ZPRACOVÁNÍ DAT FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ

Studijní text pro řešitele FO, studující fyziku na UHK
a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Úvod

Měření má ve fyzice – jako přírodní vědě – zcela zásadní význam. Umožňuje empirickou cestou získat poznatky o vzájemných vztazích mezi fyzikálními veličinami. Jedním z cílů měření je tak dospět k formulaci fyzikálních zákonů. Měřením také naopak ověřujeme platnost fyzikálních zákonů, ke kterým jsme dospěli teoretickou cestou, využívající již ověřených zákonů. Nejčastěji ovšem měříme fyzikální vlastnosti různých objektů (např. hmotnost nebo teplotu tělesa) a vzájemnou souvislost určitých vlastností (např. závislost elektrického odporu na teplotě rezistoru).

Proces fyzikálního měření sestává ze tří pracovních etap:
– *příprava měření*,
– *vlastní měření*,
– *zpracování dat získaných měřením.*

Protože se předložený text zabývá až touto třetí etapou, zmíníme se nejprve krátce o prvních dvou etapách, protože mají rozhodující vliv na výsledky měření, které ve třetí etapě vyhodnocujeme.

1. Úspěch měření podmiňuje jeho **dobrá příprava**. Experimentátor si musí nejprve prostudovat potřebnou teorii zkoumaného jevu, vybrat vhodnou metodu, opatřit si měřicí přístroje s potřebnými rozsahy a předpokládanou přesností (případně si je ocejchovat), dále vhodné vzorky k měření a další pomůcky.

Ve *fyzikální olympiádě* je ze soutěžních důvodů tento postup zpravidla obrácen – je dán experimentální úkol a omezený soubor přístrojů a pomůcek (často neobvyklých). Soutěžící musí vymyslet vhodnou metodu (často zcela netradiční), aby s nabídnutými přístroji a pomůckami dospěl k očekávanému cíli.

Před vlastním měřením je také nutné uvážit, jaké vnější faktory mohou ovlivnit měření (tomu je nutné mj. podřídit např. umístění přístrojů), je potřebné znát i místní laboratorní podmínky – teplotu, tlak, vlhkost, případně rušivé magnetické pole, tepelné, světelné nebo radioaktivní pozadí.

V rámci přípravy je také žádoucí provést teoretický rozbor přesnosti měření a tomu přizpůsobit vlastní měřicí postup a měřicí přístroje. Je rovněž vhodné včas si uvědomit, jakými soustavnými chybami bude měření zatíženo (ať již z důvodů použitých přístrojů nebo metody). Nakonec je také nutné věnovat patřičnou pozornost přípravě měřených vzorků a manipulaci s nimi.

2. Na dobrou přípravu navazuje druhá etapa – **vlastní měření**. Jeho konkrétní průběh závisí na tom, jakou veličinu měříme a jakou použijeme metodu měření. Protože tato etapa není předmětem předloženého textu, odkazuji na speciální literaturu (např. [1], [2]). Zde jen připojuji všeobecná doporučení: před detailním měřením je vhodné „proběhnout“ zhruba celé měření, abychom např. věděli, v jakých rozsazích hodnot veličin budeme měřit, zda nevznikají zřetelné extrémy (rezonanční maxima nebo stavy nulového vyvážení). Tomu je třeba přizpůsobit rozsahy přístrojů a jejich citlivost. Také si pak můžeme připravit vhodné tabulky pro zápis hodnot měřených veličin.

Vlastní měření je proces, ve kterém se slučuje teoretická příprava s dobrou manuální zručností a zkušeností. Má i svou stránku psychologickou a bezpečnostní. Jinými slovy – k měření musíme přistupovat s rozvahou, klidem a vyvarovat se známého „zmatkování". Jinak lze očekávat nejen neúspěch při experimentu, ale i např. zničení přístrojů nebo újmu na zdraví. Schopnost dobrého experimentování získáme jen vhodnou a trpělivou laboratorní prací.

Zjistíme-li při zápisu výsledků měření, že některá hodnota nápadně vybočuje z řady jiných hodnot téže veličiny, může to mít dvě příčiny. Buď jde o hrubou chybu anebo např. o nějaký (třeba i neočekávaný) rezonanční jev. K měření této hodnoty se proto vrátíme a detailně proměříme i okolí měnící se veličiny. Případně pro kontrolu použijeme i jiný přístroj. Jde-li o hrubou chybu při měření (chybné čtení), hodnotu vyloučíme, aby nám po zpracování dat měření zbytečně nezkreslovala výsledek a jeho přesnost. Např. ve fyzikální olympiádě se nehodnotí jen správnost postupu měření a úroveň jeho zpracování, ale i absolutní velikost chyby měření, kterou je zatížen výsledek.

3. Tak se dostáváme ke třetí etapě – **zpracování dat měření**, která je naším cílem. Tato etapa se bohužel velmi často podceňuje, což znehodnocuje celý proces fyzikálního měření.

Jelikož v případě (náhodných) chyb měření jde o náhodné veličiny, bude vhodné – před vlastními postupy zpracování dat měření – stručně uvést základní poznatky o teorii náhodných chyb, jak je zpracovala matematická statistika. Pochopení základních pojmů matematické teorie náhodných chyb je užitečné, i když není nezbytné pro úspěšné uskutečňování praktických postupů zpracování dat fyzikálních měření. Hodnocení přesnosti měřené veličiny je popsáno ve 3. kapitole a veličiny vypočtené z naměřených veličin, na nichž je funkčně závislá, je předmětem kapitoly 4. Pátá kapitola je věnována metodám grafické analýzy, jejichž dobrá znalost se u řešitelů fyzikální olympiády (zejména mezinárodní) předpokládá. Moderním metodám regresní analýzy je věnována kapitola 6. U všech dříve velmi pracných postupů numerického vyhodnocování lze dnes vedle PC s velkou výhodou využívat i „vědeckých" kapesních kalkulátorů – využití jejich statistických programů je popsáno v kap. 3 a 6.

Výklad je doplněn 16 řešenými příklady a k procvičení je zadáno 8 úloh (s uvedenými výsledky řešení). Zvládnutí předloženého studijního textu je nezbytnou podmínkou pro úspěšné zakončení procesu fyzikálního měření.

Pečlivě a promyšleně provedený experiment a kvalitně zpracovaná data měření, to jsou nástroje k odhalování přírodních zákonů. V historii fyziky najdeme dostatek příkladů tohoto procesu. Kvantitativně formulovaný *fyzikální zákon* není nic jiného, než *matematický model* fyzikálního děje. Model vytváří člověk – – fyzik, děj probíhá v přírodě nezávisle na pozorovateli. Jde o to, aby pozorování byla provedena dostatečně přesně a jejich statistické zpracování kvalitně, aby formulace zákona co nejpřesněji popisovala průběh děje. Při formulaci zákona hraje důležitou roli i syntéza dílčích poznatků – vhodné zobecnění.

Z historie fyziky opět víme, že určitý fyzikální zákon může dobře vyhovovat širokému spektru konkrétních dějů (a podmínek, za kterých probíhají). Při jiných podmínkách nebo při přesnějším měření můžeme zjistit méně či více významné odchylky od doposud užívaného zákona.

Příkladem může být druhý Newtonův pohybový zákon (1687) a jeho korekce Einsteinovou teorií relativity (1905). Pro rychlosti těles uvažované v klasické Newtonově mechanice nebyla závislost hmotnosti na rychlosti v pozorovací soustavě měřitelná. Po objevu elementárních částic (zejména elektronu r. 1895) se experimentálně zjistilo porušení dosavadního modelu pro setrvačnou hmotnost: $m = m_0 = konst.$. Jak je známo, teorie relativity vypracovala nový matematický model

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

kde m_0 je klidová hmotnost, v je rychlost tělesa a c je rychlost světla ve vakuu.

Na závěr úvodního slova k předložené publikaci je třeba zdůraznit významnou roli *matematiky* v procesu zpracování dat fyzikálních měření. Matematické disciplíny, jako teorie pravděpodobnosti, matematická statistika, teorie chyb a vyrovnávací počet, dávají experimentální fyzice významný nástroj a např. ji umožňují, aby jen z několika měření veličiny určila její nejpravděpodobnější hodnotu včetně determinované přesnosti. Podobně regresní analýza, využívající matematickou metodu nejmenších čtverců, umožňuje na základě dat měření stanovit nejpravděpodobnější průběh zkoumané závislosti fyzikálních veličin.

1 Chyby měření

Hodnota x fyzikální veličiny *zjištěná měřením* (tj. u skalární veličiny její velikost, u vektorové veličiny[1] také její směr anebo velikost jejich složek) se vždy o něco liší od její *skutečné hodnoty* x_0 (bohužel neznámé). Rozdíl hodnoty naměřené a skutečné se nazývá *skutečná chyba* ε (také se označuje *absolutní chyba měření)*:

$$\varepsilon = x - x_0 \,. \tag{1}$$

Tato chyba má jednotku měřené veličiny. Vedle toho se zavádí *relativní chyba* vztahem

$$\delta = \frac{\varepsilon}{x_0} \cdot 100\% = \frac{x - x_0}{x_0} \cdot 100\% = \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right) \cdot 100\% \,. \tag{2}$$

Chyba měření může být zřejmě kladná nebo záporná (a tudíž teoreticky i nulová).

Pokud bychom chybu měření přesně znali, mohli bychom určit skutečnou hodnotu měřené veličiny; to však z principu není možné. Proto se budeme snažit určit alespoň *nejpravděpodobnější hodnotu* měřené veličiny a její *pravděpodobnou chybu*.

Podle příčin vzniku dělíme chyby na soustavné a náhodné.

a) **Soustavné chyby** (nebo též *systematické chyby*) ovlivňují výsledek měření zcela určitým způsobem, s jistou pravidelností. Systematičnost této chyby se projevuje tím, že měřené hodnoty veličiny jsou buď trvale větší nebo menší, než je hodnota skutečná. Tyto odchylky lze přitom určit (odhadnout) a tak vliv soustavných chyb v podstatě vyloučit. Soustavné chyby mohou mít původ v použité metodě, v přístrojích anebo i v pozorovateli.

Někdy k měření použijeme *metodu* vypracovanou na základě zjednodušujících předpokladů. Použijeme-li např. k měření tíhového zrychlení kyvadlo, zpravidla při řešení pohybové rovnice nahradíme $\sin\varphi \approx \varphi$, což lze provést jen pro $\varphi \to 0$. Při nenulové amplitudě φ_0 bude doba kyvu poněkud delší (pro $\varphi_0 = 5^\circ$ asi o 0,1 %). Nebo při vážení na vzduchu vzniká soustavná chyba v důsledku různého vztlaku, má-li předmět jinou hustotu než závaží. Chybu lze opět korigovat.

Zdrojem soustavných chyb bývají i *měřicí přístroje* a měřicí etalony. Lze je vyloučit cejchováním anebo užitím korekčních křivek přístrojů nebo tabulek. Konečně i *pozorovatel* může svými osobními vlastnostmi (nedokonalostmi) vnášet do měření soustavnou chybu, např. jistou dobou opožděné reakce na vnější podněty při změnách veličin (např. opožděné spuštění stopek).

[1]Např. při měření intenzity zemského magnetického pole se určuje vodorovná složka této intenzity (velikost), deklinace a inklinace (dva úhly), tj. musí se provést troje měření.

Kromě uvedených zdrojů soustavných chyb je dobré si uvědomit, že i samotný proces měření pomocí reálných přístrojů může ovlivňovat měřenou veličinu. Např. čelisti posuvného měřítka poněkud deformují měřený předmět (např. drát), teploměr má nenulovou tepelnou kapacitu, ampérmetr nenulový odpor, voltmetr konečný odpor, atd. Fakt, že proces měření ovlivňuje měřenou veličinu je naprosto stěžejní pro kvantověmechanické měření.

Vliv soustavných chyb na výsledek měření se se zvětšujícím se počtem opakovaných měření nezmenšuje. Pokud však známe zdroje těchto chyb, *můžeme provést jejich korekci a výrazně omezit jejich vliv na výsledek měření.*

b) **Náhodné chyby** se vyznačují tím, že působením velmi rozmanitých přesně nedefinovatelných vlivů se hodnoty určité veličiny, naměřené přibližně za stejných podmínek měření, poněkud liší. Může tu působit např. náhodná změna polohy oka, určitá malá změna teploty, tlaku. Nedodržení určitého tlaku měřicího šroubu u mikrometru (tento vliv se omezuje montáží kluzné spojky s „řehtačkou", která zabezpečí přibližně stejný tlak). Také zde může působit nedokonalost předpokládaných tvarů při výrobě (např. průměr drátu musíme měřit v různých místech).

Měření fyzikálních veličin představuje v důsledku působení náhodných chyb *statistický proces s náhodnou proměnnou*. Pravděpodobnou hodnotu měřené fyzikální veličiny a její chyby tak lze určit statistickými metodami. *Vliv náhodných chyb na výsledek měření klesá s počtem opakovaných měření.*

2 Teorie náhodných chyb

Náhodné jevy, mezi něž patří i fyzikální měření zatížené náhodnými chybami, nelze chápat jako negaci příčinné podmíněnosti (kauzality), neboť všechny jevy reálného světa jsou příčinně podmíněny. Průběh jevů a jejich výsledek má objektivní příčiny. U jevů, které označujeme jako náhodné, jde o to, že skutečné příčiny jsou tak rozmanité a složité, že jejich vliv nejsme sto v daném okamžiku postihnout. Jednak proto, že jich je velké množství a chceme se vyhnout složitému studiu jednotlivých dějů, jednak proto, že naše znalosti o určitých jevech jsou nedostačující, abychom mohli jejich vliv kvantitativně analyzovat.

Přesto lze náhodné jevy matematicky popsat zákony, které nám poskytuje počet pravděpodobnosti, postupně budovaný od počátku 17. století a spojený se jmény B. Pascal, Jakob Bernoulli, P. S. Laplace, J. L. Lagrange, S. D. Poisson a zejména se jménem německého matematika a fyzika K. F. Gausse (1777 - - 1855), který vypracoval teorii chyb a metodu nejmenších čtverců.

Náhodná proměnná se může měnit zásadně dvojím způsobem.

a) *Diskrétní náhodná proměnná* může nabývat jen určitých číselných hodnot.

b) *Spojitá náhodná proměnná* může nabývat libovolných hodnot z určitého (omezeného nebo neomezeného) intervalu.

Náhodné chyby měření ve své podstatě mohou nabývat libovolné hodnoty, proto je můžeme považovat za spojité náhodné proměnné. Mohou nabývat kladných a záporných hodnot. Empiricky můžeme zjistit důležitý poznatek, že při velkém počtu měření se vyskytne zhruba stejný počet náhodných chyb kladných i záporných a že malé chyby jsou početnější než chyby větší.

Abychom mohli kvantitativně posuzovat pravděpodobnost výskytu náhodné chyby určité velikosti ε zavedeme si několik pojmů. Uvažujeme především, že chyba ε je spojitě proměnná.

Prvním důležitým pojmem je *četnost* $y(\varepsilon)$ chyby určité velikosti ε. Uvažujme, že měřením dospějeme k velikému souboru n chyb určitých diskrétních hodnot. Je-li n konečné, bude počet chyb zcela určité (libovolně zvolené) chyby ε zpravidla nulový. Zvolíme-li si ovšem kolem hodnoty ε jisté rozmezí $\pm\frac{1}{2}\Delta\varepsilon$ a dělíme-li počet $\Delta\nu$ chyb v tomto intervalu obsažených šířkou $\Delta\varepsilon$ tohoto intervalu, dostaneme průměrnou četnost $\Delta\nu/\Delta\varepsilon$. Četnost $y(\varepsilon)$ je pak dána limitou tohoto podílu, tj.

$$y(\varepsilon) = \lim_{\Delta\varepsilon\to 0} \frac{\Delta\nu}{\Delta\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varepsilon}\,.$$

Tato četnost je zřejmě úměrná celkovému počtu n měření opakovaných za stejných podmínek. Proto zavádíme *relativní četnost* $p(\varepsilon)$ tak, že četnost $y(\varepsilon)$ vydělíme celkovým počtem měření:

$$p(\varepsilon) = \frac{y(\varepsilon)}{n} = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varepsilon}\,.$$

Tato veličina není již závislá na počtu provedených měření (počet měření ovšem musí být velký).

Násobíme-li relativní četnost $p(\varepsilon)$ šířkou intervalu $\mathrm{d}\varepsilon$, dostaneme

$$\mathrm{d}P(\varepsilon) = p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\nu}{n}\,,$$

neboli poměr počtu $\mathrm{d}\nu$ chyb v intervalu $\mathrm{d}\varepsilon$ k počtu n všech chyb. Má význam *pravděpodobnosti výskytu chyby* ε v uvažovaném intervalu $(\varepsilon, \varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon)$. Dělíme-li tuto pravděpodobnost $\mathrm{d}P(\varepsilon)$ šířkou $\mathrm{d}\varepsilon$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}P(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = p(\varepsilon)\,.$$

Relativní četnost $p(\varepsilon)$ má tedy význam *hustoty pravděpodobnosti*, tj. pravděpodobnosti, že chyba ε leží v intervalu jednotkové šířky.

Budeme-li zjišťovat pravděpodobnost toho, že chyba leží v širších mezích, např. $\varepsilon \in (-e, e)$, provedeme integraci

$$P = \int\limits_{-e}^{e} p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\,.$$

Pak P značí pravděpodobnost, že prostá velikost chyby nepřekročí danou hodnotu e.

Abychom však mohli vypočítat pravděpodobnost výskytu náhodné chyby určité velikosti ε, musíme znát funkci $p(\varepsilon)$, tj. *zákon rozdělení* těchto chyb. Tento zákon objevil K. F. Gauss na základě předpokladu, že chyba ε je součtem velkého množství elementárních nezávislých chyb. Má tvar

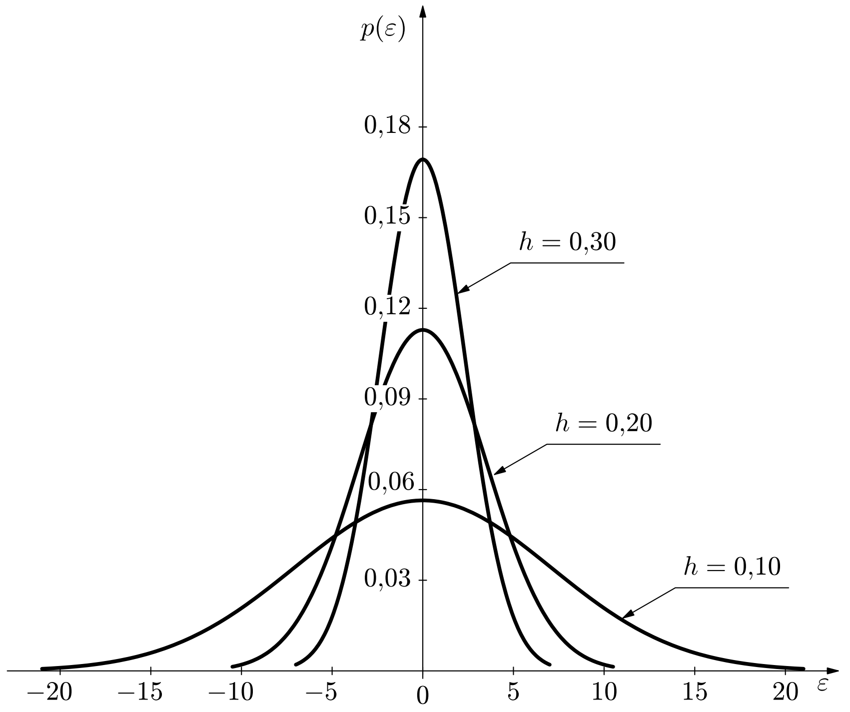
$$p(\varepsilon) = C\ \mathrm{e}^{-h^2\varepsilon^2} \tag{3}$$

a nazývá se *normální zákon rozdělení* nebo *Gaussovo rozložení*. Grafickým znázorněním tohoto vztahu (3) je *Gaussova křivka* (obr. 1).

Významným parametrem v (3) je *míra přesnosti* h, neboť s rostoucím h roste četnost malých chyb a křivka se stává štíhlejší (obr. 1). Neboli se zvětšujícím se h roste počet správnějších výsledků s menší náhodnou chybou, což odpovídá přesnějšímu měření uvažované veličiny. Význam konstanty C a její velikost nyní určíme.

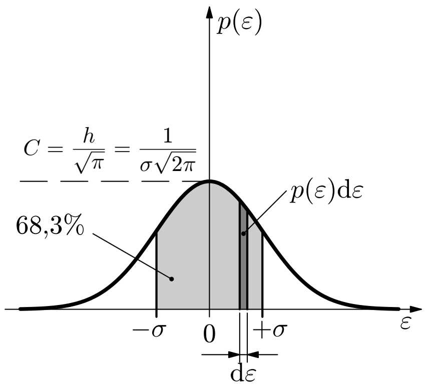
Pravděpodobnost toho, aby náhodná chyba ležela v intervalu $(\varepsilon, \varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon)$ je $p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$ - viz obr. 2. Provedeme-li součet těchto součinů pro všechny možné hodnoty ε, tj. budeme-li integrovat v mezích od $-\infty$ do $+\infty$, dostaneme pravděpodobnost, že chyba leží mezi mezními hodnotami $-\infty$, $+\infty$. Tato pravděpodobnost se ovšem musí rovnat jedné[2], musí tedy platit tzv. normovací podmínka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = C \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-h^2\varepsilon^2}\mathrm{d}\varepsilon = 1.$$



Obr. 1 Gaussova křivka pro různé hodnoty míry přesnosti ($h = 0{,}1$; $h = 0{,}2$; $h = 0{,}3$)

[2]Pravděpodobnost *jistého jevu* je $P = 1$ a to, že určitá chyba leží někde v neomezeném intervalu $(-\infty, +\infty)$, je jistý jev.



Obr. 2 K výpočtu směrodatné odchylky

Řešením tohoto integrálu s nekonečnými mezemi (viz např. [2],[6]) dostaneme vztah

$$C\frac{\sqrt{\pi}}{h} = 1\,,$$

neboli

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Pak Gaussovo rozložení (3) dostává *normovaný tvar*

$$p(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-h^2\varepsilon^2}\,. \tag{4}$$

Míru přesnosti h lze uvést do souvislosti s jinou veličinou, která podává názornější představu o přesnosti měření. Je to *směrodatná odchylka* σ náhodné chyby (označuje se také *střední kvadratická chyba*). Pokud bychom počítali střední (průměrnou) náhodnou chybu ε velkého (teoreticky nekonečného) počtu měření, dostali bychom nulu (to je ostatně předpoklad Gaussova rozložení). Proto vypočteme nejprve průměrnou hodnotu *druhé mocniny* ε^2 a výsledek odmocníme. V případě spojité proměnné přechází tento součet v integrál, takže můžeme psát

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \mathrm{e}^{-h^2\varepsilon^2} = \frac{1}{2h^2}\,, \tag{5}$$

přičemž zájemce o řešení uvedeného integrálu odkazuji např. na monografii [2].

Z výrazu (5) plynou hledané vztahy:

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}\,, \quad h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\,. \tag{6}$$

Při užití směrodatné odchylky σ dostane *Gaussovo rozložení* (4) *nejčastěji uváděný výsledný tvar*

$$\boxed{p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}\,.} \tag{7}$$

Abychom určili význam směrodatné odchylky σ (resp. střední kvadratické chyby), vypočteme, s jakou pravděpodobností se skutečná chyba ε bude nacházet v intervalu $\langle -\sigma, \sigma\rangle$, resp. jak se naměřená hodnota veličiny při jednom měření bude lišit o hodnotu σ od její skutečné hodnoty x_0. Neboli určíme, s jakou pravděpodobností bude x_0 ležet v intervalu $\langle x_0-\sigma, x_0+\sigma\rangle$. Tuto pravděpodobnost zřejmě vypočteme řešením integrálu (viz obr. 2)

$$P_\sigma = \int_{-\sigma}^{\sigma} p(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\varepsilon\,. \tag{8}$$

Řešení tohoto integrálu lze převést na výpočet tzv. pravděpodobnostního integrálu, neboli Laplaceovy funkce $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

která je tabelována (viz např. [3]). Lze ji také vyčíslit na programovatelném kalkulátoru. Proměnná t je vázaná substituční rovnicí $t = h\varepsilon\sqrt{2} = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$. Výsledek řešení je $P_\sigma = 0{,}68269\ldots$, tj. hledaná pravděpodobnost je 68,3%.

Provedeme-li analogicky řešení (8) výpočet tohoto integrálu v mezích $\langle -3\sigma, 3\sigma\rangle$, dostaneme

$$P_{3\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-3\sigma}^{3\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\varepsilon = 0{,}99730\ldots \doteq 1{,}00\,.$$

Neboli pravděpodobnost toho, že měřená veličina x, určená z jednoho měření, bude ležet v intervalu $\langle x_0-3\sigma, x_0+3\sigma\rangle$ je 99,7%, tj. prakticky 100%. Veličina $3\sigma = \varkappa$ se proto nazývá *krajní chyba* nebo *mezní chyba*.

Znalost krajní chyby pro jedno měření nám umožní provést korigovaný výběr dat měření – z dosud použitých dat v souboru prostě *vyloučíme ta data, která překračují mez* $\pm\varkappa$ od aritmetického průměru. Musíme potom provést nový statistický výpočet korigovaného výběru dat.

Z provedených úvah je zřejmé, že *určení směrodatné odchylky (resp. střední kvadratické chyby) σ má pro zpracování dat fyzikálních měření zásadní význam.* Stanovení pravděpodobné hodnoty této chyby z dat měření bude předmětem následujících dvou kapitol.

Směrodatná odchylka σ má i významné postavení na Gaussově křivce (obr. 2). Jak bychom se mohli přesvědčit pomocí derivací, má Gaussova křivka $p(\varepsilon)$ v bodech $\varepsilon = \pm\sigma$ *inflexní body*.

Poznámka: V literatuře (např. [1],[2],[5]) se vedle směrodatné odchylky σ a krajní (mezní) chyby $\varkappa$ zavádí ještě *pravděpodobná chyba* ϑ. Definuje se tak, aby se pravděpodobnost toho, že správná hodnota x_0 jednoho měření leží v intervalu $\langle x_0 - \vartheta, x_0 + \vartheta \rangle$, byla právě 50%. Neboli $P_\vartheta = \dfrac{1}{2}$, tj. plocha pod Gaussovou křivkou $p(\varepsilon)$, vymezená souřadnicemi $\varepsilon = -\vartheta$, $\varepsilon = \vartheta$, je právě 50% – srovnej s obr. 2. Mezi pravděpodobnou chybou a střední kvadratickou chybou platí vztah

$$\vartheta = 0{,}674\,\sigma \doteq \frac{2}{3}\,\sigma.$$

Tato chyba je tedy „opticky“ příznivější. V praxi se všeobecně dává přednost směrodatné odchylce (střední kvadratické chybě); Horák [2] upřednostňuje chybu pravděpodobnou.

3 Hodnocení přesnosti měřené veličiny

3.1 Nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny – metoda nejmenších čtverců

Poznatky uvedené v předchozí kapitole o teorii náhodných chyb platí teoreticky jen pro nekonečný počet měření, prakticky pro veliký počet měření. Pak je součet kladných chyb až na znaménko roven součtu záporných chyb a *součet všech náhodných chyb* $\varepsilon_k = x_k - x_0$ *je roven nule*. Problém je jednak v tom, že z principu skutečnou hodnotu x_0 veličiny neznáme, jednak v tom, že zpravidla nemůžeme konat „veliký počet“ (např. 1000) měření. Proto lze považovat součet všech chyb ε_k jen přibližně za nulový, tedy při vykonání n měření bude platit

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_0) \approx 0\,,$$

odtud

$$\boxed{x_0 \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,.} \tag{9}$$

Nyní ukážeme, že *aritmetický průměr* $\overline{x}$ souboru hodnot x_k pro $k \in \{1, n\}$, získaných při n opakovaných měřeních téže veličiny za stejných podmínek, určuje *nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny* x_0.

Předpokládejme tedy, že jsme při n měřeních veličiny x_0 naměřili n nezávislých hodnot x_k, při kterých jsme se dopustili n náhodných chyb. Protože skutečnou hodnotu x_0 neznáme, vyjádříme chybu k-tého měření ve tvaru $x_k - x = \varepsilon_k$, kde x je hledaná pravděpodobná hodnota veličiny x_0. Pravděpodobnost toho, že chyba ε_k bude v intervalu $\langle \varepsilon_k, \varepsilon_k + \mathrm{d}\varepsilon_k \rangle$ je

$$\mathrm{d}P_k = p_k \mathrm{d}\varepsilon_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_k^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\varepsilon_k\,,$$

kde p_k je hustota pravděpodobnosti (7) pro předpokládané Gaussovo rozložení. Protože jednotlivá měření považujeme za vzájemně nezávislé jevy, bude pravděpodobnost toho, že se uskuteční všech n měření právě s chybami ε_k podle teorie pravděpodobnosti rovna součinu $\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2 \ldots \mathrm{d}P_k \ldots \mathrm{d}P_n$ těchto pravděpodobností, neboli

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}x_k = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2)}\mathrm{d}\varepsilon_1\mathrm{d}\varepsilon_2 \ldots \mathrm{d}\varepsilon_n\,.$$

Maximum této pravděpodobnosti zřejmě nastane, když v exponentu bude

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = min\,,$$

neboli

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = min.}\,, \tag{10}$$

když jsme označili $\overline{x}$ *nejpravděpodobnější hodnotu* měřené veličiny x_0, pro kterou je splněna podmínka (10). Tento výsledek je znám jako **metoda nejmenších čtverců**.

Podle pravidel matematické analýzy bude podmínka (10) splněna, když

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\overline{x}} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}\overline{x}^2} > 0\,.$$

Provedeme-li tyto derivace, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\overline{x}} = -2\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}) = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}\overline{x}^2} = 2n > 0\,.$$

Z první rovnice vyplývá

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,,$$

tj., že hledaná *nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny je rovna aritmetickému průměru souboru naměřených hodnot.*

Soubor n naměřených dat veličiny je však třeba pokládat za náhodný výběr ze souboru všech možných hodnot měřené veličiny, který má Gaussovo rozložení. Pokud bychom totiž provedli n opakovaných měření několikrát za sebou, dostali bychom pro každou z těchto n-tic naměřených hodnot obecně poněkud jinou velikost aritmetického průměru. Proto aritmetický průměr (9) označujeme jako **výběrový průměr**.

3.2 Přesnost výběrového průměru – výběrová směrodatná odchylka

Sebevětší přesnost měření by byla málo cenná, pokud bychom nedovedli alespoň přibližně určit chybu výsledku. K posouzení přesnosti měření se nejčastěji užívá *směrodatná odchylka*. Ta byla pro případ spojité náhodné proměnné (tj. pro teoretický případ nekonečného počtu měření) zavedena výrazem (5). My ovšem neznáme ani správnou hodnotu x_0, ani neuskutečňujeme nekonečný počet měření. Při náhodném výběru n dat měření jsme schopni vypočíst aritmetický (tj. výběrový) průměr $\overline{x}$ a *odchylky* $\Delta_k = x_k - \overline{x}$ jednotlivých naměřených hodnot x_k od tohoto průměru. Můžeme provést součet druhých mocnin těchto odchylek přes všechna k a vypočítat jejich aritmetický průměr; tedy postupovat analogicky jako v případě výpočtu směrodatné odchylky σ pro spojitou proměnnou. Součet druhých mocnin odchylek Δ_k však nemůžeme dělit počtem n měření, jak by se dalo očekávat, nýbrž $n - 1$. Vyplývá to z teorie chyb (viz např. [2]) a lze to přibližně vysvětlit tím, že jedno číslo z řady n je „odebráno" na výpočet aritmetického průměru (teorie říká, že se tímto úkonem odebere jeden „stupeň volnosti").

Současně je zde stejný problém jako u výpočtu aritmetického průměru (9) – hodnocen je jen *náhodný výběr* souboru n měření. Proto počítanou směrodatnou odchylku budeme označovat jako výběrovou a zvolíme pro ni značku s. Takže **výběrová směrodatná odchylka jednoho měření** je

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2}\,. \tag{11}$$

V dalších vztazích budeme pro jednoduchost sčítací meze u symbolu $\sum$ vynechávat.

Lze dokázat (viz [2]), že s je nejlepším odhadem veličiny σ. Ve starší literatuře se tato veličina proto označuje přímo σ a nazývá se *střední kvadratická chyba jednoho měření*.

Pro vyhodnocení měření je však důležitější vědět, jakou chybou bude zatížen výběrový průměr (9) naměřených hodnot. Protože v případě této chyby již jde o určení chyby veličiny *vypočtené* podle vzorce (9), musí se použít postup, který bude předmětem až následující kapitoly. Uvedeme proto příslušný vzorec nyní bez odvození. To bude provedeno až později – jako příklad 4.

Výběrová směrodatná odchylka **aritmetického** *(výběrového) průměru* je

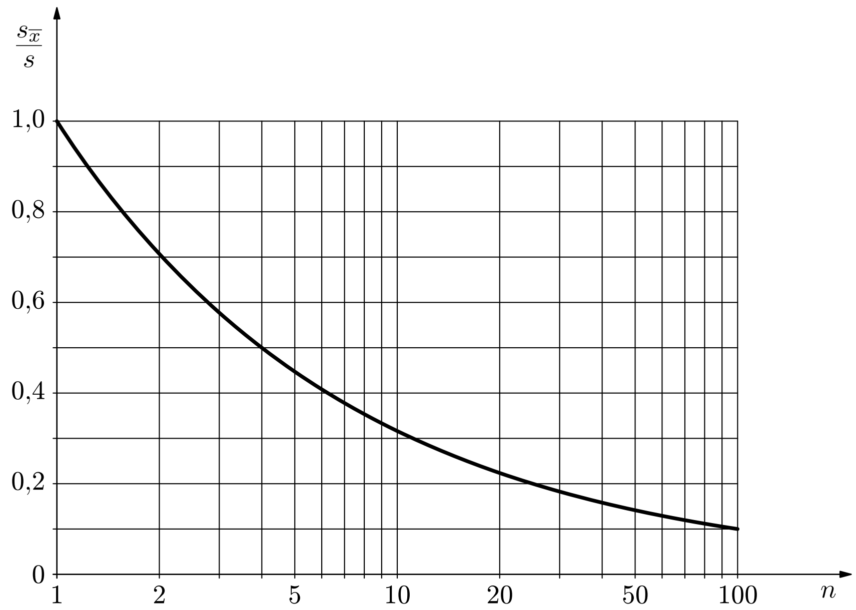
$$\boxed{s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta_k^2}{n(n-1)}}\,.} \tag{12}$$

Z tohoto vztahu vidíme souvislost mezi směrodatnou odchylkou aritmetického průměru a směrodatnou odchylkou jednoho měření.

Tak pro

$$
\begin{aligned}
n = 5: &\qquad s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{5}} = 0{,}45 \text{ s},\\
n = 10: &\qquad s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{10}} = 0{,}32 \text{ s},\\
n = 20: &\qquad s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{20}} = 0{,}22 \text{ s},\\
n = 100: &\qquad s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{100}} = 0{,}10 \text{ s}.
\end{aligned}
$$

Závislost poměru $\frac{s_{\overline{x}}}{s}$, jako funkce počtu měření n, je znázorněna na obr. 3. Je zřejmé, že uskutečňovat veliké počty měření je málo efektivní. Na druhé straně volíme $n > 5$, nejlépe zpravidla 10.



Obr. 3 Závislost relativní velikosti směrodatné odchylky aritmetického průměru na počtu n měření

3.3 Interval spolehlivosti

Teoretický rozbor, který jsme provedli v kap. 2, předpokládal, že je znám soubor $n \to \infty$ měření. Za tohoto předpokladu jsme vypočetli směrodatnou odchylku σ. Její význam je ten, že určuje interval $\langle x_0 - \sigma, x_0 + \sigma \rangle$, v němž bude s pravděpodobností $P = 68{,}3\%$ ležet skutečná hodnota x_0 měřené veličiny.

V praxi jednak nemůžeme vykonat nekonečně mnoho měření, jednak můžeme požadovat jinou pravděpodobnost P toho, aby měřená hodnota ležela ve zvoleném intervalu. Vedle *pravděpodobnosti* P se pracuje ještě s veličinou α – – s *hladinou významnosti* (nazývá se rovněž *činitel významnosti*), která je s P vázaná vztahem

$$\alpha = 1 - P\,, \quad \text{resp. } \alpha[\%] = 100 - P[\%]\,.$$

Uvedený problém *nejistoty měření* řeší teorie pravděpodobnosti užitím *Studentova rozložení* (viz např. [6]). Uvažujme, že jsme provedli n měření veličiny x_0, určili její nejpravděpodobnější hodnotu $\overline{x}$ a ze vzorce (12) její výběrovou směrodatnou odchylku $s_{\overline{x}}$. *Interval spolehlivosti*, v němž bude ležet hodnota měřené veličiny (určovaná z n měření) se zvolenou pravděpodobností P (obecně jinou než 68,3%) je

$$\langle \overline{x} - ts_{\overline{x}}, \overline{x} + ts_{\overline{x}} \rangle,$$

kde $t = t(P, n)$ je tzv. *Studentův součinitel*, který modifikuje šířku intervalu spolehlivosti v závislosti na zvolené hladině pravděpodobnosti P a uskutečněném počtu n měření. Říkáme rovněž, že *spolehlivost* jevu, že x_0 bude ležet v uvedeném intervalu je P anebo, že *riziko* jevu, že x_0 bude ležet mimo tento interval, je $\alpha = 1 - P$.

Studentův součinitel můžeme numericky vypočítat (viz např. [6], s výhodou lze užít rovněž PC s programem EXCEL firmy Microsoft), nebo užít přímo hotových tabulek (viz např. [9]). Pro naše užití uvádí Studentův součinitel tabulka 1. Je v ní uvedena standardní hladina spolehlivosti $P = 68{,}3\%$, hladina $P = 95{,}0\%$ (riziko 5%), $P = 99{,}0\%$ (riziko 1%) a $P = 99{,}73\%$ (prakticky nulové riziko). Rozpětí n je $\{3, \infty\}$, zaokrouhlení je na dvě desetinná místa.

Z tabulky je zřejmé, že při námi užívaném standardním postupu ($P = 68{,}3\%$) a $n = 10$ se součinitel t liší od 1 jen o 6% a nemusí tedy se běžně uvažovat. Zvolíme-li však jen 5 měření, je odchylka již 15%. Požadujeme-li riziko jen 5%, je $t > 2$ a musí se vždy uvažovat. Stanovujeme-li krajní chybu (teoreticky pro $n \to \infty$ je $\varkappa = 3\sigma$), je korekce na Studentovo rozložení velmi významná (prakticky pro běžně užívaný počet měření $n \leq 10$ je $t > 4$).

V dalším textu, kdy předpokládáme $n \approx 10$ a standardní spolehlivost $P = 68{,}3\%$, nebudeme v předložených příkladech popsanou korekci provádět.

Při (zpětném) posuzování věrohodnosti jednotlivých naměřených hodnot nás bude ještě zajímat *krajní interval spolehlivosti pro jednotlivá měření.* Tento interval vypočteme pomocí Studentova součinitele (t) pro pravděpodobnost $P = 99{,}73\%$ (tedy z posledního sloupce tab. 1) a směrodatné odchylky (s) *jednoho* měření určené podle vztahu (11). Interval, v němž by měla ležet všechna data měření, tedy je

$$\langle \overline{x} - ts, \overline{x} + ts \rangle \quad \text{pro } P = 99{,}73\% \,.$$

Krajní chyba jednoho měření tedy je ts, přičemž její teoretická hodnota (pro $n \to \infty$) je $3s$. Překročí-li chyba jednoho měření krajní chybu ts (pro $P = 99{,}73\%$), je to důvod, abychom tuto hodnotu vyloučili a provedli korigované zpracování dat měření.

Tab. 1 Studentův součinitel $t = t(P, n)$

	$t(P,n)$			
n	$P = 68{,}3\%$	$P = 95{,}0\%$	$P = 99{,}0\%$	$P = 99{,}73\%$
3	1,32	4,30	9,92	19,21
4	1,20	3,18	5,84	9,22
5	1,15	2,78	4,60	6,62
6	1,11	2,57	4,03	5,51
7	1,09	2,45	3,71	4,90
8	1,09	2,37	3,50	4,53
9	1,07	2,31	3,36	4,27
10	1,06	2,26	3,25	4,09
11	1,06	2,23	3,17	3,96
12	1,05	2,20	3,11	3,85
15	1,04	2,15	2,98	3,63
20	1,03	2,08	2,86	3,45
30	1,02	2,05	2,76	3,28
50	1,01	2,01	2,68	3,16
100	1,00	1,98	2,63	3,08
∞	1,00	1,96	2,58	3,00

3.4 Postup při zpracování dat naměřených hodnot

Nejprve uvedu **klasický postup** při úplném výpočtu, poté postup při využití statistického programu v kapesním „vědeckém“ kalkulátoru.

1. Data píšeme do vhodné tabulky (viz příklad 1). Vypočteme aritmetický průměr $\overline{x}$ z n naměřených hodnot x_k podle (9).

2. Vypočteme odchylky $\Delta_k = x_k - \overline{x}$ pro všechna k, přičemž musí být $\sum \Delta_k = 0$.

3. Vypočteme Δ_k^2 pro všechna k a jejich součet $\sum \Delta_k^2$.

4. Vypočteme výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru $s_{\overline{x}}$ podle (12), abychom vyhodnotili vliv náhodných chyb na výsledek měření (vliv soustavných chyb je nutné korigovat samostatně).

5. Výsledek napíšeme ve tvaru

$$x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}}$$

včetně jednotek, přičemž směrodatnou odchylku uvedeme jen na jednu, nejvýše dvě platné cifry (uvádět chybu na více cifer je nejen zbytečné, ale již se považuje za formálně chybný zápis). Počet míst aritmetického průměru $\overline{x}$ zaokrouhlíme tak, aby poslední platná cifra odpovídala poslední platné cifře zaokrouhlené chyby.

Např.

$$\begin{array}{ll}
d = (18{,}25 \pm 0{,}03)\ \mathrm{mm}; & d = 18{,}252 \pm 0{,}033)\ \mathrm{mm}, \\
m = (250{,}5 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g}; & m = (250{,}48 \pm 0{,}15) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g}, \\
P = (1200 \pm 10)\ \mathrm{W}; & P = (1198 \pm 12)\ \mathrm{W}.
\end{array}$$

Při zaokrouhlování se zpravidla postupuje podle všeobecných pravidel. S ohledem na spolehlivost výsledků (viz Studentův koeficient v tab. 1) je opatrnější zaokrouhlovat směrem nahoru (zvláště, je-li poslední cifra > 2).
Zaokrouhlení na dvě platné cifry použijeme zejména v případech, kdy s veličinami provádíme další výpočty, abychom snížili chyby při dalším zaokrouhlování.

Při použití **kapesního kalkulátoru** je výpočet sice podstatně rychlejší, avšak může dojít k systémovým chybám, protože nabízený statistický program nebývá specializován na výpočet chyb měření.

1. Kalkulátor přepneme na statistický program a *vymažeme* obsah statistických paměťových registrů.

2. Do vstupní paměti pečlivě vložíme data hodnot naměřené veličiny.

3. Zpracovaná data budou uložena v označených paměťových registrech. Kalkulátor provede příslušné výpočty v okamžiku otevření některého z paměťových registrů se statistickými daty. Nás budou zajímat jen některá výstupní data. Výstupní data budou nabídnuta buď na maximální nebo předem nastavený počet cifer (nakonec bude nutné provést zaokrouhlení podle velikosti směrodatné odchylky aritmetického průměru).

4. Určíme výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru $s_{\overline{x}}$ tím, že využijeme směrodatnou odchylku σ_{n-1} nebo σ_n (jedna nebo druhá jsou v paměťových registrech; kalkulátory užívají označení σ). Směrodatná odchylka σ_{n-1} odpovídá veličině (11); má tedy význam výběrové směrodatné odchylky *jednoho* měření. Odchylka σ_n se liší tím, že součet druhých mocnin odchylek

Δ_k je dělen počtem n. *Výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru* (12) musíme tedy dopočítat podle vzorce

$$\boxed{s_{\overline{x}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}}\,,} \tag{13}$$

přičemž (nám známé) číslo n je rovněž uloženo v jedné z pamětí - ověříme si, zda jsme opravdu vložili všechna data. Výsledek (13) zaokrouhlíme na jednu nebo dvě cifry.

5. Z příslušné paměti vyvoláme aritmetický průměr $\overline{x}$, zaokrouhlíme jej podle dříve uvedeného pravidla a výsledek napíšeme v konečném tvaru včetně jednotek

$$x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}}\,.$$

Klasický postup výpočtu a postup s využitím statistického programu na kalkulátoru si můžete ověřit na následujícím příkladě.

Příklad 1 – zpracování dat měření délky

Při měření délky drátu, na němž bylo zavěšeno závaží, byla získána data, která jsou uvedena v prvním sloupci následující tabulky 2. Zpracujte data měření a) klasickým postupem, b) užitím statistického programu na kapesním kalkulátoru; tj. určete aritmetický průměr $\overline{l}$ a jeho směrodatnou odchylku.

Řešení

a)

Tab. 2 Zpracování dat měření délky

k	$\frac{l_k}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta_k}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta_k^2}{\text{mm}^2}$
1	519,2	- 0,68	0,4624
2	520,0	0,12	0,0144
3	519,8	- 0,08	0,0064
4	520,4	0,52	0,2704
5	519,6	- 0,28	0,0784
6	520,1	0,22	0,0484
7	520,0	0,12	0,0144
8	520,2	0,32	0,1024
9	519,7	- 0,18	0,0324
10	519,8	- 0,08	0,0064
	$\overline{l}$=519,88 mm	$\sum \Delta_k$=0,0 mm	$\sum \Delta_k^2$=1,036 mm^2

$$s_{\overline{l}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta_k^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1{,}036}{10 \cdot 9}}\ \mathrm{mm} = 0{,}1073\ \mathrm{mm} \doteq 0{,}11\ \mathrm{mm} \doteq 0{,}1\ \mathrm{mm}\,,$$

$$l = (519{,}88 \pm 0{,}11)\ \mathrm{mm} \doteq (519{,}9 \pm 0{,}1)\ \mathrm{mm}\,.$$

b) Vymažeme obsah statistických paměťových registrů kalkulátoru. Do vstupní paměti vložíme data – naměřené velikosti délky z prvního sloupce tabulky 2. Nyní z příslušného paměťového registru zjistíme $\overline{l} = 519{,}88$ mm, dále $\sigma_{n-1} = 0{,}3393$ mm (má význam chyby jednoho měření), provedeme dělení $\sqrt{n} = \sqrt{10}$ a dostaneme chybu aritmetického průměru, tedy $s_{\overline{l}} = 0{,}107\ \mathrm{mm} \doteq 0{,}11\ \mathrm{mm} \doteq 0{,}1$ mm. Nebo zjistíme $\sigma_n = 0{,}3219$ mm; dělíme $\sqrt{n-1} = 3$ a dostaneme stejnou směrodatnou odchylku.

c) Krajní chyba jednoho měření je ts. Studentův součinitel pro $P = 99{,}73\%$ a $n = 10$ je $t = 4{,}09$, standardní odchylka jednoho měření $s = 0{,}32$ mm. Tedy krajní chyba $ts = 1{,}3$ mm. Žádná z naměřených hodnot v tab. 2 ji nepřekračuje a není nutné korigovat výpočet.

Příklad 2 – zpracování dat při měření postupnou metodou

Při měření úkazů, které se periodicky opakují, je výhodné použít postupnou metodu. Užívá se např. při měření doby kyvu τ (zde konkrétně torzního kyvadla). Měření uspořádáme tak, aby hodnoty tvořily aritmetickou posloupnost s ekvidistantními hodnotami argumentu. Je to zřejmé z následující tabulky, která obsahuje uspořádaná data dob 10 kyvů až do celkového počtu 200 kyvů. Užitím kalkulátoru vypočtěte aritmetický průměr doby $100\overline{\tau}$ a jeho směrodatnou odchylku. (Údaje platné pro dobu jednoho kyvu nebo jednoho kmitu budeme určovat až v kap. 4.)

Řešení

Nejprve určíme $t_2 - t_1 = 100\tau$ – dostaneme 10 hodnot a provedeme jejich standardní zpracování na kalkulátoru; výsledek je zapsán do tabulky 3.

Tab. 3 Zpracování dat měření doby kyvu

	$\frac{t_1}{\mathrm{s}}$		$\frac{t_2}{\mathrm{s}}$	100τ
10τ	18,2	110τ	205,3	187,1
20τ	37,4	120τ	224,0	186,6
30τ	56,0	130τ	242,4	186,4
40τ	74,7	140τ	261,2	186,5
50τ	93,3	150τ	279,8	186,5
60τ	111,7	160τ	298,5	186,8
70τ	130,5	170τ	317,1	186,6
80τ	149,1	180τ	335,7	186,6
90τ	167,9	190τ	354,3	186,4
100τ	186,7	200τ	373,0	186,3

$100\overline{\tau} = 186{,}58$ s,
$\sigma_{n-1} = 0{,}230$ s,
$\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 0{,}073$ s,
$100\overline{\tau} = (186{,}58 \pm 0{,}07)$ s.

3.5 Vliv nepřesnosti měřidla na chybu výsledku

Měření fyzikálních veličin uskutečňujeme pomocí *měřidel* – technických prostředků, které dělíme na *míry* a *měřicí přístroje*.

Míra je měřidlo, které při použití reprodukuje jednu nebo několik hodnot určité veličiny. Patří sem např. závaží, délkové měřítko s čárkovou stupnicí, odměrný válec, odporová dekáda, etalon napětí (normální galvanický článek Westonův) apod.

Měřicí přístroj je měřidlo, u něhož se alespoň jedna součást při měření pohybuje nebo funkčně mění svůj stav. Dělí se na přístroje *analogové*, u nichž je výstupní údaj spojitou funkcí (např. úhlová výchylka ručky přístroje) anebo *digitální*, u nichž se měřená veličina pomocí převodníku mění na elektrický signál, který se indikuje v číslicovém tvaru. Patří sem ať již v analogové nebo digitální formě např. posuvné měřítko, stopky, váhy, teploměr, voltmetr, ohmetr apod.

Konstrukce a proces výroby měřidla závisí na přesnosti, která se od měřidla očekává. Součástí výroby je *cejchování měřidla*, při kterém se ověřuje správnost jeho funkce, případně se vyznačují měřicí značky nebo hodnoty (*kalibrace měřidla*).

Měřidlo je zhotoveno vždy jen s určitou přesností. Jeho nedokonalost se projevuje v *chybě měřidla*, která má jednak složku soustavnou, jednak složku náhodnou. Soustavnou chybu měřidla nelze odstranit opakováním měření. Srovnáním s přesnějším měřidlem můžeme zjistit, v jakém rozmezí se tato chyba pohybuje. Pokud není uvedena informace o přesnosti měřidla jeho výrobcem, bereme jeho chybu jako zlomek nejmenšího dílku na stupnici (je to zpravidla polovina nebo celý dílek).

Příklady největších přípustných chyb [9]:

kovové pravítko	0,5 mm
posuvné měřítko	0,05 až 0,1 mm
mikrometr	0,01 mm
úchylkoměr (indikátorové hodinky)	až 0,001 mm
mechanické stopky	0,3 s
digitální stopky	0,01 s
skleněné teploměry	1 až 1/2 dílku
laboratorní váhy (bez korekce na vakuum)	0,1% až 1%

U **analogových** elektrických měřicích přístrojů se jejich přesnost hodnotí pomocí *relativní dovolené mezní chyby* p přístroje uvedené v procentech. Podle ní jsou přístroje rozčleněny do 7 *tříd přesnosti* (přitom se procenta neuvádějí): 0,1; 0,2 (používají se jako normály a velmi přesné laboratorní přístroje); 0,5; 1 (laboratorní přístroje); 1,5; 2,5; 5 (přístroje provozní). Údaj p je uveden na štítku stupnice.

Dodrží-li se při měření podmínky stanovené výrobcem (např. teplota okolí, poloha přístroje), pak v rozmezí použitého rozsahu přístroje nepřekročí celková chyba (soustavná i náhodná) měřené veličiny dovolenou mezní hodnotu p

Budeme-li např. měřit miliampérmetrem s rovnoměrnou stupnicí od 0 do I_m ve třídě přesnosti p, je dovolená mezní chyba přístroje *v rozmezí celého rozsahu* $0 - I_\mathrm{m}$ rovna

$$\Delta I = I_\mathrm{m} \frac{p(\%)}{100} .$$

Relativní mezní chyba měřené hodnoty I na této stupnici tedy je

$$\delta_\mathrm{I} = \frac{\Delta I}{I} = \frac{I_\mathrm{m}}{I} \frac{p}{100} ;$$

je tedy závislá na tom, v jaké poloze na stupnici se měření uskutečňuje. Budeme-li v polovině stupnice, bude mezní chyba $\delta_\mathrm{I} = 2p$, budeme-li ve 20% od levého okraje, bude $\delta_\mathrm{I} = 5p$. Výhodné je tedy uskutečňovat měření na takovém rozsahu, aby ručička přístroje byla v blízkosti maximální hodnoty stupnice.

Má-li stupnice nelineární průběh, bude relativní mezní chyba stejnou nelineární funkcí polohy ručičky měřicího přístroje.

Při čtení polohy ručičky na stupnici kvalitního laboratorního přístroje (s podhledným zpětným zrcátkem) můžeme odhadovat i desetiny rozmezí jednoho dílku.

U **digitálních** měřicích přístrojů dosud neexistuje podobná norma jako u přístrojů analogových. Dovolená chyba se zpravidla uvádí jako součet dvou relativních chyb

$$\delta = |\delta_\mathrm{M}| + |\delta_\mathrm{R}|\frac{M}{X}\,,$$

kde δ_R je relativní chyba z maximální hodnoty měřicího rozsahu (bývá uvedena na štítku přístroje nebo se určí jako ± 1 digit na posledním místě číslicového tabla dělený užitým maximálním rozsahem M) a δ_M je relativní chyba z měřené hodnoty (uvádí se na štítku nebo v manuálu přístroje), X je naměřená hodnota na rozsahu M.

Budeme např. měřit *digitálním voltmetrem* na rozsahu $M = 3$ V. Voltmetr má uvedenou chybu $\delta_\mathrm{R} = 0{,}2\%$ a $\delta_\mathrm{M} = 0{,}2\%$. Naměříme napětí $U = 2{,}216$ V. Mezní chyba měření bude

$$\delta = 0{,}2\% + 0{,}2\%\frac{3}{2{,}2} = 0{,}47\%\,,$$

$$U = (2{,}22 \pm 0{,}01)\ \mathrm{V}\,.$$

Jaká bude *chyba naměřené veličiny při opakovaném měření* s přihlédnutím k chybě měřicího přístroje? Při opakovaném měření určíme standardním způsobem aritmetický průměr $\overline{x}$ a směrodatnou odchylku s aritmetického středu; její relativní velikost označme δ_s. Relativní dovolenou chybu měřicího přístroje označme δ_m. Jistý problém je v tom, že tato chyba je mezní (výrobce garantuje, že větší nebude), kdežto δ_s je střední. I přes odlišný charakter obou chyb lze s určitou nejistotou vypočítat chybu celkovou – s využitím poznatků o složené chybě (viz kap. 4) platí

$$\delta_\mathrm{c} \approx \sqrt{\delta_\mathrm{s}^2 + \delta_\mathrm{m}^2}\,.$$

Při měření na méně přesných přístrojích může dovolená chyba přístroje i o řád převyšovat směrodatnou odchylku z náhodných chyb. Pak hledáme přesnější měřicí přístroj.

Příklad 3 – měření voltmetrem

Na voltmetru o třídě přesnosti $p = 0{,}5$ a při užití rozsahu 3 V bylo měřeno napětí desetkrát a statistickým zpracováním byla získána hodnota $U = (2{,}21 \pm \pm 0{,}03)$ V. Vypočtěte celkovou chybu při zahrnutí mezní dovolené chyby měřicího přístroje.

Řešení

Mezní dovolená relativní chyba voltmetru při měření hodnoty U je

$$\delta_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{U} \frac{p}{100} = \frac{3}{2{,}21} \cdot \frac{0{,}5}{100} = 0{,}67 \cdot 10^{-2} \,.$$

Celková chyba

$$\delta_{\mathrm{c}} \approx \sqrt{\left(\frac{0{,}03}{2{,}21}\right)^2 + (1{,}4 \cdot 10^{-2})^2} = 0{,}015 \doteq 2\,\% \,.$$

Pak

$$U = (2{,}21 \pm 0{,}04)\ \mathrm{V} \,.$$

4 Hodnocení přesnosti vypočtené veličiny

4.1 Hodnota veličiny vypočtené z veličin naměřených

Jedním z úkolů fyzikálních měření je také určit veličinu z definičního vztahu nebo z fyzikálního zákona. Tyto vztahy vyjadřují souvislost určované veličiny s několika jinými veličinami určenými přímým měřením. Např. hustota tělesa ve tvaru válce se určí měřením hmotnosti m a objemu $V = \dfrac{\pi d^2 l}{4}$ podle vztahu

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 l}\,, \tag{14}$$

nebo tíhové zrychlení z doby kyvu τ malých kmitů matematického kyvadla délky l podle vztahu

$$g = \pi^2 \frac{l}{\tau^2}\,. \tag{15}$$

(V tomto druhém případě bude výsledek zatížen i soustavnou chybou, protože kyvadlo nemůže být realizováno jako matematické a nemůže konat kmity s úhlovou amplitudou, která konverguje k nule.)

Uvedené příklady jsou zvláštním případem obecného vztahu, kdy určovaná veličina u je vázaná s měřenými veličinami $x, y, z, \ldots$ symbolickým vztahem

$$u = u(x, y, z, \ldots)\,. \tag{16}$$

Předpokládáme, že předchozím měřením jsme získali aritmetické výběrové průměry měřených veličin a jejich výběrové směrodatné odchylky

$$x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}}\,, \quad y = \overline{y} \pm s_{\overline{y}}\,, \quad z = \overline{z} \pm s_{\overline{z}}\,, \ldots \tag{17}$$

Pravděpodobná hodnota výsledné veličiny (16) pak bude

$$\overline{u} = u(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)\,. \tag{18}$$

Výsledek zaokrouhlíme jen na tolik platných cifer, kolik je jich odůvodněno výběrovou směrodatnou odchylkou $s_{\overline{u}}$ výsledku. Ta bude řešena v následujících odstavcích – viz rovněž příklady 4 až 7.

Problém řešený v této kap. 4, tj. určování chyb vypočtených veličin, se v literatuře (viz např. [1]) označuje jako *určování chyb nepřímých měření* a zákonitosti, kterými se tyto výpočty řídí, se označují jako *zákony hromadění chyb* (viz např. [9]).

4.2 Horní mez směrodatné odchylky vypočtené veličiny

Nyní provedeme odhad horní meze směrodatné odchylky vypočtené veličiny (18) z výběrových směrodatných odchylek měřených veličin (17). Tyto směrodatné odchylky můžeme považovat za velmi malé odchylky od hodnot příslušných veličin, přičemž jejich vliv na směrodatnou odchylku vypočtené veličiny $\overline{u}$ bude záviset na tom, jaké znaménko a jaká velikost jednotlivé směrodatné odchylky se v určité konfiguraci jednotlivých vlivů uplatní. Nejméně příznivý případ nastane, budeme-li všechny tyto odchylky uvažovat s takovým znaménkem, aby směrodatnou odchylku $s_{\overline{u}}$ vypočtené veličiny vychylovaly na stejnou stranu.

Uvažujme dílčí odchylky dostatečně malé velikosti $s_{\overline{x}}$, $s_{\overline{y}}, \ldots$ Pak horní mez směrodatné odchylky vypočtené veličiny můžeme aproximovat totálním diferenciálem funkce (16) několika nezávisle proměnných (tj. měřených veličin) v okolí uvažovaného bodu (tj. vypočtené pravděpodobné hodnoty veličiny)[3]:

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \; + \ldots$$

Horní mez výběrové směrodatné odchylky vypočtené veličiny určíme tak, že diferenciály nahradíme výběrovými směrodatnými odchylkami měřených veličin a parciální derivace budeme uvažovat kladné, tj. budeme brát jejich absolutní hodnoty. Pak *horní mez směrodatné odchylky vypočtené veličiny* je

$$(s_{\overline{u}})_{\max} = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| s_{\overline{x}} + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| s_{\overline{y}} + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| s_{\overline{z}} + \ldots \qquad (19)$$

Tento výsledek se někdy označuje jako *lineární zákon hromadění chyb*.

Výsledek (19) se používá k výpočtu směrodatné odchylky vypočtené veličiny, jsou-li měření veličin $x, y, z, \ldots$ zatížena *převážně soustavnými chybami* (viz [5]).

---

[3] Zde se setkáváme s operátorem *parciální* (dílčí) *derivace*, např. $\frac{\partial}{\partial x}$. Přitom např. parciální derivace funkce $u = u(x, y, z, \ldots)$ podle x, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, z, \ldots),$$

se provede v souladu s pravidly obyčejné derivace podle x, přičemž nezávisle proměnné $y, z, \ldots$ bereme jako konstanty.

4.3 Směrodatná odchylka vypočtené veličiny

Výsledek (19) popisuje nejméně příznivý případ, kdy se příspěvky chyb jednotlivých měřených veličin absolutně sečtou. Jsou-li měření jednotlivých veličin $x, y, z, \ldots$ zatížena jen (resp. převážně jen) *náhodnými chybami*, existuje určitá pravděpodobnost kompenzace jednotlivých chyb. Počet pravděpodobnosti (viz např. [2]) dospívá užitím metody nejmenších čtverců ke správnějšímu vzorci, který výběrovou směrodatnou odchylku vypočtené veličiny hodnotí příznivěji:

$$\boxed{s_{\overline{u}} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 s_{\overline{x}}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 s_{\overline{y}}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 s_{\overline{z}}^2 + \ldots}} \tag{20}$$

Tento výsledek se někdy označuje jako *kvadratický (Gaussův) zákon hromadění chyb*.

Jsou-li k dispozici výběrové směrodatné odchylky jednotlivých měřených veličin se dvěma platnými ciframi, použijeme je ve vzorci (20) a na jednu cifru zaokrouhlíme až výběrovou směrodatnou odchylku vypočtené veličiny, tj. $s_{\overline{u}}$.

Příklad 4 – směrodatná odchylka aritmetického průměru

Odvoďte vzorec (12) pro výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru (9) za předpokladu n stejně přesných měření, tj. o stejné výběrové směrodatné odchylce s jednoho měření.

Řešení

Vzorec (9) pro aritmetický průměr můžeme v symbolice (16) psát ve tvaru

$$\overline{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n}\,.$$

Protože

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_1} = \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_n} = \frac{1}{n}\,,$$

bude podle vzorce (20) platit

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n^2} s^2 + \frac{1}{n^2} s^2 + \ldots + \frac{1}{n^2} s^2} = \frac{s}{\sqrt{n}}\,,$$

což bylo dokázáno.

4.4 Směrodatná odchylka vypočtené veličiny ve zvláštních případech

4.4.1 Vypočtená veličina je funkcí jediné proměnné

Nechť výsledná veličina u je funkcí jediné proměnné x, tedy $u = u(x)$. Pak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \ldots = 0\,,$$

takže podle vzorce (20) – i podle vzorce (19) – bude

$$s_{\overline{u}} = \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right| s_{\overline{x}}\,. \tag{21}$$

Důležité zvláštní případy:

a) Veličina je násobena konstantou: $u = ax$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a\,, \qquad s_{\overline{u}} = a s_{\overline{x}}\,, \tag{22}$$

neboli směrodatná odchylka vypočtené veličiny je a násobkem směrodatné odchylky měřené veličiny.

Příklad 5 – doba kmitu

Vypočtěte dobu kmitu a její směrodatnou odchylku pro torzní kyvadlo, jehož data jsou zpracována v příkladu 2.

Řešení

Výsledek měření se vztahuje na 100 kyvů, tj. na 50 kmitů. Tedy, v souladu s (22), kde v našem případě je $a = \frac{1}{50}$, dostaneme

$$T = a(100\overline{\tau}) = \left(\frac{186{,}58}{50} \pm \frac{0{,}07}{50}\right)\ \mathrm{s} = (3{,}7316 \pm 0{,}0014)\ \mathrm{s} \doteq (3{,}732 \pm 0{,}001)\ \mathrm{s}\,.$$

(Zaokrouhlení směrodatné odchylky bylo provedeno podle pravidel zaokrouhlování, jak se všeobecně užívá. Serióznější a jistější by ovšem bylo zaokrouhlení nahoru, tj. na 0,002 s, jak opatrný experimentátor raději uvede. Nejjistější je ovšem uvést výsledek na 2 cifry, zejména používá-li se v dalších výpočtech.)

b) Veličina je mocninou měřené veličiny: $u = x^k$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1}\,, \qquad s_{\overline{u}} = kx^{k-1}s_{\overline{x}}\,,$$

což můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\frac{s_{\overline{u}}}{x^k} = k\frac{s_{\overline{x}}}{x}\,, \quad \text{resp.} \quad \overline{\delta}(x^k) = k\overline{\delta}(x)\,, \tag{23}$$

neboli relativní chyba k-té mocniny měřené veličiny je k-násobkem její relativní chyby.

c) Veličina je logaritmem měřené veličiny: $u = \ln|x|$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\,, \qquad s_{\overline{u}} = \frac{s_{\overline{x}}}{x} = \overline{\delta}(x)\,, \tag{24}$$

neboli chyba (směrodatná odchylka) přirozeného logaritmu měřené veličiny je rovna její relativní chybě. Toto zjištění má praktický důsledek: při čtení na logaritmických stupnicích grafů je čtení hodnot logaritmů stejně přesné na všech místech stupnice.

4.4.2 Slučování naměřených veličin

Nechť je výsledná veličina u dána *součtem* nebo *rozdílem* naměřených veličin x, y. Pak

$$u = x \pm y\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \pm 1$$

a podle (20) pro směrodatnou odchylku vypočtené veličiny vychází

$$s_{\overline{u}} = \sqrt{s_{\overline{x}}^2 + s_{\overline{y}}^2}\,, \tag{25}$$

kde $s_{\overline{x}}$, $s_{\overline{y}}$ jsou směrodatné odchylky aritmetických průměrů naměřených veličin. Absolutní chyba rozdílu veličin je tedy stejná jako pro jejich součet. Z toho vyplývá, že rozdíl dvou veličin, jejichž číselná hodnota je blízká, je zatížen velkou relativní chybou. Dále je z (25) zřejmé, že větší chyba prakticky rozhoduje o velikosti výsledné chyby (směrodatné odchylky).

4.4.3 Součin a podíl naměřených veličin

Nechť je výsledná veličina dána funkcí u, v níž se vyskytuje součin a podíl naměřených veličin, např.

$$u = \frac{xy}{z} \equiv xyz^{-1}.$$

Pak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -xyz^{-2}$$

a podle (20) bude pro (výběrovou) směrodatnou odchylku vypočtené veličiny platit

$$s_{\overline{u}} = xyz^{-1}\sqrt{\left(\frac{s_{\overline{x}}}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{y}}}{y}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{z}}}{z}\right)^2},$$

resp.

$$\frac{s_{\overline{u}}}{\overline{u}} = \sqrt{\left(\frac{s_{\overline{x}}}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{y}}}{y}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{z}}}{z}\right)^2} = \sqrt{\overline{\delta}^2(x) + \overline{\delta}^2(y) + \overline{\delta}^2(z)}\,. \tag{26}$$

Z toho vyplývá, že relativní chyba veličiny dané součinem a podílem naměřených veličin, je dána druhou odmocninou ze součtu druhých mocnin relativních chyb naměřených veličin, které tvoří součin nebo podíl.

Zvolíme-li obecnější funkci

$$u = bx_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \ldots x_i^{a_i} \ldots x_k^{a_k}, \tag{27}$$

kde b, $a_i \in R$ jsou konstanty, přičemž $i \in \{1, k\}$. Pak pro relativní směrodatnou odchylku vypočtené veličiny u platí

$$\left(\frac{s_{\overline{u}}}{u}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i \frac{s_i}{x_i}\right)^2. \tag{28}$$

Z tohoto výsledku vyplývá, že je zapotřebí veličinu, jejíž exponent $a_i > 1$, změřit s tolikrát větší relativní přesností, kolikrát je exponent v absolutní hodnotě větší (jinak úsilí, vynaložené na měření jiných veličin, bude neefektivní).

Příklad 6 – tíhové zrychlení

K měření tíhového zrychlení bylo použita metoda matematického kyvadla. Jde jen o přibližnou metodu[4], protože jednak matematické kyvadlo je jen jednoduchým modelem reálného kyvadla, jednak se používá řešení pro dobu τ kyvu

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

platné jen pro úhlové amplitudy φ_0 konvergující k nule (aby relativní soustavná chyba doby τ byla menší než 0,1%, musí být $\varphi_0 < 5°$). Při experimentu bylo použito tzv. sekundové kyvadlo a měření doby kyvu bylo provedeno s dvojí různou přesností. Naměřené veličiny:

$l = (991 \pm 1)$ mm

1) $\tau = (0{,}999 \pm 0{,}006)$ s   2) $\tau = (0{,}999 \pm 0{,}001)$ s.

Vypočtěte tíhové zrychlení včetně absolutní a relativní výběrové směrodatné odchylky, přičemž k výpočtu použijte oba vzorce (19) a (20). Porovnejte vliv přesnosti naměřených veličin l a τ na přesnost výsledku.

Řešení

$$\overline{g} = \pi^2\frac{l}{\tau^2} = 9{,}8004\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

a) Relativní výběrová směrodatná odchylka podle vzorce (19):

$$\frac{s_{\overline{g}}}{\overline{g}} = \frac{s_l}{l} + 2\frac{s_\tau}{\tau}\,.$$

$$1)\ \frac{s_{\overline{g}}}{\overline{g}} = 0{,}00101 + 2\cdot 0{,}00601 = 0{,}01303 \doteq 1{,}3\%\,,$$

$$2)\ \frac{s_{\overline{g}}}{\overline{g}} = 0{,}00101 + 2\cdot 0{,}00100 = 0{,}00301 \doteq 0{,}3\%\,.$$

b) Relativní výběrová směrodatná odchylka podle vzorce (20):

$$\frac{s_{\overline{g}}}{\overline{g}} = \sqrt{\left(\frac{s_l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{s_\tau}{\tau}\right)^2}\,.$$

[4] Vhodnější je použít k měření reverzní kyvadlo – viz [1], [2].

$$1)\ \frac{s_{\overline{g}}}{\overline{g}} = \sqrt{0{,}00101^2 + (2\cdot 0{,}00601)^2} = 0{,}0121 \doteq 1{,}2\%,$$

$$2)\ \frac{s_{\overline{g}}}{\overline{g}} = \sqrt{0{,}00101^2 + (2\cdot 0{,}00100)^2} = 0{,}0022 = 0{,}22\%,$$

Z výpočtů je zřejmé, že určující pro směrodatnou odchylku výsledku – velikosti tíhového zrychlení – je směrodatná odchylka měřené doby kyvu, zejména v prvém případě. Dále je zřejmé, že rozdíly v hodnocení přesnosti podle vzorců (19) a (20) nejsou výrazné, přičemž hodnocení podle vzorce (20) je správnější a příznivější. Výsledky podle vzorce (20):

1) $g = (9{,}8 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,
2) $g = (9{,}80 \pm 0{,}02)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Příklad 7 – modul pružnosti ve smyku

Při určování modulu pružnosti ve smyku G oceli dynamickou metodou se využívá závislosti periody T torzních kmitů tělesa (o momentu setrvačnosti J) zavěšeného na drátě (o délce l a poloměru r) na modulu G oceli, z níž je vyroben drát. Nechť zavěšeným tělesem je válec, pak $J = \frac{1}{2}mR^2$. Z teorie torzních kmitů a teorie pružnosti vychází funkční závislost

$$G = \frac{8\pi l J}{r^4 T^2} = \frac{4\pi l m R^2}{r^4 T^2}\,.$$

Měřením jednotlivých veličin byly získány tyto hodnoty:

$l = (519{,}9 \pm 0{,}1)$ mm – viz příklad 1,
$m = 4{,}795$ kg – považujte za přesnou hodnotu,
$R = (46{,}41 \pm 0{,}02)$ mm,
$r = (0{,}491 \pm 0{,}001)$ mm,
$T = (3{,}732 \pm 0{,}001)$ s – viz příklady 2 a 5.

Vypočtěte modul pružnosti ve smyku včetně absolutní a relativní výběrové směrodatné odchylky.

Řešení

$\overline{G} = 8{,}3355 \cdot 10^{10}$ Pa,

$$s_{\overline{G}} = G\sqrt{\left(\frac{s_{\overline{l}}}{l}\right)^2 + \left(2\frac{s_{\overline{R}}}{R}\right)^2 + \left(4\frac{s_{\overline{r}}}{r}\right)^2 + \left(2\frac{s_{\overline{T}}}{T}\right)^2}, \quad s_{\overline{G}} = 6{,}84\cdot 10^8\ \mathrm{Pa}\,,$$

$G = (8{,}34 \pm 0{,}07)\cdot 10^{10}$ Pa, relativní chyba $\overline{\delta}(G) = \frac{s_{\overline{G}}}{G} = 0{,}8\%$.

Určující pro směrodatnou odchylku G je zřejmě směrodatná odchylka pro poloměr r drátu.

5 Grafická analýza dat měření

5.1 Graf funkční závislosti měřených veličin

Měříme-li funkční závislost dvou fyzikálních veličin, můžeme provést analytické zpracování této závislosti (viz kap. 6) anebo přehlednější, avšak méně přesnější vyjádření grafické. Označme uvažované fyzikální veličiny x, y a jejich (neznámou) funkční závislost $y = f(x)$. Při měření získáme n dvojic odpovídajících si hodnot $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$,. . . ,$[x_n, y_n]$ zatížených chybami měření.

Ke grafickému znázornění se nejčastěji užívá pravoúhlý souřadnicový (kartézský) systém, i když lze užít i jiný systém, např. polární, je-li to výhodné. V dalším textu budeme uvažovat jen systém pravoúhlý. V něm každé dvojici naměřených hodnot $[x_k, y_k]$ přiřadíme bod. Tím získáme n bodů, které tvoří *bodový graf*. Z něj budeme vycházet při konstrukci *spojitého grafu* hledané funkční závislosti.

Je-li fyzikální veličina (y) funkcí dvou (x, z) nebo i více veličin, vznikají při grafickém znázornění závislostí potíže. Ke znázornění závislosti $y = f(x, z)$ by bylo zapotřebí „prostorový graf“. V praxi se to obchází dvěma způsoby. Počítačové grafické programy umožňují názorné trojrozměrné (3D) zobrazení funkcí $y = f(x, z)$ na dvojrozměrné ploše. Těmito programy mohou být vybaveny nejen počítače třídy PC, nýbrž obsahují je i kapesní „vědecké“ grafické kalkulátory (např. TI 89/92, HP 86). Toto 3D zobrazení slouží však spíše k získání názoru na průběh funkce, než ke kvantitativnímu řešení problému. Druhou – seriózní – možností zobrazení je dvojrozměrné zobrazení takové funkce, necháme-li jednu z nezávisle proměnných konstantní – při volbě jejich konstantních hodnot ve zvolené řadě. Pak vlastně dostaneme sérii řezů prostorového grafu – např. rovinami $x = konst.$, $z = konst.$ nebo i $y = konst.$. Např. hustota plynu je popsána funkcí $\varrho = f(p, T)$. Můžeme kreslit graf $\varrho = f(p)$ pro T_1, T_2, T_3, . . . , nebo $\varrho = f(T)$ pro p_1, p_2, p_3, . . . , případně zkoumat závislost $p = f(T)$ pro ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ... Příkladem takového grafu je obr. 1.

Dosud jsme (mlčky) předpokládali, že průběh fyzikálních dějů se dá graficky znázornit spojitou „hladkou“ čarou (tj. včetně spojité první derivace). Spojitý průběh (tj. bez diskrétních nespojitostí) má většina fyzikálních dějů. Jisté děje mohou probíhat nespojitě (např. ty, které souvisí s počtem částic, ale i zde, je-li tento počet velký, je znázorňujeme spojitě).

5.2 Stupnice

Tvar grafu vyšetřované funkční závislosti výrazně ovlivňuje volba stupnice na souřadnicové ose (nositelce). Jde o vzájemné přiřazení polohy ξ bodu na ose a zobrazované veličiny x podle rovnice

$$\xi = \Lambda f(x), \tag{29}$$

kde Λ je *modulová míra*, která slouží k převodu zobrazované veličiny (ve zvolených jednotkách nebo jejich násobcích) na délku (volíme ji v mm), např. 1 N $\sim$ 10 mm ($\Lambda = 10\ \mathrm{mm} \cdot \mathrm{N}^{-1}$) nebo 10 K $\sim$ 1 mm ($\Lambda = \dfrac{1}{10}\ \mathrm{mm} \cdot \mathrm{K}^{-1}$). Funkce $f(x)$ je monotónní a určuje průběh zobrazení na stupnici, přičemž x je číselná hodnota zobrazované veličiny v uvažovaných jednotkách. Prakticky přicházejí v úvahu tyto funkce:

1.	lineární	$f(x) = a + bx$	(rovnoměrná stupnice),
2.	logaritmická	$f(x) = a + b\log x$	
	nebo	$f(x) = a + b\ln x$	(logaritmická stupnice),
3.	kvadratická	$f(x) = a + bx^2$	(kvadratická stupnice),
4.	lineárně lomená	$f(x) = a + \dfrac{b}{x}$	(lineárně lomená stupnice),

přičemž $b \neq 0$ a konstanta $a \geq 0$ určuje hodnotu zobrazované veličiny v uvažovaném počátku stupnice. Příkladem grafu s logaritmickou stupnicí je obr. 3.

Rovnice (29) je *zobrazovací rovnicí zobrazované veličiny* (x) *a určuje její kótu* (ξ) *na stupnici*. Ke snažšímu kreslení grafů se užívají *speciální grafické papíry*. Nejčastěji jsou to *milimetrový papír* s rovnoměrnými stupnicemi v milimetrech, *logaritmický papír* s oběma stupnicemi logaritmickými dekadickými a *semilogaritmický papír*, který má jednu stupnici logaritmickou a druhou rovnoměrnou.

Nejčastěji se užívá rovnoměrná stupnice, protože je nejjednodušší. Tato stupnice ovšem není vždy nejvýhodnější. Jde nám o to, aby průběh zobrazované veličiny (tj. funkční křivka – graf) byl co nejjednodušší, nejlépe lineární. Ukážeme si to na následujícím jednoduchém příkladě.

Příklad 8 – volný pád

Určete užitím grafu $s = f(t)$ tíhové zrychlení z naměřených hodnot veličin – dráhy s a doby t volného pádu olověné kuličky (olověné proto, aby bylo možné zanedbat odpor vzduchu). Naměřené veličiny jsou v tab. 4. Uvedená data můžeme ještě doplnit o bod $s = 0$ m pro $t = 0$ s, který je zřejmý jak z teorie, tak z empirie.

Tab. 4 Data měření volného pádu

$\frac{s}{\mathrm{m}}$	4,00	5,20	6,00	7,00	8,00	9,00	10,0	11,0
$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0,90	1,03	1,10	1,20	1,28	1,35	1,43	1,50

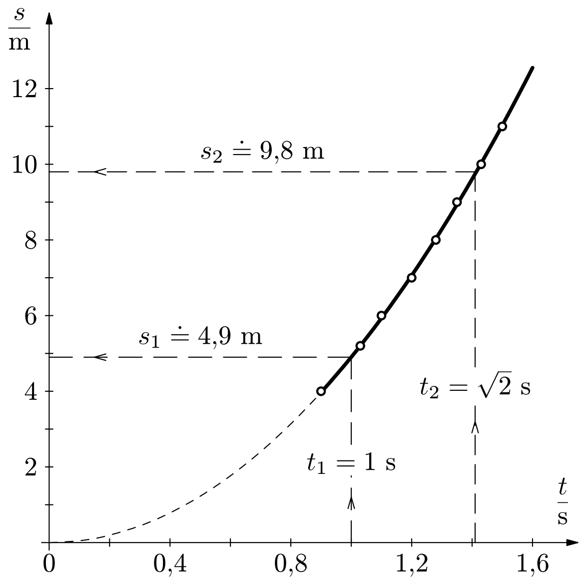
Poznámka: V příkladě 15 je využito těchto dat k řešení tíhového zrychlení regresní analýzou.

Řešení

Pro dráhu volného pádu tělesa při zanedbání odporu vzduchu platí

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Při analytickém řešení bychom z tohoto vztahu určili $g = f(s,t) = \frac{2s}{t^2}$, dosazením bychom dostali 8 hodnot a určili bychom aritmetický průměr včetně výběrové směrodatné odchylky (viz úlohu 5). Znázorníme-li naměřené hodnoty do grafu s rovnoměrnými stupnicemi, dostaneme (přibližně) oblouk paraboly (viz obr. 4).



Parametry této paraboly (např. poloha ohniska) jsou závislé na g, avšak určují se nesnadno a nepřesně. Tíhové zrychlení lze z tohoto grafu určit interpolací – pro $t_1 = 1{,}0$ s je $s_1 \doteq 4{,}9$ m a $g = \frac{2s_1}{t_1^2} = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ nebo pro $t_2 = \sqrt{2}$ s je $s_2 \doteq 9{,}8$ m a $g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

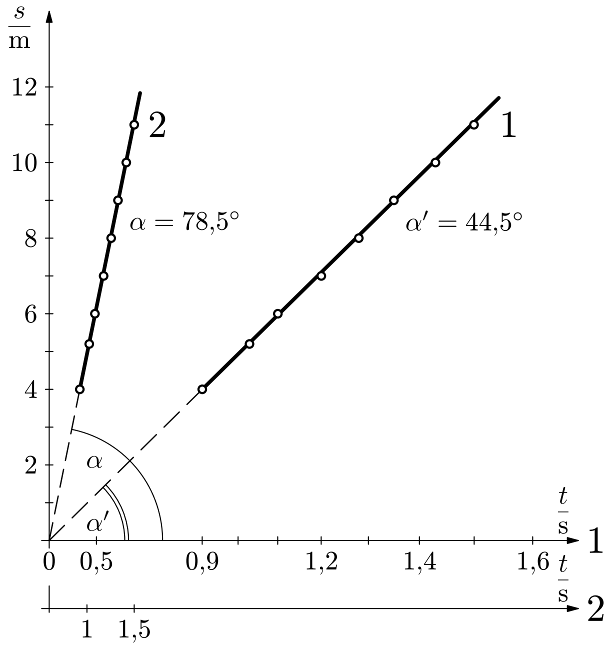
Obr. 4 Graf závislosti $s = f(t)$ pro volný pád; obě stupnice jsou rovnoměrné

Zvolíme-li však osu úseček (tj. osu x) kvadratickou, tj. užijeme-li funkci $f(x) \equiv f(t) = t^2 = z$, bude

$$s = \frac{g}{2}z$$

a grafem této funkce je přímka o směrnici $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\{g\}}{2}$ (viz obr. 5). Pak $\{g\} = 2\operatorname{tg}\alpha$. Chceme-li ovšem v grafu přímo měřit úhel α, musíme zvolit pro jednotky obou veličin, tedy pro $[s] = 1$ m a pro $[t] = 1$ s, stejnou modulovou míru. Např. $\varLambda_s = 5\ \mathrm{mm\cdot m^{-1}}$, $\varLambda_t = 5\ \mathrm{mm\cdot s^{-1}}$. Potom však může vyjít úhel α nevhodné velikosti. Na obr. 5, kde je u stupnice **2** zvolen zde uvedený modul, vychází $\alpha \approx 78°$. Výhodnější je zvolit modul pro t tak, aby $\alpha' \approx 45°$, např. $\varLambda'_t = 25\ \mathrm{mm\cdot s^{-1}}$, což je u stupnice **1**. Pak je ovšem třeba úhel α' přepočítat podle vztahu

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varLambda_s}{\varLambda'_t}\operatorname{tg}\alpha'.$$



Přepočet:
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\varLambda_s}{\varLambda'_t}\operatorname{tg}\alpha'$
$\operatorname{tg}\alpha = 5\operatorname{tg}44{,}5°$
$\operatorname{tg}\alpha = 4{,}91$
$\alpha = 78{,}5°$
$\{g\} = 2\cdot\operatorname{tg}\alpha = 9{,}82$

Obr. 5 Graf $s = f(t)$ pro volný pád; stupnice pro t je kvadratická

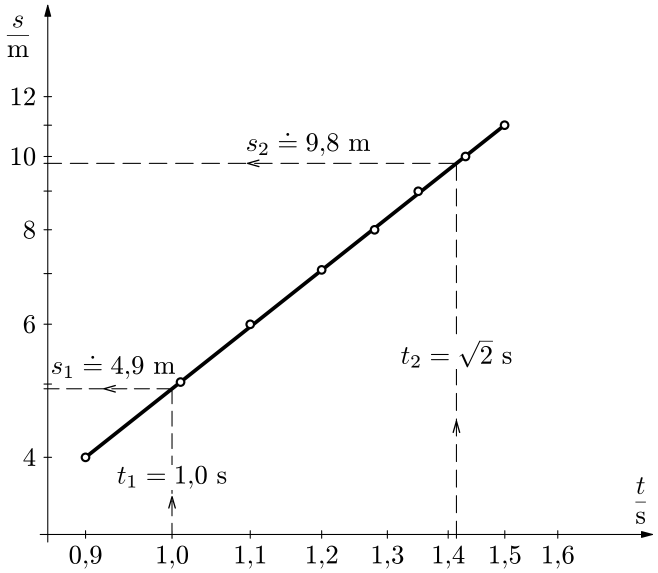
Nejvýhodnější je graf vyjádřit v logaritmických stupnicích. Pak

$$\log\{s\} = 2\log\{t\} + \log\frac{\{g\}}{2},$$

a grafem je opět přímka. Naměřené hodnoty vyneseme do grafu a body proložíme přímku (obr. 6). Tíhové zrychlení se určí z úseku b, který přímka vytíná na ose souřadnic (tj. na ose y) pro $\log t = 0$, tedy pro $t_1 = 1$ s. Úsek lze číst na logaritmické stupnici jako $s_1 = 4{,}9$ m. Pak

$$\{g\} = 2\{s_1\} = 2 \cdot 4{,}9 = 9{,}8.$$

Po doplnění jednotek $g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.
Pro $t_2 = \sqrt{2}$ s dostaneme analogicky $\{g\} = \{s_2\} = 9{,}8$; tj. $g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 6 Graf $s = f(t)$ pro volný pád; obě stupnice jsou logaritmické

5.3 Zobrazování funkcí lineárním grafem

V grafu s logaritmickými stupnicemi lze zobrazit lineárním grafem i složitější funkce než je kvadratická funkce, prezentovaná v příkladu 8. Uvažujme dvě obecněji definované funkce

$$y = ax^m,$$

$$y = ac^{bx},$$

kde a, b, c, $m = konst.$

Logaritmováním dostaneme

$$\log y = \log a + m \log x \,,$$

$$\log y = \log a + (b \log c) x \,.$$

První funkce se zobrazí jako přímka na logaritmickém a druhá na semilogaritmickém papíře.

Uvažujme nyní poměrně složitou funkci (4), která je analytickým vyjádřením Gaussova rozložení. Jejím logaritmováním obdržíme

$$\ln p = \ln \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right) - h^2 \varepsilon^2 \,.$$

Zavedeme-li substitucí nové proměnné

$$\ln p = y, \quad \varepsilon^2 = x \,,$$

dostaneme lineární závislost

$$y = \ln \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right) - h^2 x \,,$$

která se zobrazí jako přímka na tzv. pravděpodobnostním papíře. U něj je osa úseček (tj. vodorovná osa x) kvadratická a osa pořadnic (tj. svislá osa y) logaritmická.

Hyperbolická funkční závislost typu

$$y = \frac{ax}{b + cx} \tag{30}$$

se dá převést na lineární, když budeme psát výrazy v převráceném (reciprokém tvaru), tj.

$$\frac{1}{y} = \frac{c}{a} + \frac{b}{a} \frac{1}{x} \,. \tag{31}$$

Funkci znázorníme jako přímku, když na osy naneseme reciproké hodnoty veličin x, y.

Transformace různých závislostí na lineární grafy má pro posuzování výsledku měření veliký význam, neboť snadno můžeme z grafu experimentálně získaných hodnot posoudit, do jaké míry se odchyluje od teoretického lineárního průběhu.

5.4 Zásady kreslení grafů z dat měření

Z grafů na obr. 4 až 6 jsme si mohli všimnout některých významných zásad, které je nutné dodržovat při kreslení grafů.

1. Posoudíme průběh závislosti měřených veličin a rozhodneme se pro *typ stupnice* grafu.

2. Zhodnotíme rozsah hodnot měřených veličin, zvolíme *počátek* stupnice (nemusí být nula) a vhodnou *modulovou míru* tak, aby byla využita podstatná část stupnice – tak bude nakreslený graf pokrývat významnou část plochy vymezenou osami.

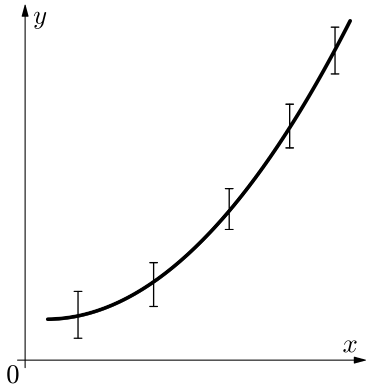
3. Máme-li k dispozici vhodný *grafický papír* (milimetrový, logaritmický), použijeme jej; tím si zjednodušíme úkol. Nemáme-li jej k dispozici, vystačíme u rovnoměrné stupnice se dvěma trojúhelníky (u nelineárních stupnic ještě s kalkulátorem) a tužkou.

4. Nakreslíme osy, *vytvoříme stupnice* příslušných fyzikálních veličin ve zvolených jednotkách (nebo jejich násobcích) a *popíšeme osy*. Protože do grafu vynášíme číselné hodnoty, popíšeme osy značkou veličiny dělenou jednotkou (např. $\dfrac{R}{\mathrm{k}\Omega}$, jde-li o elektrický odpor v kΩ).

5. Pečlivě *vyneseme* do vymezené plochy *hodnoty naměřených veličin* a body řádně vyznačíme kroužkem nebo jinou značkou. Jde-li o různé závislosti v jednom grafu, užijeme různých značek. Např. $\circ$, $\odot$, $\triangle$, $\diamond$, $+$, $\times$, $\bullet$ aj. Po vykreslení čáry grafu tyto značky neodstraňujeme, neboť dávají přehledný obraz o měření (o jeho přesnosti, rozptylu). Tvoří tzv. *bodový graf* měřených (empirických) hodnot.

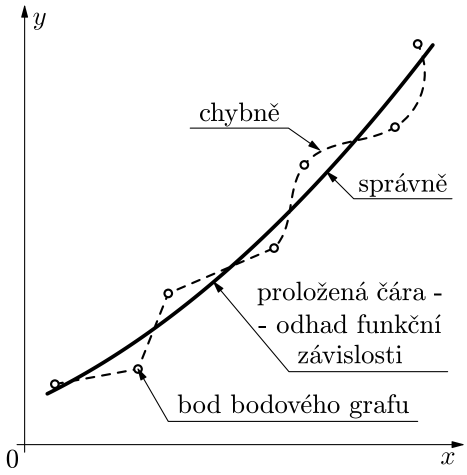
Vybočuje-li některý z bodů významně z řady, může to mít několik příčin: hrubou chybu při vynášení do grafu (opravíme), chybu při měření (po ověření vynecháme), nebo může jít o hrubé měření složitějšího jevu (např. rezonančního). Jde-li o tento případ, je zapotřebí další pečlivé proměření daného úseku závislosti.

Máme-li k jednotlivým veličinám vypočteny i výběrové směrodatné odchylky, vyneseme hodnoty veličiny včetně těchto odchylek – ve formě svislých úseček (I) – viz obr. 7. Získáme tím lepší obraz o přesnosti měření.



Obr. 7 Graf s vyznačením směrodatných odchylek

6. *Proložíme čáru grafu měřenými body*, přičemž průběh čáry jen odhadneme. Měření je, jak víme, provázeno chybami a čára toto měření vyrovnává. Nesprávné je proto přímé spojování těchto bodů ať již čarou lomenou nebo zvlněnou (viz obr. 8). K přesnému vyrovnávání průběhu závislosti měřené veličiny byly vypracovány různé metody analytické nebo grafické (viz např. [2]), založené na metodě nejmenších čtverců. Dnešní úroveň zpracování výsledků měření regresní analýzou využitím PC nebo kalkulátorů využívání těchto metod již potlačila.



Obr. 8 Prokládání čáry grafu měřenými body

5.5 Využití grafů k řešení fyzikálních problémů

5.5.1 Interpolace a extrapolace průběhu funkční závislosti fyzikálních veličin

Měřením získáme n-tici bodů průběhu funkční závislosti, které nám umožní nakreslit nejprve bodový a poté spojitý graf závislosti veličin. Tím, že n-tici diskrétních hodnot nahradíme vyrovnaným grafem, provádíme *interpolaci* průběhu v bodech, ve kterých jsme měření neprováděli. Omezeně, s větší nejistotou, můžeme *extrapolovat* průběh grafu do bodů ležících vlevo nebo vpravo od okraje intervalu měření nezávisle proměnné. Tato extrapolace je méně riskantní u průběhů lineárních v rovnoměrné stupnici, nebo u průběhů, které se lineárnímu průběhu blíží (tj. u funkcí, u nichž je malá změna i první derivace funkce).

Příklad 9 – závislost elektrického odporu na teplotě

Výsledky měření elektrického odporu vodiče v závislosti na teplotě jsou uvedeny v tab. 5.

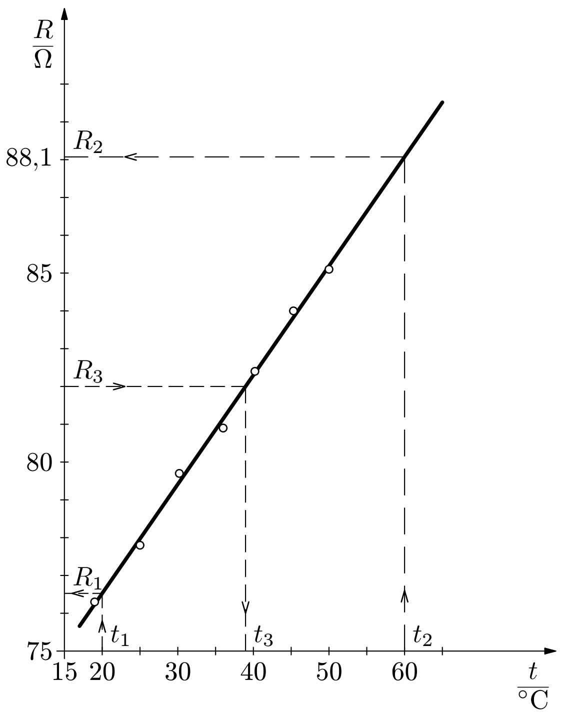
Tab. 5 Data měření elektrického odporu

$\frac{t}{°C}$	19,0	25,0	30,2	36,0	40,2	45,3	50,0
$\frac{R}{\Omega}$	76,3	77,8	79,7	80,9	82,4	84,0	85,1

a) Nakreslete graf závislosti odporu R na teplotě t.
b) Určete odpor, který bude odpovídat teplotám $t_1 = 20{,}0\ °C$ a $t_2 = 60{,}0\ °C$.
c) Určete, při jaké teplotě t_3 bude mít vodič odpor $R_3 = 82{,}0\ \Omega$.
(V příkladě 13 je tato úloha řešena ještě regresní analýzou.)

Řešení

Viz obr. 9, přičemž při řešení pro teploty t_3 a t_1 jde o interpolaci a pro t_2 o extrapolaci.



$t_1 = 20{,}0\ °C$
$R_1 = 76{,}5\ \Omega$

$t_2 = 60{,}0\ °C$
$R_2 = 88{,}1\ \Omega$

$R_3 = 82{,}0\ \Omega$
$t_3 = 39{,}0\ °C$

Obr. 9 Graf závislosti elektrického odporu $R = f(t)$

5.5.2 Empirické fyzikální zákonitosti

Někdy jsme postaveni před úkol analyticky vyjádřit zákonitost průběhu dvou vzájemně podmíněných fyzikálních veličin na základě naměřených hodnot. Je zřejmé, že nejrychlejší názor na povahu hledané závislosti nám poskytne graf. Je výhodné vyzkoušet, jak bude graf probíhat při použití různých stupnic, zejména stupnice logaritmické. Můžeme se dopracovat i k (přibližně) lineárnímu průběhu a pak je již poměrně snadné vyjádření analytické. Vhodné je poté nakreslit do bodového grafu, vytvořeného z experimentálních hodnot, graf analytické funkce a posoudit shodu a případné odchylky. Podrobnější popis metod na určení typu měření závislosti můžeme najít v [2]. Na druhé straně již v současné době existují tzv. *genetické programy* pro PC, které po vložení experimentálních dat do počítače vygenerují vhodnou analytickou funkční závislost. Problém lze rovněž velmi úspěšně řešit *regresní analýzou* (viz kap. 6).

Na mezinárodní fyzikální olympiádě se občas vyskytne experimentální úloha, jejímž cílem je najít empirickou fyzikální zákonitost. Příkladem je 26. MFO v Austrálii v r. 1995, na které měli řešitelé provést **experimentální výzkum odporu prostředí** (konkrétně glycerínu) při pohybu válečku o průměru rovnému výšce h, který se pohyboval malou rychlostí (za laminárního obtékání) kolmo k ose válečku. Měla se provést modifikace klasického Stokesova vztahu pro sílu $F = 6\pi\eta r v$, platného pro kouli o poloměru r, který se pro případ válce o poloměru $r = \dfrac{h}{2}$ očekával ve tvaru $F_{\mathrm{v}} = 6\pi k\ \eta\ r^m v$. K tomu byl k dispozici odměrný válec s glycerínem, délkové měřítko, stopky a válečky ze čtyř různých materiálů (ocel, měď, titan, hliník) o známých hustotách a čtyřech známých průměrech (10, 8, 5 a 4 mm). Z pádu válečku v glycerínu ustálenou mezní rychlostí se měřila doba pádu z určité výšky. Z grafu doby pádu v závislosti na průměru $2r$ (v grafu s logaritmickými stupnicemi šlo o přímku) se zjistilo, že $m = 1{,}33 = \dfrac{4}{3}$. Vedlejším úkolem bylo ještě určení hustoty glycerínu.

5.5.3 Grafická analýza průběhu funkční závislosti veličin

Z grafického průběhu (tj. z křivky grafu) experimentálně zjišťovaných závislostí fyzikálních veličin můžeme nejen okamžitě posoudit charakteristiku probíhajících změn, ale můžeme provést i hlubší grafickou analýzu:

- průběh derivace křivky funkční závislosti,
- určení extrémů a inflexí,
- grafickou integraci.

Grafická derivace se provede tak, že se ve zvoleném bodě křivky nakreslí tečna a určí se její směrnice. *Extrém funkce* nastává, když směrnice tečny je nulová, tj. když tečna je rovnoběžná s osou úseček. V *inflexním bodě* se mění znaménko křivosti grafu se spojitou první derivací. Hledáme jej tak, aby přímka tečně vedená tímto bodem rozdělila křivku tak, že oblouk křivky bude z jedné strany vypuklý a ze druhé strany vydutý nebo obráceně.

Grafická integrace spojité funkce $y = f(x)$ se provede tak, že se určí plošný obsah plochy vymezené čarou grafu funkce, osou úseček (x) a pořadnicemi vedenými v bodech mezí integrálu, tj. např. $x = a$, $x = b$ – viz příklad 11.

Provedení grafické analýzy je často součástí řešení experimentálních úloh na mezinárodních olympiádách. Uvedu jednu úlohu z MFO v Číně (příklad 10) a v USA (příklad 11).

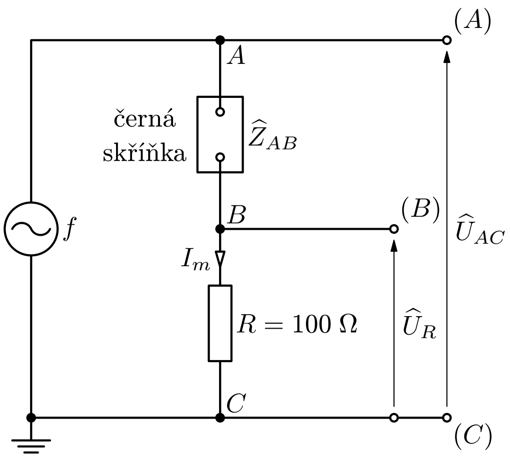
Příklad 10 – černá skříňka (25. MFO v Číně r. 1994)

Je dána „černá skříňka“ se dvěma svorkami, která neobsahuje více než tři pasívní elektrické prvky. Určete hodnoty veličin těchto prvků a nakreslete schéma obvodu mezi svorkami skříňky, přičemž se skříňka nesmí otevřít.

Jsou k dispozici tyto přístroje: dvoukanálový osciloskop (umožňující měřit amplitudu napětí), tónový generátor, rezistor o odporu $R = (100 \pm 0{,}5)\ \Omega$, spojovací kabely a grafické papíry (logaritmický, semilogaritmický, milimetrový).

Řešení

a) Tónový generátor použijeme jako zdroj střídavého proudu, jehož frekvenci i napětí můžeme měnit. Měření amplitudy napětí a (hrubé) určení fázového posuvu dvou signálů umožňuje osciloskop. Schéma zapojení je na obr. 10. Předpokládáme, že černá skříňka obsahuje cívku, kondenzátor a rezistor blíže neurčeného spojení a že má impedanci $\widehat{Z}_{AB}$ závislou na frekvenci f tónového generátoru.



Obr. 10 Schéma zapojení pro měření černé skříňky

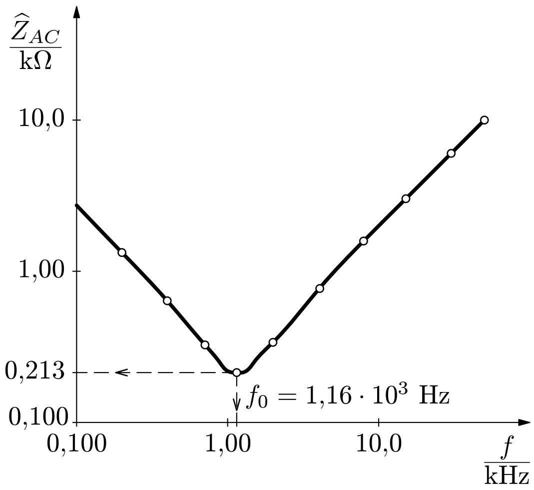
b) Měříme amplitudy napětí U_R, U_{AC} osciloskopem v závislosti na frekvenci f. Označíme-li I_m amplitudu proudu a $\widehat{Z}_{AC}$ celkovou impedanci obvodu, dostaneme vztahy

$$I_\mathrm{m} = \frac{U_R}{R}, \quad |\widehat{Z}_{AC}| = \frac{U_{AC}}{I_m} = \frac{U_{AC}}{U_R} R,$$

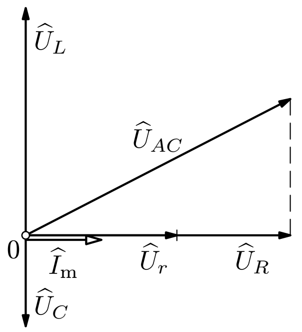
které umožňují určit $|\widehat{Z}_{AC}|$ prostřednictvím měřených amplitud napětí. Měření provedeme pro sérii volených frekvencí $f \in \{100\ \mathrm{Hz};\ 50{,}0\ \mathrm{kHz}\}$, zaznamenáváme do tabulky (tab. 6). Vypočtenou impedanci $|\widehat{Z}_{AC}|$ v závislosti na frekvenci f vyneseme do grafu (nejvýhodněji s logaritmickými stupnicemi) – – viz obr. 11.

Tab. 6 Data měření černé skříňky

$\frac{f}{\mathrm{kHz}}$	$\frac{U_{AC}}{\mathrm{mV}}$	$\frac{U_R}{\mathrm{mV}}$	$\frac{\lvert\widehat{Z}_{AC}\rvert}{\mathrm{k\Omega}}$
0,100	600	22,0	2,73
0,200	600	45,0	1,33
0,400	600	94,0	0,638
0,700	300	92,0	0,326
0,900	300	121	0,248
1,00	300	136	0,220
1,10	300	140	0,214
1,16	300	141	0,213
1,25	300	140	0,214
1,50	300	120	0,250
2,00	300	88,0	0,341
4,00	300	78,0	0,769
8,00	600	38,0	1,58
15,0	600	20,0	3,00
30,0	600	10,0	6,00
50,0	600	6,0	10,0



Obr. 11 Závislost impedance černé skříňky na frekvenci napětí



Obr. 13 Fázorový diagram obvodu z obr. 12

c) Závislost impedance na frekvenci má minimum $|\widehat{Z}_{AC}|_{\min} = 213\ \Omega$ při $f_0 = 1160$ Hz. Jde zřejmě o *jev sériové rezonance* – schéma zkoumaného obvodu mezi svorkami A, B skříňky je na obr. 12.

d) Pro amplitudu napětí U_{AC} platí (obr. 13)

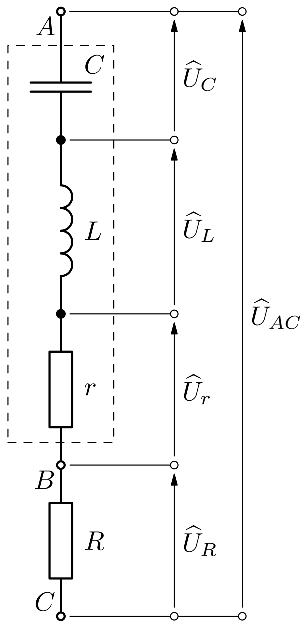
$$U_{AC} = \sqrt{(U_r + U_R)^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

Při rezonanci je $U_C = U_L$, tedy

$$(U_{AC})_0 = U_r + U_R = (r + R)I_0 = (r + R)\frac{(U_R)_0}{R},$$

kde I_0 je amplituda proudu při rezonanci. Pak

$$r = R\left[\frac{(U_{AC})_0}{(U_R)_0} - 1\right] = 113\ \Omega.$$

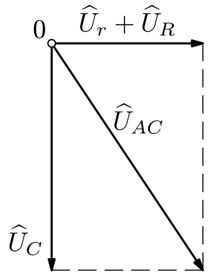


Obr. 12 Schéma obvodu černé skříňky

e) Při nízké frekvenci $f \ll f_0$ je

$$U_L = \omega L \cdot I_{\mathrm{m}} \to 0$$

a obvod se chová jako sériový obvod RC, přičemž napětí U_C je fázově opožděno oproti $(U_r + U_R)$ o $\frac{\pi}{2}$ (viz obr. 14).



Obr. 14 Fázory napětí u obvodu RC

Pak napětí

$$U_C = \sqrt{U_{AC}^2 - (U_r + U_R)^2},$$

$$U_C = \sqrt{U_{AC}^2 - \left(\frac{r}{R} + 1\right)^2 U_R^2}$$

a kapacitance

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I},$$

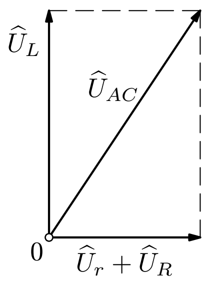
$$X_C = R\sqrt{\left(\frac{U_{AC}}{U_R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R} + 1\right)^2}.$$

Odtud

$$\frac{1}{C} = 2\pi f R\sqrt{\left(\frac{U_{AC}}{U_R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R} + 1\right)^2}, \qquad (f \ll f_0).$$

Pro $f = 100\,\mathrm{Hz}$ (viz tab. 6) vychází $C = 585\,\mathrm{nF}$.

f) Při velmi vysoké frekvenci $(f \gg f_0)$ je



Obr. 15 Fázory napětí u obvodu RL

$$U_C = X_C I = \frac{I}{\omega C} \to 0$$

a obvod se chová jako sériový obvod RL, přičemž napětí U_L fázově předbíhá napětí $(U_r + U_R)$ o $\frac{\pi}{2}$ (viz obr. 15). Pak napětí na indukčnosti

$$U_L = \sqrt{U_{AC}^2 - (U_r + U_R)^2},$$

$$U_L = \sqrt{U_{AC}^2 - \left(\frac{r}{R} + 1\right)^2 U_R^2}$$

a induktance

$$X_L = \omega L = \frac{U_L}{I} = R\sqrt{\left(\frac{U_{AC}}{U_R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}+1\right)^2}.$$

Z toho indukčnost

$$L = \frac{R}{2\pi f}\sqrt{\left(\frac{U_{AC}}{U_R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}+1\right)^2}, \qquad (f \gg f_0).$$

Pro $f = 50{,}0$ kHz (viz tab. 6) vychází $L = 31{,}8$ mH.

Poznámka: Úkolem studentů bylo provést ještě přibližné *odhady* chyb měření. Protože však pro seriózní výpočet výběrových standardních odchylek nejsou k dispozici potřebné originální experimentální údaje (např. hodnoty veličin při opakovaných měřeních a přesnost měřicích přístrojů), problémem přesnosti měření se zde nebudeme zabývat.

Příklad 11 – měrné skupenské teplo varu dusíku (24. MFO v USA r. 1993)

Úkolem je určit měrné skupenské teplo varu l_v tekutého dusíku, přičemž je známo, že teplota varu dusíku je $t_\mathrm{N} = -195{,}8\ ^\circ\mathrm{C} = 77{,}4$ K. Z hlediska přívodu skupenského tepla varu jsou uvažovány dvě metody.

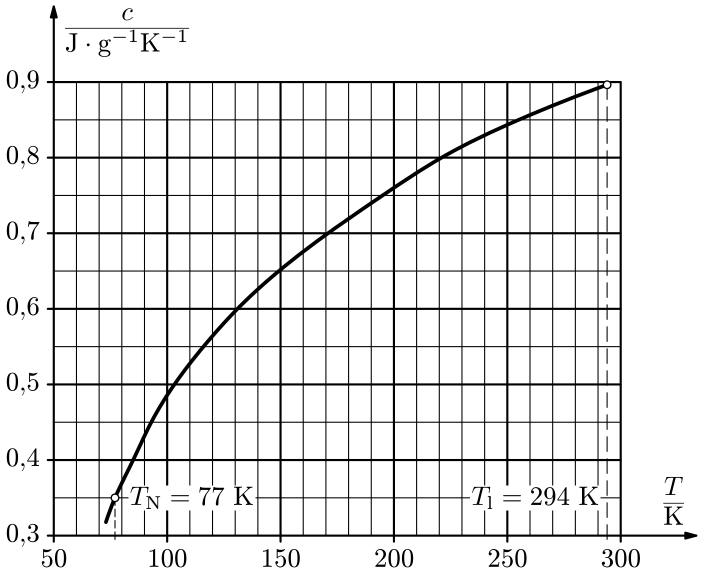
1. Nositelem tepla je hliníkové tělísko, které se ponoří do dusíku a za probíhajícího varu se ochladí z laboratorní teploty $t_\mathrm{l} = 21\ ^\circ\mathrm{C}$ na teplotu varu kapalného dusíku.

2. Využije se Jouleovo teplo, které vyvine rezistor, ponořený do dusíku, po připojení k elektrickému článku.

Je dáno:

a) Hliníkový váleček o hmotnosti $m_\mathrm{v} = 19{,}4$ g a měrné tepelné kapacitě c, která závisí na teplotě podle obr. 16.

b) Rezistor o odporu $R = 23{,}0\ \Omega$ při teplotě 77 K, zdroj stejnosměrného proudu, multimetr (voltmetr, ampérmetr). Dále jsou k dispozici digitální stopky, torzní váhy, polystyrénová nádoba s tekutým dusíkem a popis přísných pravidel práce s touto nebezpečnou kapalinou.



Obr. 16 Závislost měrné tepelné kapacity hliníku na teplotě

Řešení

1. Dusík se v důsledku velkého teplotního rozdílu

$$T_\mathrm{l} - T_\mathrm{N} = 217\,\mathrm{K}$$

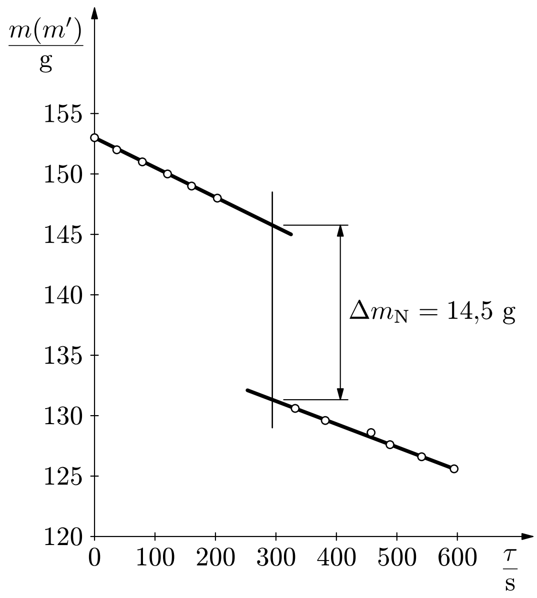
rychle vypařuje. Proto je nutné nejprve sledovat samovolný úbytek hmotnosti dusíku v nádobě. Nádobu s dusíkem postavíme na váhy a sledujeme časovou závislost úbytku celkové hmotnosti m (viz tab. 7).

Po odečtení několika (šesti) údajů hmotnosti opatrně ponoříme do dusíku hliníkový váleček. Nastane prudký var. Po jeho zklidnění měříme opět celkovou hmotnost v závislosti na čase.

Tab. 7 Data měření úbytku hmotnosti dusíku vypařováním a varem při první metodě

celk. hm. $\frac{m}{\mathrm{g}}$	korig. hm. $\frac{m' = m - m_\mathrm{v}}{\mathrm{g}}$	čas $\frac{\tau}{\mathrm{s}}$
153		0
152		36,8
151		79,1
150		120,7
149		160,5
148		203,1
ponoření válečku – prudký var		
150	130,6	331,8
149	129,6	381,6
148	128,6	457,3
147	127,6	488,6
146	126,6	540,9
145	125,6	594,6

Závislost úbytku hmotnosti nádoby daná úbytkem hmotnosti dusíku je obr. 17.



Obr. 17 Graf závislosti úbytku hmotnosti dusíku na čase při první metodě

Úbytek hmotnosti v důsledku samovolného vypařování probíhá podle (přibližně) rovnoběžných přímek. Rozdíl pořadnic těchto přímek dává úbytek hmotnosti dusíku při varu podmíněném okamžitým přívodem tepla (rozdílem vnitřní energie válečku před jeho ponořením a po jeho ponoření a vyrovnání teplot). Protože měrná tepelná kapacita c hliníku je funkcí teploty (obr. 16), je přivedené teplo

$$Q = m_\mathrm{v} \int_{T_N}^{T_l} c \; \mathrm{d}T.$$

Integraci provedeme graficky – jako obsah plochy vymezené (empirickou) křivkou $c = c(T)$, osou T a pořadnicemi danými teplotami $T_\mathrm{N} = 77$ K, $T_\mathrm{l} = 294$ K. Výpočtem plošného obsahu (plochu rozčleníme na čtverečky, nejlépe užitím milimetrového papíru) dostaneme

$$Q = 19{,}4 \cdot 151 \text{ J} = 2930 \text{ J}.$$

Protože toto teplo je skupenským teplem varu, je

$$Q = \Delta m_\mathrm{N} l_\mathrm{v}.$$

Odtud měrné skupenské teplo varu dusíku je

$$l_\mathrm{v} = \frac{Q}{\Delta m_\mathrm{N}} = 202 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} = 2{,}02 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

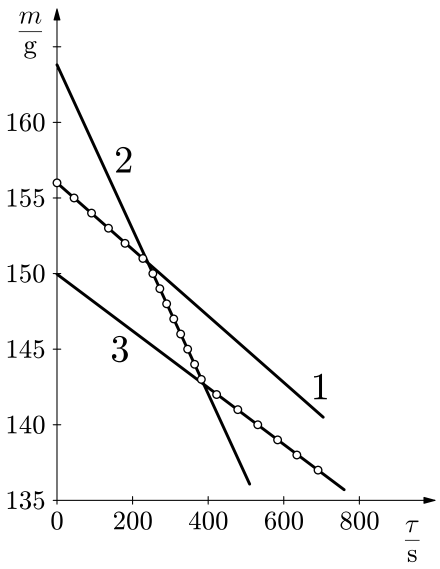
2. Do nádoby s dusíkem ponoříme rezistor s přívodními dráty (dojde k samovolnému varu, počkáme, až se vyrovná teplota rezistoru a var ustane). Nádobu postavíme na váhy a sledujeme opět úbytek hmotnosti dusíku samovolným vypařováním (měříme celkovou hmotnost m) v závislosti na čase t (tab. 8). Rezistor připojíme k elektrickému článku, změříme napětí a proud:

$$U = 12{,}7\ \mathrm{V}, \quad I = 560\ \mathrm{mA}\,.$$

Tab. 8 Data měření úbytku hmotnosti dusíku při druhé metodě

výkon	celk. hm $\frac{m}{\mathrm{g}}$	čas $\frac{\tau}{\mathrm{s}}$
$P = 0$	156	0
	155	45,2
	154	91,4
	153	136,2
	152	180,0
	151	227,2
$P \neq 0$	150	253,6
	149	272,1
	148	290,1
	147	308,9
	146	327,2
	145	345,7
	144	364,1
	143	381,9
$P = 0$	142	422,3
	141	478,4
	140	531,2
	139	583,7
	138	634,6
	137	690,7

Dále měříme závislost úbytku hmotnosti na čase, a to ihned od okamžiku připojení ke článku. Proud po zvolené době vypneme a pokračujeme v měření hmotnosti a času.



Obr. 18 Graf závislosti $m = f(\tau)$ dusíku a výpočet směrnic přímek

Závislost hmotnosti na čase znázorníme graficky (obr. 18). Průběh můžeme nahradit úsečkami ležícími na přímkách 1, 2, 3. Z grafu určíme směrnice těchto přímek [5], které využijeme k výpočtu l_v.
Směrnice určené z grafu:

$$k_1 = \frac{156 - 140}{0 - 720}\ \mathrm{g \cdot s^{-1}} = -0{,}0222\ \mathrm{g \cdot s^{-1}},$$

[5] Máme-li k dispozici PC, je možno směrnice přímek pro jednotlivé části určit přesněji pomocí programu EXCEL lineární regresí (podle [7]). Metodou lineární regrese bychom dostali $k_1 = -0{,}0221\ \mathrm{g \cdot s^{-1}}$, $k_2 = -0{,}0544\ \mathrm{g \cdot s^{-1}}$, $k_3 = -0{,}0188\ \mathrm{g \cdot s^{-1}}$.

$$k_2 = \frac{164 - 135}{0 - 520}\ \mathrm{g \cdot s^{-1}} = -0{,}0558\ \mathrm{g \cdot s^{-1}},$$

$$k_3 = \frac{150 - 135}{0 - 785}\ \mathrm{g \cdot s^{-1}} = -0{,}0191\ \mathrm{g \cdot s^{-1}}.$$

K výpočtu příkonu rezistoru máme k dispozici tři měřené údaje (U, I, R); vypočteme z nich tři hodnoty příkonu, které zprůměrujeme:

$$P = \frac{1}{3}\left(UI + RI^2 + \frac{U^2}{R}\right) = \frac{UI}{3}\left(1 + \frac{RI}{U} + \frac{U}{RI}\right) = 7{,}11\ \mathrm{W}.$$

Pro Jouleovo teplo vzniklé za jednotku času současně platí

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = l_\mathrm{v}\frac{\Delta m_\mathrm{N}}{\Delta t},$$

kde $\dfrac{\Delta m_\mathrm{N}}{\Delta t}$ je rychlost ubývání hmotnosti dusíku způsobená příkonem P. Určíme ji z grafu na obr. 18, když od směrnice přímky 2 odečteme střední velikost směrnic přímek 1 a 3 (abychom vyloučili hmotnost samovolným odpařováním, které probíhá i během časového intervalu Δt při topení):

$$\frac{\Delta m_\mathrm{N}}{\Delta t} = |k_2| - \frac{|k_1 + k_3|}{2} = 0{,}0352\ \mathrm{g \cdot s^{-1}}.$$

Pak [6]

$$l_\mathrm{v} = \frac{P}{\dfrac{\Delta m_\mathrm{N}}{\Delta t}} = 202\ \mathrm{J \cdot g^{-1}} = 2{,}02 \cdot 10^5\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}.$$

Úkolem soutěžících bylo ještě odhadnout *přibližné chyby měření*. Podle autorů úlohy je měření podle první metody zatíženo relativní chybou asi 2%, podle druhé metody asi 4%.

[6] Užijeme-li výsledků pro směrnice získané přesnější metodou regresní analýzy (viz poznámku 5), dostaneme $\dfrac{\Delta m_\mathrm{N}}{\Delta t} = 0{,}0340\ \mathrm{g \cdot s^{-1}}$ a $l_\mathrm{v} = 209\ \mathrm{J \cdot g^{-1}}$ (hodnotu o 3,4% větší).

5.5.4 Použití experimentálních dat při řešení teoretických úloh

Fyzika jako přírodní věda musí při své výstavbě samozřejmě vycházet z pozorování a experimentů. Získané výsledky kvantitativně zpracovává metodami popsanými v této práci a formuluje obecně platné zákony. Pomocí těchto zákonů můžeme teoreticky řešit řadu dalších úloh. U složitějších problémů může ovšem nastat případ, kdy je třeba na částečné výsledky teoretického řešení navázat experimentální data z pozorování a poté případně pokračovat v teoretickém řešení. K tomuto navázání teorie a experimentu může dobře posloužit *vhodný graf sestrojený z experimentálních dat*.

Ukážeme si to na příkladě 12 jedné teoretické úlohy na mezinárodní fyzikální olympiádě.

Příklad 12 – gravitační rudý posuv a měření hmotnosti hvězdy (26. MFO v Austrálii r. 1995)

Šlo o rozsáhlou a náročnou úlohu, ze které zde podrobněji uvedu jen část, která se týká problematiky tohoto článku 5.5.4.

a) Úkolem první části bylo odvození předloženého vztahu pro relativní gravitační rudý posuv fotonu o frekvenci f při jeho vzdálení z povrchu hvězdy (o poloměru R a hmotnosti M) do bodu neomezeně vzdáleného, tj. vztahu

$$\frac{\Delta f}{f} = -\varkappa \frac{M}{c^2 R}, \quad \text{pro} \quad \Delta f \ll f.$$

b) Ve druhé části se požaduje určit hmotnost M a poloměr R hvězdy z experimentálních dat, která naměřila automatická vesmírná sonda, která se radiálně přibližuje ke hvězdě. Ionty He^+ na povrchu hvězdy emitují fotony a jejich záření je monitorováno na sondě prostřednictvím rezonanční absorpce iontů He^+ obsažených v testovací komůrce. Rezonanční absorpce nastane jen tehdy, když ionty hélia mají rychlost ve směru ke hvězdě.

Protože se vesmírná sonda přibližuje ke hvězdě radiálně, může se relativní rychlost $v = \beta c$ iontů hélia v komůrce (při rezonanční absorpci) měřit jako funkce vzdálenosti d od nejbližšího povrchu hvězdy. Experimentální data jsou v tab. 9.

Tab. 9 Data měření uskutečněného vesmírnou sondou

Rychlostní parametr	$\beta \cdot 10^5$	3,352	3,279	3,195	3,077	2,955
Vzdálenost od povrchu	$\frac{d}{10^8\ \text{m}}$	38,90	19,98	13,32	8,99	6,67

c) Požaduje se provedení korekce frekvence záření na zpětný ráz atomu hélia při emisi fotonu. Dalším úkolem byl ještě výpočet energie fotonu na základě rozboru energie excitovaného elektronu v atomu hélia (vztah pro Bohrovu energii byl součástí zadání). Řešení tohoto třetího bodu vybočuje z tématu předloženého studijního textu a nebudeme se jím zabývat – zájemce odkazuji na [8].

Řešení

a) Označme f_R frekvenci záření na povrchu hvězdy a f_∞ frekvenci tohoto záření v bodě neomezeně vzdáleném. Gravitační hmotnost fotonu na povrchu hvězdy položíme rovnou jeho hmotnosti setrvačné, tj.

$$m_\gamma = \frac{hf_\mathrm{R}}{c^2}.$$

Ze zákona zachování celkové energie fotonu, tj. energie hf a potenciální energie gravitační (tato energie je záporná) – vyjádřeno pro bod na povrchu ($r = R$) a pro bod neomezeně vzdálený ($r \to \infty$) – vychází

$$hf_\mathrm{R} - \frac{hf_\mathrm{R}}{c^2} \cdot \frac{\varkappa M}{R} = hf_\infty.$$

Odtud

$$\frac{f_\infty - f_\mathrm{R}}{f_\mathrm{R}} \equiv \frac{\Delta f}{f_\mathrm{R}} = -\frac{\varkappa M}{c^2 R}.$$

b) Aplikujeme-li uvedený postup pro přilehlý nejbližší bod na povrchu hvězdy a pro bod v místě vesmírné sondy (ve vzdálenosti $r = R + d$ od středu hvězdy) dostaneme

$$\frac{f_\mathrm{d}}{f_\mathrm{R}} = 1 - \frac{\varkappa M}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right). \tag{32}$$

Protože se sonda pohybuje v radiálním směru ke hvězdě rychlostí $v = \beta c$, dojde k podélnému relativistickému Dopplerovu jevu, při kterém přijímaná frekvence f' bude vyšší než frekvence f_d pro klidovou soustavu:

$$f' = f_\mathrm{d}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

neboli

$$f_\mathrm{d} = f'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \approx f'(1-\beta) \quad \text{pro} \quad \beta \ll 1\,. \tag{33}$$

(Organizátoři MFO akceptovali rovněž použití klasického Dopplerova jevu, který pro $\beta \ll 1$ dává stejný výsledek.)

Aby došlo k rezonanční absorpci, musí být frekvence f' monitorovaná sondou, rovna frekvenci f_{R} záření emitovaného z povrchu hvězdy. Dosadíme-li vztah (33) pro $f' = f_{\mathrm{R}}$ do (32) dostaneme

$$\beta = \frac{\varkappa M}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) = \frac{\varkappa M}{c^2}\frac{d}{(R+d)R}\,.$$

Z hlediska vzájemně závislých experimentálních dat β, d je tato funkční závislost typu (30); bude ji vhodné přepsat na závislost typu (31). Tedy

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{\varkappa M}\left(\frac{R}{d} + 1\right),$$

neboli

$$\frac{1}{\beta} = k\frac{1}{d} + q\,, \quad \text{kde} \quad k = \frac{R^2c^2}{\varkappa M}\,, \quad q = \frac{Rc^2}{\varkappa M} = \frac{k}{R}\,,$$

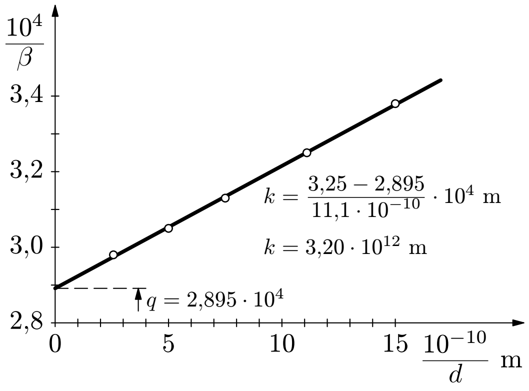
což je v proměnných β^{-1}, d^{-1} rovnice přímky o směrnici k a q je úsek na ose β^{-1}. Oba tyto *parametry můžeme určit z grafu přímky* sestrojené z naměřených hodnot uvedených v tab. 9 – viz obr. 19.

Pak hledané charakteristiky hvězdy jsou

$$R = \frac{k}{q} = 1{,}10 \cdot 10^8 \text{ m}\,,$$

$$M = \frac{R^2c^2}{\varkappa k} = \frac{c^2}{\varkappa}\frac{k}{q^2}$$

$$M = 5{,}14 \cdot 10^{30} \text{ kg}\,.$$



Obr. 19 Výpočet parametrů k a q pro příklad 12 užitím grafu

Poznámka: Úloha 6 požaduje řešení, zde provedené graficky na obr. 19, metodami regresní analýzy[7].

[7] Máme-li k dispozici PC, je možno podle [7] úlohu vyřešit pomocí programu EXCEL. Použitím lineární regrese v EXCELu dostaneme $k = 3{,}24 \cdot 10^{12}$ m, $q = 2{,}8913 \cdot 10^4$. Pak $R = 1{,}12 \cdot 10^8$ m, $M = 5{,}22 \cdot 10^{30}$ kg.

6 Regresní analýza dat měření

6.1 Princip regresní analýzy

V předchozí 5. kapitole jsme se seznámili s jednoduchou grafickou analýzou experimentálně zjišťovaných závislostí fyzikálních veličin. V této kapitole se naopak budeme zabývat analytickou metodou prokládání křivek empirickými hodnotami, založenou na poznatcích matematické statistiky. Tento statistický odhad (predikce) analytických závislostí veličin na základě výsledků měření se nazývá regrese[8] nebo *regresní analýza*. Zpětně tedy hledáme *regresní závislost* sledovaných fyzikálních veličin. Cílem procesu regrese je nalezení (odhad) příslušné *regresní funkce*.

Mějme fyzikální veličinu y (např. elektrický odpor) a hledejme její závislost na nezávisle proměnné veličině x (např. na teplotě). Přímým měřením získáme n dvojic veličin $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$,. . . ,$[x_n, y_n]$, které v kartézské soustavě os x, y můžeme znázornit jako *bodový graf*.

Předpokládejme, že mezi veličinami x, y existuje funkční vztah $y = f(x)$ známého tvaru (v případě naší sledované závislosti elektrického odporu např. lineární). Pokud by při uskutečňování měření nevznikaly náhodné chyby (víme, že to v principu není možné), pak by všechny body $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ležely na křivce $y = f(x)$. Ve skutečnosti však platí $y_i = f(x_i)+\varepsilon_i$, kde ε_i je náhodná chyba i-tého měření, takže vlivem chyb jsou body $[x_i, y_i]$ rozptýleny kolem hledané *regresní křivky*, která má být obrazem funkce $y = f(x)$. Tato hledaná funkce obsahuje určitý počet neznámých konstant (parametrů) b_0, b_1,. . . ,b_p; můžeme tedy psát

$$y = f(x; b_0, b_1, \ldots, b_p). \tag{34}$$

Tyto neznámé parametry se nazývají *regresní koeficienty*. Např. lineární funkce $y = b_0+b_1x$ (resp. $y = a+bx$) obecně obsahuje dva neznámé regresní koeficienty.

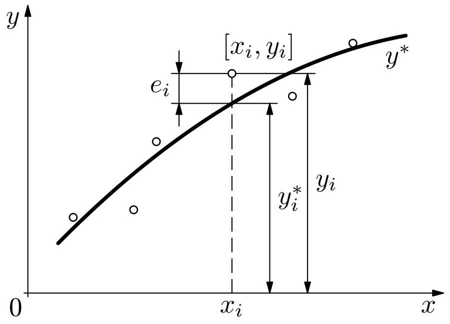
Měřením veličiny y tedy získáme hodnoty y_i, které můžeme vyjádřit rovnicí

$$y_i = f(x; b_0, b_1, \ldots, b_p) + \varepsilon_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

kde ε_i jsou zmíněné náhodné chyby měření. Máme-li body, získanými měřením, tj. $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$,. . . ,$[x_n, y_n]$, proložit křivku (34), musíme provést statistický odhad regresních koeficientů b_0, b_1,. . . ,b_p. Požadavkem tohoto odhadu je, aby proložená křivka (34) „co nejlépe přiléhala“ experimentálně získaným bodům (35). Regresní koeficienty b_j $(j = 0, 1, \ldots, p)$, získané statistickým odhadem, označíme b^*_j. Nazývají se *výběrové regresní koeficienty*.

[8] *regrese* je latinské slovo a znamená „zpětný pochod“.

Výsledek odhadu regresních koeficientů b_j^* závisí na tom, jaké kritérium „přiléhavosti" regresní křivky k experimentálním bodům zvolíme. K řešení využijeme nám již známou *metodu nejmenších čtverců*.



$[x_i, y_i]$ – empirický bod
$y^* = f(x; b_0^*, b_1^*, \cdot, b_p^*)$ – empirická regresní funkce
$e_i = y_i - y_i^*$ – reziduum měření

Obr. 20 K principu regrese

Nejprve definujeme veličinu *reziduum měření*

$$e_i = y_i - y_i^* = y_i - f(x; b_0^*, b_1^*, \ldots, b_p^*) \tag{36}$$

jako rozdíl měřené hodnoty y_i a hodnoty vypočtené z regresní funkce pro stejné x_i, tj. y_i^* (viz obr. 20). Pomocí veličiny (36) pak definujeme *reziduální (zbytkový) součet čtverců*

$$S_\mathrm{e} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x; b_0^*, b_1^*, \ldots, b_p^*)]^2, \tag{37}$$

který se užívá ke statistickému odhadu regresních koeficientů b_j^*, $j \in \{0, p\}$. Podle metody nejmenších čtverců bude tento odhad nejlepší, když součet (37) nabude minima:

$$S_e = min. \tag{38}$$

Nutnou podmínkou pro toto minimum je

$$\frac{\partial S_e}{\partial b_j^*} = 0 \quad \text{pro všechna} \quad j \in \{0, 1, \ldots, p\}. \tag{39}$$

Provedením příslušných $p + 1$ derivací dostaneme soustavu $p + 1$ lineárních rovnic o $p+1$ neznámých b_0^*, b_1^*, …,b_p^*, které se nazývají *normální rovnice*. Aby proces určení těchto neznámých byl jednoznačný, musí pro počet n nezávislých měření (pozorování) platit $n \geq p + 1$. Pokud je $n = p + 1$, prochází regresní křivka všemi body $[x_i, y_i]$. Zpravidla žádáme, aby

$$n > p + 1. \tag{40}$$

Např. pro lineární regresní funkci $y = b_0 + b_1x$, kdy $p = 1$, to znamená $n > 2$, pro kvadratickou regresní funkci $n > 3$. Při splnění podmínky (40) obecně nelze proložit regresní křivku všemi body $[x_i, y_i]$, což považujeme za důsledek chyb měření.

Odhad regresních koeficientů přímým výpočtem z podmínek (39), tj. sestavení a řešení normálních rovnic, bývá úloha zdlouhavá a pro $p > 1$ náročná. V praxi se řeší pomocí počítače nebo kalkulátoru (viz odst. 6.3). Nicméně z hlediska pochopení principu metody nejmenších čtverců a regresní analýzy vůbec je užitečné ukázat a vyzkoušet si přímé řešení alespoň pro lineární regresní funkce. To je předmětem příkladu 14 a úloh 7 a 8.

Vedle zde diskutovaného případu regrese funkce jedné proměnné, je rozpracována (viz např. [6]) i regrese funkcí s několika nezávisle proměnnými. Je-li počet těchto proměnných k, představuje x uspořádanou k-tici $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nezávisle proměnných. Lze tedy x považovat za vektor o k složkách, který podmiňuje závisle proměnnou veličinu y. Těmito případy regrese se v našem textu nebudeme dále zabývat.

6.2 Typy regresních funkcí

Prakticky se lze setkat s regresními funkcemi, které jsou uvedeny v tab. 10.

Tab. 10 Přehled používaných regresních funkcí

č.	Typ závislosti	Regresní funkce	Poznámka
1	konstantní	$y = a$	
2	lineární	$y = bx$	přímka jde počátkem
3		$y = a + bx$	obecná přímka
4	kvadratická	$y = b_0 + b_1x + b_2x^2$	zvláštní případy polynomické závislosti
5	kubická	$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$	
6	kvartická	$y = b_0 + b_1x + \ldots + b_4x^4$	
7	polynomická	$y = b_0 + b_1x + \ldots + b_rx^r$	
8	lin. lomená	$y = a + \dfrac{b}{x}$	$x \neq 0$
9	exponenciální	$y = ab^x$	$b = e^B$, $B \neq 0$, $b > 0$
10		$y = ae^{Bx}$	$B = \ln b$, $b > 0$
11	logaritmická	$y = a + b \ln x$	$x > 0$
12	mocninná	$y = ax^b$	$a \neq 0$
13	logistická	$y = a + \dfrac{d}{1 + be^{cx}}$	$b \neq 0$, $d \neq 0$
14	sinusoidní	$y = a + b \sin(cx + d)$	

I když funkce 1 a 2 jsou zvláštním případem funkce 3, je při regresní analýze vhodné postupovat specializovaně, jsou-li k tomu teoretické důvody. Je-li např. zřejmé, že lineární funkce musí procházet počátkem, zvolíme přímo modelovou funkci 2 (viz příklad 15). Zvolíme-li v tomto případě obecnou funkci 3, regresní analýzou dospějeme zřejmě k odhadu $a^* \neq 0$, i když skutečná křivka musí procházet bodem $[0,0]$.

Počítačové a kalkulátorové programy nabízejí široké spektrum modelových funkcí, uvedených v tab. 10 – viz rovněž odst. 6.4. Přesto je někdy užitečné pomocí vhodné substituce *nelineární funkci jednoduše převést na lineární regresní funkci*. Analogický problém jsme řešili u grafů v odst. 5.3. Řešení dané úlohy je přehledně uvedeno v tab. 11. Zde čísla nelineárních funkcí odpovídají číslům v tab. 10.

Tab. 11 Převod některých nelineárních regresních funkcí na lineární funkce

Nelineární regresní funkce		Substituce	Linearizované regresní funkce
8	$y = a + \dfrac{b}{x}$	$\dfrac{1}{x} = \xi$	$y = a + b\xi$
9	$y = ab^x$	$\ln y = \eta$, $\ln a = A$, $\ln b = B$	$\eta = A + Bx$
11	$y = a + b\ln x$	$\ln x = \xi$	$y = a + b\xi$
12	$y = ax^b$	$\ln y = \eta$, $\ln a = A$, $\ln x = \xi$	$\eta = A + b\xi$
	$y = ae^{\frac{B}{x}}$	$\ln y = \eta$, $\ln a = A$, $\dfrac{1}{x} = \xi$	$\eta = A + B\xi$

6.3 Hodnocení kvality modelu regrese

Kvalita zvoleného modelu regrese, tj. vhodnost určité regresní funkce a odhad jejich výběrových regresních koeficientů, se testuje. Jednou z výchozích veličin je *reziduální součet čtverců* S_e, definovaný vztahem (37), a to proto, že regresní koeficienty se odhadují právě tak, aby tento součet byl minimální – viz (38).

Další pomocnou veličinou je *celkový (totální) součet čtverců*, definovaný vztahem

$$S_\mathrm{t} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2. \tag{41}$$

K hodnocení kvality modelu regrese se užívají tyto veličiny:

1. *Koeficient determinace* r^2 modelu regrese definovaný vztahem

$$r^2 = 1 - \frac{S_\mathrm{e}}{S_\mathrm{t}}. \tag{42}$$

Zřejmě platí $0 \leq r^2 < 1$. Čím více se koeficient přiblíží k jedné, tím méně jsou body $[x_i, y_i]$ rozptýleny (až na níže uvedenou výjimku) okolo regresní křivky. Velikost $r^2 > 0{,}95$ se často považuje za dobré kritérium pro přijetí zvoleného modelu.

Hodnocení koeficientem r^2 má však jedno úskalí. Pro modelovou funkci $y = a^* = konst.$ je $S_\mathrm{t} = S_\mathrm{e}$ a tudíž $r^2 = 0$ bez ohledu na kvalitu modelu (viz příklad 16). Koeficient r^2 nelze tedy použít u funkce $y = a^* + b^*x$, je-li $b^* = 0$. Je-li $b^* \neq 0$, avšak velmi malé, je hodnocení pomocí r^2 rovněž málo vhodné (viz příklad 16).

2. *Koeficient korelace* r je druhou odmocninou koeficientu determinace (42). Užívá se u lineární regresní funkce.

3. *Reziduální rozptyl* s^2

$$s^2 = \frac{S_\mathrm{e}}{n - (p+1)}, \tag{43}$$

kde $p + 1$ je počet odhadovaných regresních koeficientů a $n - (p + 1) > 0$, tj. počet měření zmenšený o počet regresních koeficientů, se nazývá *počet stupňů volnosti* reziduálního součtu čtverců S_e [9].

4. *Směrodatná odchylka* s je druhou odmocninou rozptylu, tj.

$$s = \sqrt{\frac{S_\mathrm{e}}{n - (p+1)}}. \tag{44}$$

Má význam statistického odhadu směrodatné odchylky (chyby) σ kteréhokoli měření y_i. Pro hodnocení kvality modelu regrese má větší význam než koeficient determinace (42).

Pro jednotlivé regresní funkce lze odvodit vztahy pro S_e, S_t a tedy i specializované vzorce pro veličiny (42) až (44).

6.4 Praktikum regresní analýzy

Výpočty, které jsou spojeny s praktickým prováděním regresní analýzy, jsou složité a zejména zdlouhavé. Proto rozvoj aplikací regresní analýzy umožnila až současná úroveň výpočetní techniky. Programy pro provádění regresní analýzy jsou především součástí programového vybavení PC. Např. text [7] popisuje provádění regresní analýzy v programu EXCEL od firmy Microsoft na řadě úloh – zpracování výsledků měření teplotních závislostí fyzikálních veličin. Provádění regresní analýzy na PC vyniká komfortem – především je k dispozici jemná a

[9] Počet odhadovaných regresních koeficientů je roven $p + 1$ pouze v případě úplného polynomu stupně p

rozměrná grafika a možnost tisku. Protože popis aplikace programu EXCEL pro regresní analýzu je dostatečně uveden v [7], nebudu se využitím PC dále zabývat.

Existují situace, kdy nemůžeme pohotově využít PC (např. při soutěži FO), pak se nabízí využití současných kapesních „vědeckých kalkulátorů", které bývají bohatě programově vybaveny i pro provádění regresní analýzy. Např. kalkulátory CASIO řady fx nabízejí regresní modelové funkce 3, 4, 9, 11 a 12 z tab. 10. Grafické kalkulátory Texas Instruments TI 89/92 funkce 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13 a 14. Tyto grafické kalkulátory vyřeší nejen regresní koeficienty, ale i směrodatné odchylky, koeficient determinace (u vybraných funkcí) a umožní navíc zobrazit pomocí zvolených značek příslušné grafy, tj. bodový graf naměřených hodnot a proloženou regresní křivku. Podobně jsou vybaveny i grafické kapesní kalkulátory firmy Hewlett Packard.

Jak postupujeme při regresní analýze dat měření na kapesním kalkulátoru?

1. Nejprve musíme rozhodnout *jakou použijeme modelovou regresní funkci*. Ověřujeme-li teoreticky známou funkční závislost fyzikálních veličin, víme předem, o jakou funkci jde anebo by mělo jít. Regresní analýzou poté konkretizujeme průběh funkce pro dané podmínky tím, že statistickým výpočtem na kalkulátoru určíme (odhadneme) regresní koeficienty. Určením směrodatné odchylky (44) nebo koeficientem determinace (42) současně ověříme, jak se empirický průběh liší od teoretického. Stejně postupujeme při verifikaci hypotézy, kdy jistou závislost předpokládáme, např. podle provedené úvahy.

Pokud neznáme teoretický ani předpokládaný průběh zkoumané závislosti fyzikálních veličin, nakreslíme *bodový graf* empirických bodů $[x_i, y_i]$ a odhadneme vhodný typ funkce, která má být proložena body. Někdy nám pomůže vhodná substituce, např. $\xi = \frac{1}{x}$, $\eta = \frac{1}{y}$ nebo $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$. Vhodná může někdy být i jen jednostranná uvedená substituce, tj. jen pro x nebo pro y. U teplotních závislostí musíme často přepočíst teplotu t[°C] na jednotky v kelvinech, tj. $T = (\{t\} + 273{,}15)$ K.

Můžeme se také rozhodnout jen pro lineární regresní funkci a provést příslušné substituce podle tab. 11.

Jak je zřejmé z uvedeného rozboru, je volba vhodné modelové regresní funkce specificky závislá na zkoumané fyzikální zákonitosti. Vhodná (resp. nevhodná) volba však ovlivní výsledek celé regresní analýzy.

2. Kalkulátor přepneme do režimu regresních výpočtů, *vymažeme* statistické paměťové registry, nastavíme zvolenou modelovou regresní funkci a do vstupní paměti *pečlivě vložíme* všechna naše statistická data, tj. výsledky měření $[x_i, y_i]$, *ve správném pořadí*.

3. V okamžiku otevření prvního ze statistických paměťových registrů, v nichž následně mají být uloženy výběrové regresní koeficienty, dojde automaticky ke spuštění statistického výpočtu. Jeho (téměř okamžitým) výsledkem jsou číselné hodnoty výběrových regresních koeficientů a ostatních výstupních statistických veličin, které se uloží do označených paměťových registrů. Výsledky vhodně zaokrouhlíme.

4. Pomocí koeficientu determinace (r^2) a směrodatné odchylky (s) posoudíme *kvalitu regrese* a zvolený model buď použijeme nebo zamítneme.

5. Vhodné je, pokud to (grafický) kalkulátor umožňuje, nakreslit ještě jak *bodový graf* měřených veličin, tak do něj vypočtenou *regresní křivku*. Vizuálně tak můžeme snadno posoudit korelaci empirických hodnot s vypočtenou regresní funkcí. Tím je proces regresní analýzy ukončen.

Příklad 13 – regresní analýza dat z příkladu 9

Proveďte řešení problému v zadání příkladu 9 – závislost elektrického odporu na teplotě – metodou regresní analýzy. Určete teplotní součinitel elektrického odporu při vztažné teplotě $t_0 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$.

Řešení

a) Z teorie předpokládáme, že modelová závislost elektrického odporu na teplotě je lineární. Pak

$$R = a + bt = R_0(1 + \alpha t)\,,$$

$$R_0 = a\,, \quad \alpha = \frac{b}{a}\,.$$

b) Provedeme regresní analýzu dat měření z tab. 5 (v předběžném příkladě byl užit kalkulátor CASIO $f\mathrm{x} - 991$ W):

$$a = 70{,}8\ \Omega\,, \qquad b = 0{,}289\ \mathrm{K}^{-1} \cdot \Omega\,,$$

$$r = 0{,}9985\,, \qquad r^2 = 0{,}997\,.$$

c)

$R_0 = 70{,}8\ \Omega$, $\alpha = 4{,}08 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$,
$t_1 = 20{,}0\ ^\circ\mathrm{C}$: $R_1 = 70{,}8(1 + 4{,}08 \cdot 10^{-3} \cdot 20)\ \Omega = 76{,}6\ \Omega$,
$t_2 = 60{,}0\ ^\circ\mathrm{C}$: $R_2 = 88{,}1\ \Omega$,
$R_3 = 82{,}0\ \Omega$: $t_3 = 38{,}8\ ^\circ\mathrm{C}$.

Řešení získané regresní analýzou je rychlejší a spolehlivější než řešení grafické.

Příklad 14 – odvození pro lineární regresní funkci

Uvažujte lineární regresní funkci ve tvaru $y = bx$ (přímka jdoucí počátkem). Užitím metody nejmenších čtverců odvoďte vztah pro odhad regresního koeficientu b^*, pro reziduální součet čtverců S_e a směrodatnou odchylku s, je-li dáno n experimentálních dat $[x_i, y_i]$, $i \in \{1, n\}$ hledané funkční závislosti.

Řešení

Podle metody nejmenších čtverců musí být reziduální součet čtverců minimální, tj.

$$S_\mathrm{e} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b^* x_i)^2 = min.$$

Podmínka bude splněna, když $\dfrac{\partial S_\mathrm{e}}{\partial b^*} = 0$, tedy když (pro jednoduchost zápisu vynecháme meze sumace)

$$-2 \sum (y_i - b^* x_i) x_i = 0 \,.$$

Z toho

$$b^* = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \,.$$

Reziduální součet čtverců je

$$S_\mathrm{e} = \sum (y_i - b^* x_i)^2 = \sum y_i^2 - b^* (2 \sum x_i y_i - b^* \sum x_i^2) \,,$$

$$S_\mathrm{e} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2} \,.$$

Směrodatnou odchylku kteréhokoli měření vypočteme ze vztahu (44), kde v našem případě počet stupňů volnosti je $n - 1$. Tedy

$$s = \sqrt{\frac{S_\mathrm{e}}{n - 1}} \,.$$

Směrodatná odchylka regresního koeficientu b^* je (viz [6])

$$s_{b^*} = \frac{s}{\sqrt{\sum x_i^2}} \,.$$

Příklad 15 – tíhové zrychlení regresní analýzou

Výsledky získané řešením příkladu 14 využijte k regresní analýze experimentálních dat z příkladu 8 a určete tíhové zrychlení včetně směrodatné odchylky. Odpor vzduchu neuvažujte.

Řešení

Závislost dráhy s na čase $s = \frac{1}{2}gt^2$ můžeme výhodně vyjádřit *lineární regresní funkcí* $y = bx$, když zavedeme substituci $t^2 = 2x$ a označíme $s = y$. Pak $g = b$. Odhad regresního koeficientu b^* (resp. g) a jeho směrodatné odchylky určíme z dat v tab. 4 užitím vzorců z příkladu 14. Výpočty jsou uvedeny v tab. 12.

Tab. 12 Výpočet tíhového zrychlení regresní analýzou

$\frac{t_i}{\mathrm{s}}$	$\frac{x_i}{\mathrm{s}^2}$	$\frac{y_i}{\mathrm{m}}$
0	0	0
0,90	0,405	4,0
1,03	0,53045	5,2
1,10	0,605	6,0
1,20	0,720	7,0
1,28	0,8192	8,0
1,35	0,91125	9,0
1,43	1,02245	10,0
1,50	1,125	11,0

$\sum x_i^2 = 5{,}14232\ \mathrm{s}^4$
$\sum x_i y_i = 50{,}40269\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
$\sum y_i^2 = 494{,}04\ \mathrm{m}^2$

$$b^* = g = \frac{50{,}40269}{5{,}14232}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 9{,}8015\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

$$S_\mathrm{e} = \left(494{,}04 - \frac{50{,}40269^2}{5{,}14232}\right)\ \mathrm{m}^2 = 0{,}01568\ \mathrm{m}^2$$

$$s = \sqrt{\frac{0{,}01568}{8}}\ \mathrm{m} = 0{,}0443\ \mathrm{m} \doteq 0{,}05\ \mathrm{m}$$

$$s_{b^*} = \frac{0{,}0443}{\sqrt{5{,}142}}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}0195\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 0{,}02\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$\boxed{g = (9{,}80 \pm 0{,}02)\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$$

Příklad 16 – regresní analýza dat dvou blízkých souborů

Uvažujme dva blízké „cvičné“ soubory A, B proměnných x_i, y_i podle tab. 13, které se vyznačují tím, že střední hodnoty $\overline{y}_\mathrm{A} = \overline{y}_\mathrm{B} = 10{,}0$. Proveďte regresní analýzu dat těchto souborů, tj. proveďte odhad regresních koeficientů, určete celkový součet čtverců (S_t), reziduální součet čtverců (S_e), koeficient determinace (r^2), reziduální rozptyl (s). Proveďte diskusi výsledků pro oba soubory.

Tab. 13 Číselné hodnoty souborů A, B

x_i		1	2	3	4	5	6	7	8	$\overline{y}$
A	y_i	10,0	10,1	10,0	9,9	10,0	9,9	10,0	10,1	10,0
B	y_i	9,9	9,9	10,0	10,0	10,0	10,0	10,1	10,1	10,0

Řešení

Pro oba soubory lze použít modelovou regresní funkci ve tvaru $y = a + bx$.

Soubor A

Přímým výpočtem (viz úlohu 8) anebo použitím statistického programu na kalkulátoru, dostaneme odhad koeficientů:

$$a^* = \overline{y} = 10{,}0\,; \qquad b^* = 0\,.$$

Pro součty čtverců platí

celkový $\quad S_{\mathrm{t}} = \sum(y_i - \overline{y})^2 = 0{,}04,$

reziduální $\quad S_{\mathrm{e}} = \sum(y_i - y_i^*)^2 = 0{,}04.$

Koeficient determinace $r^2 = 1 - \dfrac{S_{\mathrm{t}}}{S_{\mathrm{e}}} = 0,$

reziduální rozptyl $s = \sqrt{\dfrac{S_{\mathrm{e}}}{n-(p+1)}} = \sqrt{\dfrac{0{,}04}{7}} = 0{,}0756 \doteq 0{,}08.$

Soubor B

Přímým výpočtem (viz úlohu 8) anebo užitím kalkulátoru dostaneme odhad koeficientů:

$$a^* = 9{,}871, \qquad b^* = 0{,}02857.$$

Určíme odhad hodnot y_i z regresní funkce: $y_i^* = a^* + b^* x_i$; výsledky výpočtů jsou v tab. 14.

Tab. 14 Výpočty pro soubor B

x_i	$y_i^* = a^* + b^* x_i$
1	9,8996
2	9,9281
3	9,9567
4	9,9853
5	10,0139
6	10,0424
7	10,0710
8	10,0996

$S_{\mathrm{e}} = \sum(y_i - y_i^*)^2 = 0{,}005\,713$

$S_{\mathrm{t}} = \sum(y_i - \overline{y})^2 = 0{,}040\,000$

$r^2 = 1 - \dfrac{S_{\mathrm{e}}}{S_{\mathrm{t}}} = 0{,}8571$

$s = \sqrt{\dfrac{S_{\mathrm{e}}}{6}} = 0{,}0309 \doteq 0{,}03$

Kontrolní výpočet:

$\overline{y}^* = 9{,}999\,575 \doteq 10{,}0$

Diskuse výsledků

1. Pro soubor A vyšel koeficient determinace $r^2 = 0$, i když použitá modelová regresní funkce $y^* = a^* = konst.$ je vhodná. Je totiž zřejmé, že odchylky jednotlivých dat od y^* (tedy rezidua měření) nepřesahují $\pm 1\%$. Protože v případě této regresní funkce je $S_\mathrm{t} = S_\mathrm{e}$, je z definice $r^2 = 0$ a r^2 se pro hodnocení kvality modelu nehodí (obecně platí, že pro $b^* = 0$ je $r^2 = 0$).

2. U druhého souboru (v důsledku pouhého přeskupení čísel ze souboru A) jsou hodnoty y_i neklesající, a proto $b^* \neq 0$. I tak je $r^2 = 0{,}86 < 0{,}95$ a koeficient determinace tedy hodnotí použitý model jako málo vhodný, i když vhodnější model zřejmě lze najít jen obtížně (největší reziduum je pro x_3: $e_3 = +0{,}43\%$ a pro x_6: $e_6 = -0{,}43\%$). Hodnocení podle s je příznivější než u modelové funkce souboru A.

3. Použijeme-li pro soubor B přímo modelovou funkci $y = a$ (viz úlohu 7), dává regresní analýza stejné výsledky jako pro soubor A.

7 Úlohy

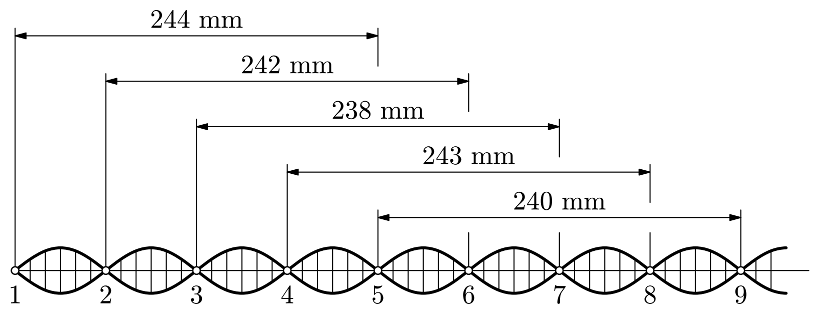
1. Elektromotorické napětí

a) Při desetkrát opakovaném měření elektromotorického napětí zdroje byly naměřeny tyto hodnoty ve voltech: 6,13; 6,20; 6,17; 6,18; 6,15; 6,17; 6,21; 6,14; 6,15; 6,18. Zpracujte statistická data měření jednak klasickým způsobem, jednak užitím statistického programu na kalkulátoru. Proveďte kontrolu dat na krajní chybu a proveďte korigovaný výpočet, bude-li třeba.

b) Jak se změní výsledek měření, když do vyhodnocení jeho přesnosti zahrneme dovolenou mezní chybu voltmetru, který byl nastaven na rozsah 10 V. Uvažujte analogový voltmetr v třídě přesnosti jednak $p_1 = 0{,}5$, jednak $p_2 = 0{,}1$.

2. Vlnová délka

Vlnová délka stojatého vlnění v Kundtově trubici byla měřena postupnou metodou tak, že byla měřena vzdálenost mezi $(k+4)$-tým a k-tým uzlem pro $k \in \{1, 5\}$. Výsledky měření jsou uvedeny v obr. 21. Stanovte vlnovou délku včetně výběrové směrodatné odchylky.



Obr. 21 Rozložení uzlů v Kundtově trubici

3. Objem válce

Objem válce byl určován měřením jeho rozměrů: výšky $h = (53{,}87 \pm 0{,}04)$ mm a poloměru $r = (6{,}956 \pm 0{,}002)$ mm. Napište obecný výraz pro směrodatnou odchylku objemu a proveďte numerický výpočet.

4. Youngův modul pružnosti v tahu

Youngův modul pružnosti v tahu oceli byl měřen prostřednictvím průhybu y ocelové tyče konstantního obdélníkového průřezu. Pro průhyb středu vodorovné tyče podepřené ve dvou bodech ve vzdálenosti l a uprostřed zatížené svisle orientovanou silou $\boldsymbol{F}$ platí

$$y = \frac{Fl^3}{48EI}, \quad \text{kde} \quad I = \frac{1}{12}bh^3,$$

přičemž b je šířka průřezu a h jeho výška (tj. rozměr ve směru působení síly). Odvoďte výraz pro směrodatnou odchylku modulu E a proveďte numerický výpočet pro

$F = 49{,}03$ N (přesně – dáno závažím 5 kg)
$l = (1002 \pm 2)$ mm, $y = (21{,}82 \pm 0{,}09)$ mm,
$b = (12{,}23 \pm 0{,}01)$ mm, $h = (6{,}050 \pm 0{,}006)$ mm.

5. Tíhové zrychlení

Užijte experimentální údaje v tab. 4 (příklad 8) k určení tíhového zrychlení výpočtem ze vztahu pro volný pád – včetně stanovení směrodatné odchylky.

6. Regresní analýza dat z příkladu 12

Problém řešený v příkladě 12 graficky (obr. 19) řešte regresní analýzou užitím kalkulátoru.

7. Odvození pro regresní funkci $y = a$

Uvažujte jednoduchý případ lineární regresní funkce $y = a(= konst.)$. Užitím metody nejmenších čtverců odvoďte vztahy: pro odhad regresního koeficientu a^*, pro reziduální součet čtverců S_{e} a směrodatnou odchylku, je-li dáno n experimentálních dat $[x_i, y_i]$ hledané funkční závislosti.

8. Odvození vztahů pro regresní funkci $y = a + bx$

Užitím metody nejmenších čtverců odvoďte vztahy pro odhad regresních koeficientů a^*, b^* regresní funkce $y = a + bx$. Je dána n-tice experimentálních dat $[x_i, y_i]$.

Výsledky úloh

1. a) $U = (6{,}168 \pm 0{,}008)$ V.
Krajní chyba jednoho měření je $ts = 4{,}09 \cdot 0{,}024\ \text{V} \doteq 0{,}1$ V; krajní interval spolehlivosti pro jedno měření je $\langle 6{,}07; 6{,}27 \rangle$ V. Všechna naměřená data jsou uvnitř tohoto intervalu.
b) $p_1 = 0{,}5$: $U = (6{,}17 \pm 0{,}05)$ V,
$p_2 = 0{,}1$: $U = (6{,}168 \pm 0{,}013)$ V.

2. $2\lambda = (241{,}4 \pm 1{,}1)$ mm; $\lambda = (120{,}7 \pm 0{,}5)$ mm.

3. $V = \pi r^2 h$, $s_\mathrm{V} = V\sqrt{\left(2\frac{s_\mathrm{r}}{r}\right)^2 + \left(\frac{s_\mathrm{h}}{h}\right)^2}$,

$V = (8{,}189 \pm 0{,}008) \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$.

4. $E = \dfrac{Fl^3}{4ybh^3}$, $s_\mathrm{E} = E\sqrt{\left(3\frac{s_\mathrm{l}}{l}\right)^2 + \left(\frac{s_\mathrm{y}}{y}\right)^2 + \left(\frac{s_\mathrm{b}}{b}\right)^2 + \left(3\frac{s_\mathrm{h}}{h}\right)^2}$,

$E = (2{,}09 \pm 0{,}02) \cdot 10^{11}$ Pa.

5. $g = \dfrac{2s}{t^2}$: (9,88; 9,80; 9,92; 9,72; 9,77; 9,88; 9,78; 9,78) $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,

$g = (9{,}82 \pm 0{,}02)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

6. Regresní koeficienty (s využitím kalkulátoru CASIO fx – 991 W) jsou $a^* \equiv q = 2{,}892 \cdot 10^4$, $b^* \equiv k = 3{,}249 \cdot 10^{12}$ m, koeficient determinace $r^2 = 0{,}9985$. Pak parametry hvězdy jsou $R = 1{,}12 \cdot 10^8$ m, $M = 5{,}23 \cdot 10^{30}$ kg.

7. $a^* = \dfrac{\sum y_i}{n}$, $S_\mathrm{e} = \sum y_i^2 - \dfrac{(\sum y_i)^2}{n}$, $s = \sqrt{\dfrac{S_\mathrm{e}}{n-1}}$.

8. $a^* = \dfrac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$, $b^* = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$.

Literatura

[1] Brož, J. at al.: *Základy fyzikálních měření, I. díl.* SPN, Praha 1967.

[2] Horák, Z.: *Praktická fyzika.* SNTL, Praha 1958.

[3] Janke, E., Emde, F., Lösch, F.: *Tafeln Höherer Funktionen.* B. G. Teubner Ver., Stuttgart 1960 (ruský překlad *Specialnye funkcii.* Izd. Nauka, Moskva 1964).

[4] Košťál, R.: *Hodnoty a chyby veličin měřených a vypočtených.* Škola mladých fyziků. Svazek 6. SPN, Praha 1972.

[5] Mechlová, E., Košťál, K. at al.: *Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz.* Prometheus, Praha 1999.

[6] Rektorys, K. at al.: *Přehled užité matematiky.* SNTL, Praha 1963; 6. vydání: Prometheus, Praha 1995.

[7] Šedivý, P.: *Teplotní závislosti fyzikálních veličin.* Knihovnička fyzikální olympiády č. 51. MAFY, Hradec Králové 2002.

[8] *Zprávy z mezinárodních fyzikálních olympiád: 24. (USA, 1993), 25. (Čína, 1994), 26. (Austrálie, 1995).*

[9] Čmelík, M., Machonský, L., Burianová, L.: *Úvod do fyzikálních měření.* Technická univerzita v Liberci, Liberec 2001.

Studijní texty fyzikální olympiády

39. A: Vybíral, B.: Kinemetika a dynamika tuhého tělesa
    B: Horáková, R. – Šedivý, P.: Kyvadla
    C: Horáková, R. – Šedivý, P.: Kruhový děj v ideálním plynu
    D: Chytilová, M.: Znáte Archimédův zákon?

40. A: Vybíral, B.: Setrvačníky
    B: Šedivý, P.: Pokusy s operačními zesilovači
    C: Horáková, R.: Pohyb soustavy těles spojených vláknem
    D: Volf, I. – Šedivý, P.: Dopravní kinematika a grafy

41. A: Vybíral, B.: Elektrické pole
    B: Šedivý, P.: Modelování pohybů hmotného bodu numerickými metodami
    C: Horáková, R. – Šedivý, P.: Kruhový děj v ideálním plynu
    D: Volf, I. – Šedivý, P.: Dopravní kinematika a grafy

42. A: Vybíral, B.: Magnetické pole ve vakuu
    B: Šedivý, P. – Volf, I. – Horáková, R.: Harmonické kmity mechanických soustav
    C: Šedivý, P. – Volf, I.: Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli
    D: Volf, I. – Šedivý, P.: Dopravní kinematika a grafy

43. A. Vybíral, B.: Magnetické pole v látce
    B. Vybíral, B. – Zdeborová, L.: Odporové síly
    C. Šedivý, P.: Teplotní závislosti fyzikálních veličin
    D. Šedivý, P. – Volf, I.: Práce – výkon – energie