

Potřebná výška hladiny v nádobě tedy je

$$h = h' + h_\mathrm{z} = \frac{u^2}{2g}\left(1 + \frac{16\nu l}{u r^2}\right).$$

5 Úlohy

5.1 Zadání úloh

Úloha 1 – lokomotiva

Lokomotiva o hmotnosti m má na vodorovné trati v určitém okamžiku $t = 0$ rychlost $v(0) = v_0$. V tomto okamžiku vypne motory a bude na ni působit jen jízdní odpor, popsaný funkcí $F = -(k_1 + k_2 v)$, kde k_1, k_2 jsou kladné konstanty. Vypočtěte, za jakou dobu se lokomotiva zastaví.

Úloha 2 – střela

Jaký je rozdíl mezi dobou letu střely 76-milimetrového kanónu při střelbě na cíl ve vzdálenosti L od ústí hlavně kanónu se zřetelem na odpor vzduchu, a dobou letu bez zřetele k odporu vzduchu. Dráhu předpokládejte přímočarou, vodorovnou. Předpokládejte, že odpor vzduchu je dán funkcí $F = -kv^2$. Je dáno $m = 8{,}50\,\mathrm{kg}$, $L = 1000\,\mathrm{m}$, $v_0 = 900\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $k = 1{,}70 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s^2}$.

Úloha 3 – parašutista

Parašutista o hmotnosti m padá z výšky H za působení síly odporu vzduchu $F = -kmv^2$, $k > 0$. Vypočtěte, jakou rychlostí dopadne na zem, je-li počáteční rychlost nulová.

Úloha 4 – motocykl

Motocykl o hmotnosti m má na přímé vodorovné silnici rychlost v_0. Jak daleko dojede po vypnutí motoru a za jak dlouho zastaví, má-li celkový jízdní odpor velikost $F = -kv^{3/2}$.

Úloha 5 – moment hybnosti

Na částici o hmotnosti m působí centrální síla $\boldsymbol{F}_1 = F(r)\,\boldsymbol{r}^0$ a odporová síla $\boldsymbol{F}_2 = -b\boldsymbol{v}$, kde b je kladná konstanta. Počáteční moment hybnosti vzhledem k bodu $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ je $\boldsymbol{L}_0$. Najděte závislost momentu hybnosti na čase.

Úloha 6 – člun

Volně jedoucí (nepoháněný) člun je zpomalován třecí silou $F(v)$. Jeho rychlost klesá podle vztahu $v = c^2\,(t - t_1)^2$, kde c je konstanta příslušných jednotek a t_1 je čas, ve kterém se člun zastaví. Nalezněte závislost odporové síly na rychlosti.

Úloha 7 – plachetnice

Jak velká odporová síla působí na plachetnici o hmotnosti $m = 2000\,\mathrm{kg}$ po tom, co svine plachty, jestliže v té době pluje rychlostí $v_0 = 5{,}00\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$?

Předpokládejte, že odpor prostředí je úměrný rychlosti a že plachetnice dopluje ještě do vzdálenosti $s = 500\,\mathrm{m}$.

Úloha 8 – míček

Míček je vržen svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0. Předpokládejte, že odpor vzduchu je úměrný druhé mocnině rychlosti. Označíme-li v_u ustálenou rychlost pádu míčku, dokažte, že rychlost v, kterou se míček vrátí, je dána vztahem $v^{-2} = v_\mathrm{u}^{-2} + v_0^{-2}$.

Úloha 9 – proudění kapaliny mezi deskami

Představte si dvě teoreticky nekonečně rozlehlé rovnoběžné desky (jedna je umístěna v rovině $z = 0$ a druhá v rovině $z = 2D$). Mezi těmito deskami ve směru osy x teče kapalina o dynamické viskozitě η, přičemž ve směru osy x je konstantní tlakový gradient $\Delta p/\Delta x = k$. Určete závislost rychlosti tekoucí kapaliny na vzdálenosti r od roviny symetrie desek.

Úloha 10 – vynořující se kulička

Dřevěnou kuličku o poloměru $r = 20\,\mathrm{mm}$ a hustotě $\varrho_\mathrm{k} = 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ jsme ponořili do vody do hloubky $h_0 = 2{,}0\,\mathrm{m}$ a z klidu pustili. Za jak dlouho se kulička vynoří na hladinu

a) zanedbáme-li odpor vody,
b) předpokládáme-li, že odpor vody je úměrný čtverci rychlosti.

Při výpočtu neuvažujte jevy vznikající, když je kulička ponořena jen z části.

Úloha 11 – váhy

Tři po sobě následující výchylky ručičky vah byly $m_1 = 10\,\mathrm{g}$, $m_2 = 7{,}5\,\mathrm{g}$ a $m_3 = 9{,}1\,\mathrm{g}$. Za předpokladu, že na ručičku působí síla úměrná výchylce, která ji vrací do rovnovážné polohy, a odporová síla je úměrná rychlosti, určete jaká je skutečná hmotnost. Získané řešení porovnejte s řešením za zjednodušujícího předpokladu, že výchylka ručičky se bude zmenšovat lineárně (běžně užívaný způsob).

Úloha 12 – matematické kyvadlo v oleji

Matematické kyvadlo délky $l = 0{,}50\,\mathrm{m}$ je ponořeno do ricinového oleje, jehož dynamická viskozita je $\eta = 0{,}99\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$, hmotnost kuličky na kyvadle je $m = 10\,\mathrm{g}$ a její poloměr $r = 3{,}0\,\mathrm{mm}$. Kyvadlo vychýlíme o úhel 3° a pustíme. Popište pohyb kyvadla za předpokladu, že odporová síla bude dána Stokesovým vztahem.

Úloha 13 – kyvadlo ztrácející energii kyvů

Určete logaritmický dekrement útlumu λ kyvadla délky $l = 50\,\mathrm{cm}$, které za $t = 8{,}0\,\mathrm{min}$ kývání ztratí $75\,\%$ své mechanické energie.

Úloha 14 – kapička vody v mraku

a) Vypočtěte, jaká musí být vzestupná vertikální rychlost v vzduchu v mraku, aby se v něm udržela kapička vody tvaru koule o poloměru $r = 10{,}0\,\mu$m a zůstala relativně v klidu v soustavě spojené se Zemí. Tuto soustavu považujte za inerciální.

b) Kapička vody dotykem s jinými kapičkami zvětší svůj poloměr na dvojnásobek své původní velikosti $r' = 2r$ a začne padat ve formě kapičky mrholení. Předpokládejte, že vzestupná rychlost vzduchu, vypočtená v bodě a), se nezmění. Vypočtěte rychlost v'_k kapičky mrholení ve velké vzdálenosti od mraku, kde budeme předpokládat, že rychlost vzduchu je v uvažované vztažné soustavě spojené se Zemí nulová. Hustota vody je $\varrho = 1{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, dynamická viskozita vzduchu $\eta = 1{,}71 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$, hustota vzduchu se vzhledem k hustotě vody zanedbává. Předpokládejte, že jsou splněny podmínky pro užití Stokesova vztahu pro odporovou sílu.

Poznámka: Literatura o meteorologii uvádí, že pro kapky o poloměru $r > 20\,\mu$m se Stokesův vztah již neosvědčuje, užívá se vztah empirický.

Úloha 15 – záměna jehly u injekční stříkačky

Injekční stříkačkou s jehlou o průměru otvoru $d_1 = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ vystříkneme $Q_{V,1} = 5{,}0\,\mathrm{ml}$ roztoku za sekundu. Jaký bude objemový tok $Q_{V,2}$ roztoku, zaměníme-li jehlu s jinou stejné délky, ovšem o průměru otvoru $d_2 = 0{,}80\,\mathrm{mm}$ a budeme-li působit na píst stříkačky stejnou silou?

5.2 Řešení úloh

1. $t = \dfrac{m}{k_2} \ln \left(1 + \dfrac{k_2 v_0}{k_1}\right)$.

2. Rychlost střely je $v = m v_0 / \left(k v_0 t + m\right)$, doba jejího letu je

$$t = \frac{m}{k v_0}\left(\mathrm{e}^{kL/m} - 1\right) = 1{,}23\,\mathrm{s}.$$

Při zanedbání odporu je $t' = L/v = 1{,}11\,\mathrm{s}$ a diference dob $\Delta t = t - t' = 0{,}12\,\mathrm{s}$.

3. $v = \sqrt{\dfrac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2kH}\right)}$.

4. Rychlost $v = \left(1/\sqrt{v_0} + kt/2m\right)^{-2}$ bude nulová pro $t \to \infty$. Za této podmínky bude délka dojezdu $x_0 = (2m/k)\sqrt{v_0}$.

5. Moment síly působící na částici je

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{r} \times (b\boldsymbol{v}) = -\frac{b}{m}\boldsymbol{L},$$

z čehož pro moment hybnosti máme

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 \mathrm{e}^{-bt/m}.$$

6. Síla působící na člun je

$$F = m\frac{dv}{dt} = -2mc^2\,(t_1 - t) = -2mc\sqrt{v}.$$

7. Pohybová rovnice pro plachetnici je $m\dot{v} = -kv$. Podle výsledků příkladu 3 je brzdná dráha $x = mv_0/k$, z čehož dostáváme velikost počáteční odporové síly $F_0 = mv_0^2/x = 100\,\mathrm{N}$.

8. Vztah přímo ověříme s použitím výsledků příkladu 1.

9. Umístěme si mezi deskami myšlený kvádr s rozměry Δx, Δy, $2r$. Jeho stěny $\Delta x \times \Delta y$ jsou rovnoběžné s deskami. Na tento kvádr působí síla tlakového gradientu a odporová síla. Z rovnováhy těchto sil dostáváme $v = k\left(D^2 - r^2\right)/2\eta$.

10. a) $t = \sqrt{\dfrac{2h_0\,\varrho_\mathrm{k}}{(\varrho_v - \varrho_\mathrm{k})\,g}} = 1{,}3\,\mathrm{s}.$

b) Použijeme výsledku úlohy 5 s parašutistou. Tamní konstanty jsou zde $g \sim (\varrho_v/\varrho_\mathrm{k} - 1)\,g$, $k \sim 3C\varrho_\mathrm{v}/8r\varrho_k$ a $v_0 = 0$. Ze vztahu pro dráhu vyjádříme čas a po dosazení dostaneme

$$t = -\frac{1}{\sqrt{kg}}\ln\left(e^{kh_0} - \sqrt{e^{2kh_0} - 1}\right) \approx \frac{kh_0 + \ln 2}{\sqrt{kg}} = 4{,}4\,\mathrm{s},$$

kde prostřední přibližná rovnost platí díky tomu, že $e^{kh_0} \gg 1$.

11. Přesné řešení je

$$m = \frac{m_1 m_3 - m_2^2}{m_1 + m_3 - 2m_2} = 8{,}48\,\mathrm{g}.$$

Po linearizaci dostaneme

$$m = \frac{m_1 + 2m_2 + m_2}{4} = 8{,}53\,\mathrm{g}.$$

Odchylka je zanedbatelná.

12. Pohybová rovnice kyvadla je

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi + \frac{6\pi r\eta}{ml}\dot{\varphi} = 0.$$

Protože úhlová frekvence harmonických kmitů $\omega = \sqrt{g/l} = 4{,}4\,\mathrm{s}^{-1}$ je menší než součinitel tlumení $\delta = 3\pi r\eta/ml = 5{,}6\,\mathrm{s}^{-1}$ bude kyvadlo konat aperiodický pohyb. Díky nulové počáteční rychlosti se kyvadlo bude pomalu vracet do rovnovážné polohy, ale nikdy jí nedosáhne.

13. Využijeme toho, že mechanická energie je úměrná čtverci amplitudy. Za daný čas tedy amplituda klesne na polovinu. Periodu kyvadla můžeme vzhledem ke slabému tlumení vyjádřit jako $T \approx 2\pi\sqrt{l/g}$ a logaritmický dekrement útlumu je pak

$$\lambda \approx \frac{2\pi \ln 2}{t}\sqrt{\frac{l}{g}} = 0{,}0020.$$

14. a) Vzestupná rychlost vzduchu v mraku musí mít velikost $v = 2\varrho g r^2/9 = 1{,}27 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

b) V mraku bude kapička klesat rychlostí $v'_{\mathrm{k}} = 3v = 3{,}82 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Ve velké vzdálenosti od mraku rychlost kapičky vzroste na $v_{\mathrm{k}} = 4v = 5{,}09 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

15. $Q_{V,2} = Q_{V,1}\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^4 = 2{,}0\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}}$.

Literatura

[1] Adamča, L., Marton, P., Pavlík, M., Trávniček, F.: *Teoretická mechanika.* ALFA, Bratislava 1992.

[2] Barger, V., Olsson, M.: *Classical Mechanics: A Modern Perspektive.* McGraw-Hill, Inc., New York 1995.

[3] Bartsch, H.-J.: *Matematické vzorce.* Mladá fronta, Praha 1996.

[4] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: *Mechanika kontinua.* Academia, Praha 2000.

[5] Bauer, F., Brůha, O., Jaňour, Z: *Základy proudění.* Technický průvodce, svazek 18. Vědecko-technické nakladatelství, Praha 1950.

[6] Hajko, V., et. al.: *Fyzika v príkladoch.* SVTL, Bratislava 1960.

[7] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika.* SNTL, Praha 1976 a 1981.

[8] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: *Technická fyzika.* SNTL, Praha 1960 a 1961.

[9] Molitz, H., Strobel, R.: *Äussere Ballistik.* Springer-Verlag, Berlin 1963.

[10] Noskievič, J., et. al.: *Mechanika tekutin.* SNTL, Praha 1987.

[11] *Ročenky fyzikálního korespondenčního semináře Fykos z let 1994–1999.* Vyd. MFF UK, Praha 1994-1999.

[12] Szabó, I.: *Mechanika tuhých těles a kapalin.* SNTL, Praha 1967.

[13] Šapiro, J. M.: *Vnější balistika, I. – III. díl.* SNTL, Praha 1953.

[14] Šedivý, P.: *Modelování pohybů numerickými metodami.* Knihovnička FO č. 38, MAFY, Hradec Králové 1999.

[15] Trkal, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa.* ČSAV, Praha 1956.

[16] Vybíral, B.: *Kinematika a dynamika tuhého tělesa.* Knihovnička FO č. 31. MAFY, Hradec Králové 1997.

[17] Vybíral, B.: *Balistická křivka.* Fyzika ve škole VI. (1967/68), s. 433–441.

[18] Vybíral, B.: *Základy teoretické mechaniky, 1. až 3. díl.* Gaudeamus, Hradec Králové 1992, 1999.

[19] Vybíral, B., Zdeborová, L.: *Odporové síly.* Knihovnička FO č. 48, MAFY, Hradec Králové 2001.