MAGNETICKÉ POLE VE VAKUU

(Elektrodynamika I.)

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Úvod

1. Předmět elektrodynamiky

Předložený studijní text, volně navazující na **Elektrostatiku** [12], se zabývá **elektrodynamikou**, která zkoumá účinky elektrických nábojů v pohybu. Tok nábojů vytváří z makroskopického hlediska elektrický proud, a proto se budeme nejprve zabývat jeho popisem a zkoumáním vlivu vodivého prostředí na jeho velikost. Důležitým účinkem elektrického proudu je magnetické pole. Při zkoumání magnetického pole ve vakuu nejprve užijeme jednodušší klasický (historický) přístup, který je založen na experimentech. To je předmětem druhé kapitoly. Z hlediska celkové struktury moderní fyziky je důležitý i relativistický výklad magnetismu, který je předmětem kapitoly třetí. Tento pohled na magnetické pole je sice velmi zajímavý, ale je poněkud náročnější, a proto je tato kapitola pro řešitele fyzikální olympiády z hlediska vlastní soutěže nepovinná. K tomu je v dodatku odvozen jednoduchým postupem vztah pro relativistickou transformaci síly.

K předmětům zkoumání elektrodynamiky patří i magnetické pole v látkovém prostředí a rovněž elektromagnetické indukce. Jde o reciproký jev, který popisuje vznik elektrického proudu změnou magnetického pole. Z důvodu omezeného rozsahu předloženého studijního textu pro fyzikální olympiádu byla celá látka elektrodynamiky rozložena do tří dílů: 2. díl bude věnován magnetickému poli v látce a 3. díl elektromagnetické indukci.

Při výkladu elektrodynamiky byla zachována tradiční osvědčená forma: vlastní výklad je průběžně aplikován na řešených příkladech, které nejen ilustrují výklad, ale také jej doplňují řešením významných problémů. K procvičení vyložené látky a k přípravě na řešení úloh ve fyzikální olympiádě jsou do textu zařazeny úlohy, přičemž výsledky jejich řešení (u obtížnějších úloh i s naznačeným nebo úplným řešením) jsou uvedeny na závěr textu. Celkem text obsahuje 9 řešených příkladů a 32 úloh k procvičení, z nichž některé úlohy byly po úpravě převzaty z mezinárodních soutěží.

2. Z historie – od Coulomba k Einsteinovi

Historie vývoje elektrodynamiky je zajímavá a poučná nejen z hlediska vlastní elektrodynamiky, ale i jiných oblastí fyziky. Až do konce 18. století byly známy některé jevy z elektřiny a magnetismu pouze kvalitativně, a to bez jakékoliv vzájemné souvislosti. Teprve r. 1785 formuloval francouzský důstojník Ch. A. Coulomb (1736–1806) na základě experimentů na torzních vahách (teorie těchto vah z r. 1784, včetně teorie krutu tyčí kruhových průřezů a konstrukce torzních vah pochází rovněž od Coulomba) základní zákon elektrostatiky a analogický zákon magnetostatiky. Zatímco Coulombův zákon elektrostatiky je stále základním zákonem i relativistické elektrodynamiky, Coulombův zákon magnetostatiky již nemá v současné elektrodynamice místo.

Vrátíme-li se do konce 18. století zjistíme, že objev Coulombova zákona umožnil teoretickým fyzikům již rozpracovat **elektrostatiku** (podobně byla v téže době rozvinuta i magnetostatika). Druhou etapu rozvoje elektromagnetismu umožnil až objev zdrojů ustáleného stejnosměrného proudu, a to zejména zásluhou italského profesora A. G. Volta (1745–1827), který sestrojil r. 1800 galvanickou baterii nazvanou Voltův sloup.

Při pokusech s elektrickým proudem udělal dánský fyzik H. Ch. Oersted (1777–1851) r. 1820 dílem náhody významný objev: zjistil, že magnetka postavená rovnoběžně s vodičem se při průchodu proudu vychyluje. Tím kvalitativně objevil souvislost mezi elektřinou a magnetismem: průchodem elektrického proudu vzniká **magnetické pole**. Tohoto objevu se okamžitě ujali francouzští fyzikové J. B. Biot (1774–1862) a F. Savart (1791–1841), kteří pomocí experimentů zjistili potřebné kvantitativní závislosti. Jejich kolega, známý francouzský matematik a fyzik P. S. Laplace (1749–1827), poté provedl (ještě v r. 1820) formulaci diferenciálního zákona, který popisuje magnetické pole vyvolané idealizovaným proudovým elementem. Tento zákon, dnes označovaný jako zákon Biotův–Savartův–Laplaceův, tvoří druhý pilíř klasické elektrodynamiky.

Třetí pilíř vybudoval rovněž významný francouzský matematik a fyzik A. M. Ampère (1775–1836). Ten v r. 1826 formuloval na základě svých experimentů diferenciální zákon určující sílu, kterou na sebe vzájemně působí dva idealizované proudové elementy.

Tyto tři základní zákony v podstatě stačí k vybudování **klasické elektrodynamiky** a lze pomocí nich odvodit i zákon elektromagnetické indukce, ke kterému dospěl po sedmiletém experimentování r. 1831 geniální anglický experimentátor M. Faraday (1791–1867). Ten také zavedl do fyziky významný pojem **pole**.

Bohatých experimentálních poznatků z elektrodynamiky získaných za 50 let řadou fyziků se ujal jeden z nejvýznamnějších fyziků všech dob – anglický teoretik J. C. Maxwell (1831–1879). Před tím než provedl syntézu poznatků, vyslovil hypotézu, že vodivý proud ve vodičích pokračuje ve vakuu jako posuvný proud (dnes označovaný jako Maxwellův proud) a že má stejné magnetické účinky jako proud vodivý. V r. 1864 (knižně v r. 1873) Maxwell publikuje svou **teorii elektromagnetického pole** ve formě soustavy čtyř hlavních diferenciálních rovnic (původně osmi rovnic složkových): zákon celkového proudu, Gaussův zákon, zákon elektromagnetické indukce a zákon o neexistenci magnetických nábojů. K tomu se připojují čtyři rovnice vedlejší: Ohmův zákon pro vodivý proud, dvě vztahové rovnice mezi indukcemi a intenzitami elektrického a magnetického pole v látkovém prostředí a vztah pro Lorentzovu sílu působící na pohybující se náboj v elektromagnetickém poli (nebo ekvivalentní vztah pro hustotu elektromagnetické energie).

Maxwell dospívá ze svých rovnic čistě teoretickou cestou k významnému poznatku, že **elektromagnetické pole se šíří ve formě vln**, odvozuje vztah pro jejich rychlost a zákon pro jejich odraz a lom na rovinném rozhraní dvou prostředí. Současně vypracovává elektromagnetickou teorii světla. Osobní Maxwellovou tragedií bylo, že se nedožil (umírá ve 48 letech) experimentálního potvrzení své teorie. Experimentální důkaz existence elektromagnetických vln (decimetrové délky) podal 8 roků po Maxwellově smrti v r. 1887 mladý německý fyzik H. Hertz (1857–1894).

Maxwell ovšem přijal Youngovu hypotézu z r. 1801, že k šíření světla a tudíž i elektromagnetických vln je zapotřebí jakéhosi všeprostupného mechanického prostředí označovaného jako **éter** (zde se vycházelo z analogie mechanických vln). Experimentální potvrzování jedné ze tří éterových hypotéz přivedlo fyziku poslední čtvrtiny 19. století do vleklé krize. Tu vyřešila až **speciální teorie relativity** vybudovaná v r. 1905 geniálním německým fyzikem A. Einsteinem (1879–1955). Éter se nakonec ukázal jako zcela nadbytečný a potřebným „prostředím“, které umožňuje šíření elektromagnetických vln, je prostě prostoročas vázaný na hmotu ve vesmíru.

Teorie relativity výrazně zkorigovala fyzikální obraz světa, avšak teorie elektromagnetického pole přestála tuto korekci (až na hypotézu éteru) bez poskvrny. Ukázala, že elektrické a magnetické pole jsou různými obrazy (resp. složkami) téhož pole elektromagnetického: elektrické (resp. elektrostatické) pole vzniká v klidové soustavě náboje; ve vztažné soustavě, v níž se náboj vůči pozorovateli pohybuje, vzniká pole elektromagnetické. Tento relativistický popis je základem **relativistické elektrodynamiky** a bude předmětem kap. 3 našeho textu. Zde nám k vybudování elektrodynamiky bude stačit již jen jeden experimentální zákon – zákon Coulombův – a k tomu relativistický vzorec pro transformaci síly.

Na historii vývoje elektrodynamiky vidíme, jak se potvrzuje filozofie pohledu na svět geniálního anglického fyzika I. Newtona (1643–1727) vyslovená ve větě (1687): *„Příroda je úsporná ve svých prostředcích a jevy vytváří jednotným způsobem.“* Tedy mezi dříve zdánlivě nesouvisejícími jevy (elektřinou a magnetismem) se na jedné straně našla úzká vazba a na druhé straně se velký počet dílčích empirických zákonů, potřebných k vybudování teorie, nejprve zmenšil na tři (klasická elektrodynamika) a poté jen na jeden (relativistická elektrodynamika).

1 Elektrický proud

1.1 Makroskopický elektrický proud ve vodičích

Elektrickým proudem nazýváme uspořádaný pohyb elektrických nábojů. Aby se tyto náboje mohly pohybovat, musí být volné – jsou přítomny v látkách, které nazýváme **vodiče**. Vodiče mohou mít nositele náboje jednoho znaménka (elektrony v kovech, uhlíku a v polovodičích) anebo obojích znamének (kladné a záporné ionty v elektrolytech, ionty a elektrony v ionizovaných plynech). Volné nositele náboje (elektrony, ionty) lze rovněž oddělit od těchto látek (vodičů) a vytvořit elektrický proud ve vakuu nebo ve zředěných plynech.

Z vodičů mají největší význam **kovy**, které jsou polykrystalickými látkami s kovovou vazbou. Každý mikroskopický monokrystal kovu má pevnou krystalickou mříž sestavenou z kladných iontů, mezi nimiž se přetržitě pohybují **volné elektrony** rychlostmi, jejichž velikost je statisticky proměnná (co do velikosti i směru). Střední hodnota rychlosti (jako vektoru) všech elektronů je nulová, střední hodnota velikosti rychlosti určitého elektronu je závislá na teplotě kovu. Elektrony konají tzv. **termický pohyb**. Velikost rychlosti neuspořádaných termických pohybů volných elektronů je o několik řádů větší než velikost rychlosti kmitajících iontů v krystalové mříži. Horní mez těchto rychlostí neuspořádaného termického pohybu elektronů v kovech je asi $10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Připojíme-li vodič k vnějšímu zdroji elektrického pole (např. na galvanický článek), začne statisticky neuspořádaný pohyb volných nositelů náboje překrývat jejich usměrněný pohyb ve směru vnějšího pole u kladných nositelů a proti jeho směru u záporných nositelů. Vzniká **makroskopický elektrický proud**. Má-li vodič nositele náboje obou polarit, pohybují se tito nositelé ve vzájemně opačných směrech. Směr toku kladných nábojů historicky definujeme jako směr proudu. U kovových vodičů je tedy směr proudu právě opačný než směr toku elektronů. Velikost (intenzitu) proudu posuzujeme podle velikosti náboje obojí polarity, který projde určitým průřezem vodiče ve vzájemně opačných směrech za jednotku času. Projde-li průřezem vodiče celkově náboj $\mathrm{d}Q$ za čas $\mathrm{d}t$ bude tok náboje vodičem charakterizovat skalární veličina

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,.} \tag{1}$$

která se nazývá **elektrický proud**. Jeho jednotkou je $1\ \mathrm{C \cdot s^{-1}} = 1\ \mathrm{A}$ (ampér), která je jednou ze základních jednotek soustavy SI. Její absolutní definici podáme v čl. 2.4. Pro **stacionární** (tj. časově neproměnný – ustálený) proud můžeme obecný výraz (1) nahradit výrazem

$$I = \frac{Q}{t}\,.$$

Rovnoměrný pohyb náboje bodového náboje Q po kružnici s periodou T, resp. s úhlovou rychlostí ω, můžeme chápat jako ustálený proud

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\omega Q}{2\pi}\,. \tag{2}$$

Bude-li se element náboje $\mathrm{d}Q$ pohybovat v lineárním útvaru rychlostí $v = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$, bude po dosazení do (1) reprezentovat elektrický proud

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l} v = \tau v, \tag{3}$$

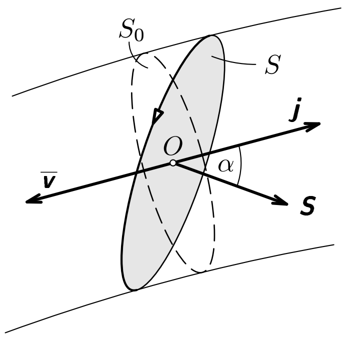
kde $\tau = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}l$ je délková hustota náboje a v je velikost okamžité rychlosti náboje v uvažovaném místě lineráního útvaru.

Elektrický proud je veličina, která obecně popisuje prostorový jev. Omezíme se nyní na běžný případ vodičů, které mají volné náboje jen jedné polarity (u kovových vodičů jde o elektrony), označíme ϱ_0 prostorovou hustotu volného náboje a $\overline{v}$ velikost usměrněné rychlosti jejich nositelů (elektronů). Rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ se zpravidla označuje jako **driftová rychlost**. Pak za čas $\mathrm{d}t$ projde určitým příčným průřezem (kolmým k $\overline{\boldsymbol{v}}$) o obsahu S_0 náboj $\mathrm{d}Q = \varrho_0 S_0 \overline{v} \mathrm{d}t$. Elektrický proud (1) bude

$$I = \varrho_0 \overline{v} S_0 = -e n_0 \overline{v} S_0, \tag{4}$$

kde $n_0 = \varrho_0/(-e)$ je počet nositelů volného náboje (tj. v našem případě elektronů; z nichž každý nese náboj $-e$) v jednotkovém objemu vodiče, přičemž pro elektrony zřejmě je $\varrho_0 < 0$.

Rovinnou plochu S průřezu můžeme zavést jako vektor $\boldsymbol{S}$ (obr. 1), který má směr daný normálou k ploše a pravidlem pravé ruky (ukazují-li prsty pravé ruky směr oběhu po hraniční křivce plochy, ukáže palec směr plochy jako vektoru $\boldsymbol{S}$). Protože driftová rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ je také vektor, nebudeme obecně uvažovat vektory $\boldsymbol{S}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ o stejném směru a výraz (4) přepíšeme do obecnějšího tvaru



Obr. 1

$$I = \varrho_0 \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{S} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{S} = jS\cos\alpha = jS_0,$$

kde $S_0 = S$ pro $\alpha = 0$ (viz obr. 1) a

$$\boxed{\boldsymbol{j} = \varrho_0 \overline{\boldsymbol{v}}} \tag{5}$$

je **proudová hustota**. Je to vektor o velikosti

$$j = \frac{I}{S\cos\alpha} = \frac{I}{S_0} \quad (\text{obecněji } j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_0}) \tag{6}$$

a o směru vektoru driftové rychlosti nositelů kladného náboje. Pro případ nositelů volného náboje – elektronů má proudová hustota opačný směr než driftová rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ (obr. 1).

Velikost vektoru $\boldsymbol{j}$ má význam plošné hustoty elektrického proudu v uvažovaném místě průřezu. Jednotka: $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.

Nebude-li proudová hustota na uvažovaném průřezu konstantní, bude celkový elektrický proud procházející průřezem o obsahu S dán výrazem

$$I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Příklad 1 – driftová rychlost elektronů ve vodiči

Vodičem z jednomocné mědi o průřezu $S_0 = 1{,}0\ \mathrm{mm}^2$ prochází proud $I = 5{,}0$ A. Vypočtěte:

a) Počet volných elektronů v jednotkovém objemu Cu.

b) Úhrnný náboj volných elektronů v jednotkovém objemu Cu.

c) Driftovou rychlost volných elektronů při proudu I.

Měď má poměrnou atomovou hmotnost $A_\mathrm{r} = 63{,}54$ a hustotu[1]
$s = 8{,}93 \cdot 10^3\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

Řešení

a) Jeden mol mědi o molové hmotnosti $M = 0{,}06354$ kg a o molovém objemu

$$V_\mathrm{m} = \frac{M}{s} = \frac{63{,}54 \cdot 10^{-3}}{8{,}93 \cdot 10^3}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1} = 7{,}12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1}$$

[1]Pro hustotu (hmotnosti) budeme používat alternativní značku s s ohledem na kolizi značky ϱ se zde častěji používanou veličinou hustota náboje, označovanou stejně.

obsahuje $N_\mathrm{A} = 6{,}0221 \cdot 10^{23}$ jednoatomových molekul Cu, z nichž každá má volný jeden (valenční) elektron. Tedy počet volných elektronů v jednotkovém objemu je

$$n_0 = \frac{N_\mathrm{A}}{V_\mathrm{m}} = \frac{sN_\mathrm{A}}{M} = 8{,}46 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

b) Úhrnný náboj volných elektonů v jednotkovém objemu mědi je

$$Q_\mathrm{V} = -en_0 = -1{,}36 \cdot 10^{10}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}.$$

c) Velikost driftové rychlosti určíme ze vztahu (4):

$$\overline{v} = \left| \frac{I}{-\,en_0 S_0} \right| = 3{,}69 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 0{,}369\ \mathrm{mm} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

Z provedených výpočtů si můžeme udělat názor o mikroskopických poměrech v kovových vodičích: počet volných nositelů náboje – elektronů a jejich úhrnný náboj v jednotkovém objemu je značný, a proto driftová rychlost elektronů potřebná k vyvolání proudů běžné technické velikosti v drátových vodičích je nesmírně malá (doslova hlemýždí).

1.2 Ohmův zákon

Uvažujme vodič, u něhož jsou volnými nositeli náboje elektrony. Nyní v mezích klasické mechaniky kvantitativně popíšeme mechanismus vedení proudu, který povede k všeobecně známému Ohmovu zákonu.

Umístíme-li vodič do elektrického pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$ (např. připojením ke galvanickému článku), působí na každý volný elektron síla $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$, která mu podle Newtonova zákona udělí zrychlení $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m_\mathrm{e} = -e\boldsymbol{E}/m_\mathrm{e}$ proti směru vnějšího pole. Tím získávají chaoticky se pohybující elektrony ještě složku rychlosti v protisměru vloženého elektrického pole $\boldsymbol{E}$. Tak dochází k usměrněnému driftovému pohybu volných elektronů a ve vodiči vznikne **elektrický proud**.

Elektron ve vodiči se po vykonání jisté dráhy d (nazývající se volná dráha) srazí s iontem. Průměrná doba mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami nechť je τ. Za tuto dobu se bude elektron rovnoměrně urychlovat a na jejím konci bude mít rychlost $\boldsymbol{v}_\mathrm{max} = \boldsymbol{a}\tau$. Průměrná rychlost na volné dráze průměrné velikosti je hledaná driftová rychlost, tj.

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{max}}{2} = -\frac{e\tau}{2m_\mathrm{e}}\boldsymbol{E}.$$

Proudová hustota (5) bude

$$\boldsymbol{j} = \varrho_0 \overline{\boldsymbol{v}} = -en_0 \overline{\boldsymbol{v}} = \frac{e^2 n_0 \tau}{2m_\mathrm{e}}\boldsymbol{E}. \tag{7}$$

Koeficient úměrnosti

$$\gamma = \frac{e^2 n_0 \tau}{2m_\mathrm{e}} \tag{8}$$

je závislý na počtu nositelů (elektronů) n_0 v jednotkovém objemu a na době τ, neboli na volné dráze. Veličina γ se nazývá **měrná elektrická vodivost** (nebo **konduktivita**) látky. Protože dobu τ nelze přímo měřit, určuje se γ experimentálně. Přitom se zjišťuje, že pro určitou teplotu určité látky je γ konstanta.

Po zavedení měrné vodivosti (8) můžeme výraz (7) přepsat do výsledného tvaru

$$\boxed{\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E},} \tag{9}$$

který se v literatuře označuje jako **Ohmův zákon v diferenciálním tvaru** (i když vlastně o diferenciální tvar nejde). Výstižnější je označení **lokální tvar Ohmova zákona**, protože výraz (9) se vztahuje na určité místo, resp. bod, vodivého prostředí. Vztah říká, že proudová hustota v určitém bodě vodivého prostředí je přímo úměrná intenzitě vloženého elektrického pole v tomto bodě (platí pro určitou teplotu prostředí).

Uvažujme nyní lineární homogenní vodič délky l a příčného průřezu o obsahu S_0, připojený ke zdroji o napětí U. Pak intenzita pole uvnitř vodiče bude mít konstantní velikost $E = U/l$. Dosadíme-li za velikost proudové hustoty $j = I/S_0$ do (9) dostaneme vztah

$$\frac{I}{S_0} = \gamma \frac{U}{l},$$

z něhož plyne známý vztah

$$\boxed{U = \frac{l}{\gamma S_0} I = RI,} \tag{10}$$

kde

$$R = \frac{l}{\gamma S_0} = \varrho \frac{l}{S_0}, \tag{11}$$

je **elektrický odpor** uvažovaného lineárního vodiče, přičemž $\varrho = 1/\gamma$ je **měrný elektrický odpor (rezistivita)**.[2] Výraz (10) představuje klasický **Ohmův zákon** experimentálně objevený r. 1826 G. S. Ohmem.

Jednotky – odpor: $\mathrm{V} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \Omega$ (ohm),
– měrný odpor: $\Omega \cdot \mathrm{m}$,
– měrná vodivost: $\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

[2] Zde je další kolize značky ϱ (viz poznámku 1). V tomto textu však veličinu **rezistivita** nebudeme používat; omezíme se na veličinu **konduktivita** běžně užívanou v teorii elektromagnetického pole.

Příklad 2 – zemnicí elektroda

Uvažujte zemnicí elektrodu ve formě koule o poloměru $a = 200$ mm uloženou do zeminy v hloubce, která je značně větší než je poloměr a. Pro jednoduchost řešení dále předpokládejte, že přívodní drát je od zeminy izolován (obr. 2). Zemina má měrnou vodivost $\gamma = 1{,}8 \cdot 10^{-2}\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Při zkratu teče přívodním drátem proud $I = 50$ A. Vypočtěte:

a) Závislost potenciálu $\varphi = \varphi(r)$ elektrického pole, které se vytvoří v zemině při zkratu, kde r je vzdálenost od středu elektrody. Potenciál normujte tak, že volte $\varphi(\infty) = 0$.

b) Zemnicí odpor elektrody, který je definován vztahem

$$R_\mathrm{z} = \frac{U_\mathrm{z}}{I},$$

kde $U_\mathrm{z} = \varphi(a) - \varphi(\infty) = \varphi(a)$ je zemnicí napětí.

c) Ztrátový výkon při zkratu.

Řešení

a) Ekvipotenciální a proudové plochy mají zřejmě kulový tvar se středem ve středu elektrody. Proudová hustota na kulové ploše obecného poloměru r (obr. 2) je

$$\boldsymbol{j} = \frac{I}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}^\circ,$$

kde $\boldsymbol{r}^\circ$ je jednotkový vektor ve směru normály. Pak v bodech na této ploše musí být elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$, kterou určíme ze vztahu (9):

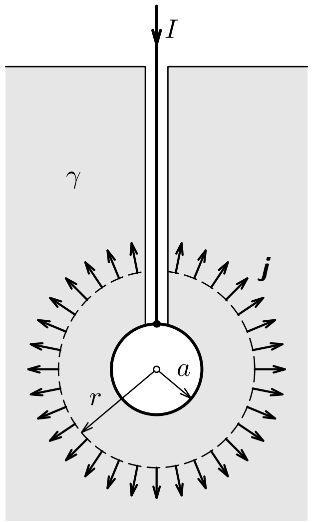
$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2}\boldsymbol{r}^\circ.$$

Potenciál vypočteme pomocí vztahu (viz např. výraz (34) v [12]):

$$\varphi = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + C = -\frac{I}{4\pi\gamma}\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} + C = \frac{I}{4\pi\gamma r} + C,$$

kde integrační konstantu C určíme z okrajové podmínky $\varphi(\infty) = 0$, odkud $C = 0$. Hledaná závislost potenciálu je

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma r}, \quad r \in \langle a, \infty).$$



Obr. 2

b) Zemina, v níž je uložena elektroda, je vlastně rezistorem, jehož jeden okraj tvoří elektroda a druhým okrajem je nekonečně rozlehlý vodivý prostor. Potenciální rozdíl mezi těmito okraji je

$$U_\mathrm{z} = \varphi(a) - \varphi(\infty) = \frac{I}{4\pi\gamma a},$$

odtud zemnicí odpor

$$R_\mathrm{z} = \frac{U_\mathrm{z}}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma a} = 22{,}1\ \Omega.$$

c) Ztrátový výkon

$$P_\mathrm{z} = R_\mathrm{z} I^2 = 55{,}3\ \mathrm{kW}.$$

1.3 Elektromotorické napětí

Uzavřený proudový okruh C nechť je v dynamické rovnováze – prochází jím ustálený elektrický proud. Uvažujme pro jednoduchost představy kladný náboj – ten se musí pohybovat ve směru klesajícího potenciálu (záporný náboj ve směru stoupajícího potenciálu). Je-li okruh uzavřený, musí kladné náboje opět vystoupit na místa o vyšším potenciálu – musí se tedy pohybovat proti elektrostatickým silám. Proto proti úbytku napětí v tomto okruhu, tj.

$$-\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

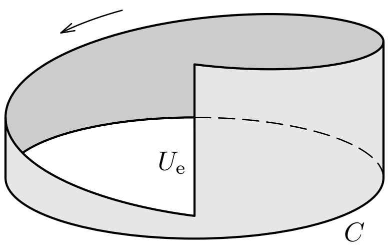
musí působit napětí vřazeného elektrického zdroje, tzv. **elektromotorické napětí** U_e (obr. 3). V rovnováze platí rovnice

$$U_\mathrm{e} - \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

Odtud elektromotorické napětí

$$U_e = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}. \qquad (12)$$

Kroužek v symbolu integrálu označuje, že integrace se provede po uzavřené křivce C.

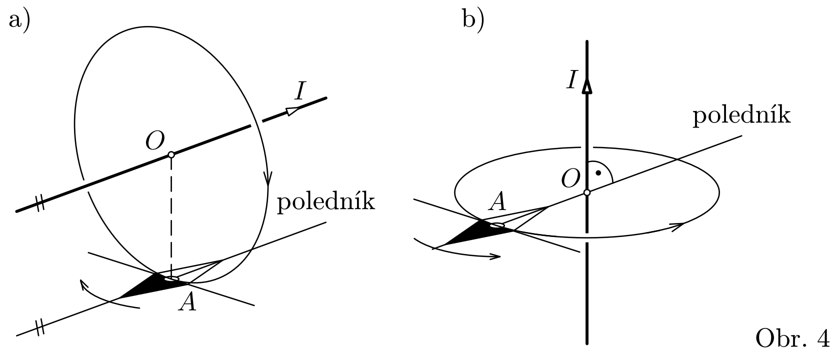


Obr. 3

2 Zákony magnetismu a jejich aplikace

2.1 Biotův–Savartův–Laplaceův zákon

V tomto článku provedeme klasický popis jevu na historickém empirickém základě, který je poměrně jednoduchý. Podle Oerstedova objevu (1820) vzniká v okolí vodiče s elektrickým proudem magnetické pole, které se projevuje silovým působením na magnetku (obr. 4a,b).



Obr. 4

Pro vodič bez proudu byla magnetka nastavena do směru poledníku. Po zapnutí proudu pozoroval Oersted její výchylku ve směru, který určuje později formulované Ampérovo pravidlo pravé ruky: položíme-li pravou ruku na vodič tak, aby prsty ukazovaly směr proudu a dlaň byla obrácena k místu (tj. k bodu A), v němž vyšetřujeme pole, vychýlí se severní pól magnetky ve směru palce.

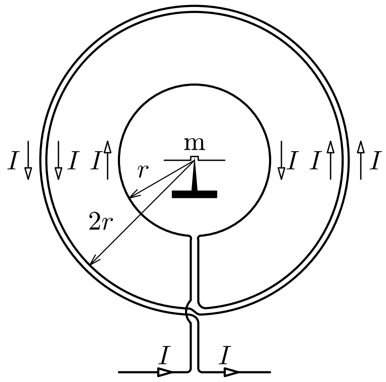
K popisu magnetického pole byla v roce 1820 zavedena již z magnetostatiky veličina **intenzita magnetického pole $\boldsymbol{H}$** způsobem analogickým jako intenzita elektrického pole, tj. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$. Vycházelo se přitom z Coulombova zákona pro magnetismus (1785), který má tvar podobný Coulombovu zákonu pro elektrické náboje q. Problém byl ovšem v magnetických „nábojích“ označovaných jako kladná a záporná magnetická množství Φ, o nichž se předpokládalo, že jsou soustředěna v severním a jižním pólu magnetu (resp. v jejich blízkosti). Na rozdíl od elektrického náboje se však nepodařilo izolovat osamocená magnetická množství. Pokud se tedy při popisu magnetického pole pracuje s jediným magnetickým množstvím, tak jde vždy o pomocný matematický pojem. Intenzita magnetického pole se v magnetostatice definuje jako síla, která působí na kladné jednotkové magnetické množství Φ:

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{F}}{\Phi}. \tag{13}$$

K jednotkám veličin $\boldsymbol{H}$, Φ (v soustavě SI) se vrátíme později. I přes ne zcela jasný fyzikální smysl magnetického množství je veličina $\boldsymbol{H}$ plnohodnotná i v současné elektrodynamice (vystupuje např. v Maxwellových rovnicích). Celý historicky ovlivněný problém popisu magnetického pole uspokojivě řeší až teorie relativity (viz kap. 3).

Pomocí intenzity $\boldsymbol{H}$ se zavádí pojem **siločáry** magnetického pole jako orientované čáry vedené tak, že tečna v kterémkoliv jejím bodě má směr $\boldsymbol{H}$ a hustota čar je úměrná velikosti $\boldsymbol{H}$. U magnetu siločáry vystupují ze severního pólu, vracejí se k pólu jižnímu a vnitřkem magnetu se uzavírají. Z Oerstedových pokusů bylo zřejmé, že siločáry v okolí proudovodiče jsou uzavřené křivky, ležící v rovině kolmé k proudovodiči (obr. 4).

Potřebné kvantitativní vztahy pro intenzitu magnetického pole vybuzeného proudem ve vodiči vyplynuly až z Biotova a Savartova pokusu (obr. 5), který byl vykonán krátce po Oerstedově objevu. Tito fyzikové vytvořili **magnetometr**, který sestával z kruhové smyčky o poloměru r a z dalších dvou kruhových smyček o poloměru $2r$, jimiž procházel proud opačným směrem. Do středu smyček umístili malou magnetku (m) a rovinu smyček orientovali tak, aby jí procházel poledník. Celkový účinek proudu byl takový, že magnetka se nevychýlila, a tudíž magnetické pole ve středu smyček se vzájemně vynulovalo.



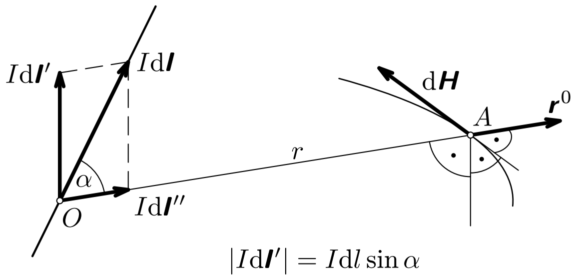
Obr. 5

Pokus ukázal, že intenzita magnetického pole je přímo úměrná délce vodiče a nepřímo úměrná čtverci jeho vzdálenosti od bodu v němž se vyšetřuje, neboť pro pokus platí vztah

$$\frac{l}{r^2} = \frac{2\pi r}{r^2} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 2r}{(2r)^2} = \frac{2\pi}{r} = \text{konst.},$$

jelikož r je libovolně volený poloměr první smyčky magnetometru.

Zbývalo ještě vyjádřit výsledek ve formě diferenciálního vztahu pro idealizovaný zdrojový proudový element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ a rozhodnout, jak element $\boldsymbol{H}$ intenzity pole bude záviset na směru elementu $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$. Jak z čl. 2 v Úvodu víme, úkolu se již r. 1820 ujal Laplace. Pokud jde o vliv směru elementu $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, Laplace zřejmě využil Oerstedova zjištění, že když vodič (resp. jeho lineární úsek) směřoval k bodu A (obr. 4a), tak se magnetka nevychylovala. Při aplikaci na vektorový proudový element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ lze tedy usoudit, že o jeho vlivu na magnetické pole v bodě A rozhoduje jen jeho složka $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ o velikosti $I\mathrm{d}l\sin\alpha$ kolmá k průvodiči (obr. 6). Pokud jde o závislost intenzity pole na I, mlčky jsme předpokládali přímou úměrnost. Tu si můžeme vysvětlit tím, že proud I je dán usměrněným pohybem jednotlivých elektronů, jejichž účinek se v bodě A prostě algebraicky sečte (princip superpozice).



Obr. 6

Proudový element vyvolá v bodě A magnetické pole, přičemž pro element jeho intenzity $\boldsymbol{H}$ v soustavě SI platí

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi r^2}(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^\circ),} \tag{14}$$

kde $\boldsymbol{r}^\circ$ je jednotkový vektor vedený z bodu proudového elementu k bodu (A) pole. Intenzita magnetického pole je vektor, jehož směr určíme pravidlem pro vektorový součin dvou vektorů (je to vektor kolmý k rovině proložené vektorem $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ a bodem A a míří na tu stranu, kterou ukáže palec pravé ruky, když prsty budou směřovat od prvého vektoru ($\mathrm{d}\boldsymbol{l}$) ke druhému ($\boldsymbol{r}^\circ$) ve směru menšího úhlu, tj. $\alpha \in \langle 0, 180^\circ\rangle$. Pro jeho velikost platí

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{H}| = \frac{I\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\sin\alpha. \tag{15}$$

Nově zavedená veličina $\boldsymbol{H}$ má v SI zřejmě jednotku $\mathrm{A{\cdot}m^{-1}}$.

Vedle veličiny $\boldsymbol{H}$ se magnetické pole častěji popisuje veličinou **magnetická indukce $\boldsymbol{B}$**. Pro pole ve vakuu platí mezi těmito veličinami jednoduchý vztah

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H},} \tag{16}$$

kde konstanta úměrnosti μ_0 se nazývá **permeabilita vakua**. **Biotův–Savartův–Laplaceův zákona** pro magnetickou indukci ve vakuu má tedy tvar

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^\circ).} \tag{17}$$

Pro permeabilitu vakua platí v soustavě jednotek SI důležitý vztah

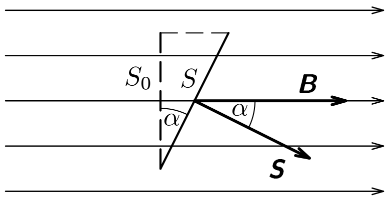
$$\boxed{\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}},} \tag{18}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Poznatek, že konstanta z Coulombova zákona (permitivita ε_0) a konstanta z B.-S.-L. zákona (permeabilita μ_0) jsou vzájemně vázány rychlostí světla ve vakuu, experimentálně získal r. 1852 s velikým překvapením německý fyzik W. Weber (1804–1891). V čl. 3.4 zjistíme, že vztah (18) formálně vyplyne ze speciální teorie relativity. Uvedenou číselnou velikost μ_0 určíme v čl. 2.4 z definice jednotky ampér.

Pro plynná prostředí, tedy i pro vzduch, se permeabilita jen velmi málo odlišuje od uvedené hodnoty (18) pro vakuum. Relativní odchylka je řádu jen 10^{-9} až 10^{-6}; pro vzduch 10^{-7}. Proto **můžeme zde uvedené vztahy pro vykuum používat s dostatečnou přesností i pro plyny** a jiné paramagnetické látky. Podrobný výklad bude v připravovaném studijním textu Elektrodynamika 2.

Diferenciální výrazy (14) a (17) slouží pro výpočet magnetických polí proudovodičů různých tvarů. Jsou formulovány pro idealizovaný **proudový element** (který prakticky nelze realizovat – jak bychom k němu přivedli proud?). Takový element je však částí celků – lineárních proudů, cívek, atd. Aplikaci ukážeme na následujících příkladech.

Podobně jako u elektrického pole tak i u magnetického pole se zavádí pojem **indukční čáry**. Jde o orientované čáry, jejichž tečny v kterémkoliv jejich bodě mají směr vektoru $\boldsymbol{B}$ v tomto bodě a jejichž hustota se volí tak, aby byla úměrná velikosti $\boldsymbol{B}$. Na podkladě magnetických indukčních čar se zavádí **magnetický indukční tok** Φ jako skalární veličina, jejíž velikost je úměrná celkovému počtu indukčních čar, které procházejí uvažovanou plochou v poli. Pro homogenní pole (obr. 7) je tok Φ rovinnou plochou dán skalárním součinem vektorů $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{S}$, tedy



Obr. 7

$$\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = BS\cos\alpha, \tag{19}$$

kde $S\cos\alpha = S_0$ je průmět plochy S do směru kolmého k indukčním čarám.

Je-li pole nehomogenní, vyjádříme tok indukce $\boldsymbol{B}$ elementem plochy a provedeme integraci přes celou plochu:

$$\boxed{\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.} \tag{20}$$

Jednotky nově zavedených veličin:

Permeabilita –

$[\mu_0] = [\varepsilon_0^{-1}c^{-2}] = \mathrm{F^{-1}{\cdot}m{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^2 = V{\cdot}C^{-1}{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^2 = V{\cdot}s{\cdot}A^{-1}{\cdot}m^{-1} = H{\cdot}m^{-1}}$, kde H (henry) $= \mathrm{V \cdot s \cdot A^{-1}}$ je jednotka indukčnosti.

Magnetická indukce –

$[B\,] = [\mu_0 H] = \mathrm{V{\cdot}s{\cdot}A^{-1}{\cdot}m^{-1}{\cdot}A{\cdot}m^{-1} = V{\cdot}s{\cdot}m^{-2} = Wb{\cdot}m^{-2} = T}$ (tesla), kde $\mathrm{V \cdot s} =$ Wb (weber) je jednotka magnetického indukčního toku Φ.

Magnetické množství (13) –

$[\Phi] = [FH^{-1}] = \mathrm{N \cdot m \cdot A^{-1} = J \cdot A^{-1} = W \cdot s \cdot A^{-1} = V \cdot s = Wb}$.

Magnetické množství má tedy stejnou jednotku jako magnetický indukční tok (má proto i stejnou značku). U permanentních magnetů si proto magnetické množství můžeme představit jako „matematický“ zdroj indukčního toku magnetu.

Příklad 3 – magnetické pole kruhové proudové smyčky

Vypočtěte intenzitu a indukci magnetického pole kruhové smyčky v obecně položeném bodě A na její ose ve vzdálenosti x od jejího středu.

Řešení

Ze smyčky si vytkneme element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, který v bodě A (obr. 8) ve vzdálenosti r budí pole intenzity $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_r$, pro jejíž velikost platí

$$\mathrm{d}H_r = \frac{I\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{I\mathrm{d}l}{4\pi r^2}.$$

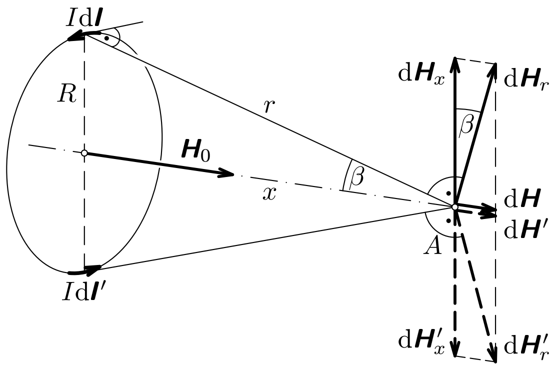
Protože všechny elementy smyčky mají od bodu A stejnou vzdálenost r, má intenzita od každého elementu stejnou velikost $\mathrm{d}H_r$, avšak jiný směr. Ke každému elementu $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ existuje protilehlý element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$, pro který složka $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_x$ intenzity kolmá k ose má stejnou velikost, avšak opačný směr než složka $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_x$. Tyto složky se proto vzájemně vyruší a složky $\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ ve směru osy o velikosti

$\mathrm{d}H = \mathrm{d}H_r \sin\beta$ se sečtou. Dále zřejmě platí $\sin\beta = \dfrac{R}{r}$. Integrací přes celou smyčku o délce $l = 2\pi R$ dostaneme

$$H = \int_0^{2\pi R} \frac{I \sin\beta}{4\pi r^2} \mathrm{d}l = \frac{IR}{2r^2} \sin\beta = \frac{IR^2}{2r^3} = \frac{IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}. \tag{21}$$

Ve zvláštní poloze bodu A v rovině smyčky (x=0) je

$$H_0 = \frac{I}{2R},\ B_0 = \mu_0 \frac{I}{2R}. \tag{22}$$



Obr.8

Půjde-li o rovinnou kruhovou cívku vytvořenou z těsně vinutými závity (teoreticky) stejného poloměru R, využijeme principu superpozice a veličiny $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{B}$ se z-krát zvětší. Použitím cívky můžeme tedy téhož účinku dosáhnout proudem z-krát menším, než u prosté smyčky.

Příklad 4 – magnetické pole přímkového proudu

Vypočtěte intenzitu magnetického pole v bodě A ve vzdálenosti r od přímého tenkého vodiče, kterým prochází proud I. Vodič má tvar:

a) úsečky (EF), přičemž bod A tvoří vrchol obecného trojúhelníku AEF o výšce r a o vrcholovém úhlu $|\beta_1| + \beta_2$ (obr. 9), kde β_1, β_2 jsou dané úhly,

b) přímky.

Řešení

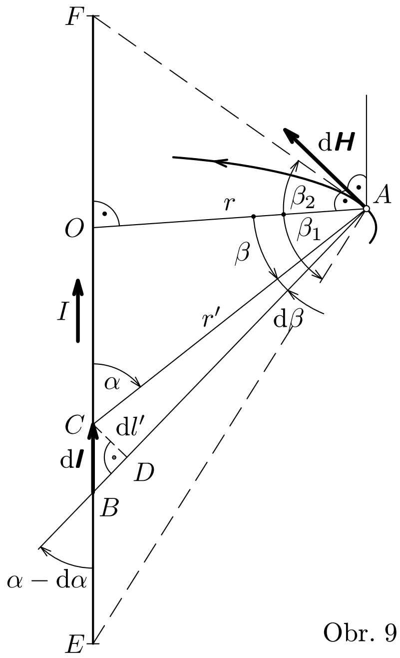
Z vodiče si vytkneme obecně položený proudový element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ o délce $|BC| = \mathrm{d}l$. Velikost intenzity, kterou tento element vybudí v bodě A (obr. 9) je dána výrazem (15), v němž vzdálenost r pro náš případ označíme r'. Jsou zde tedy tři proměnné: r', α, $\mathrm{d}l$. Vyjádříme je jako funkci nové proměnné – úhlu β. K tomu elementární úsečku CD o délce $\mathrm{d}l'$ vyjádříme jednak z trojúhelníku BCD, tj.

$$\mathrm{d}l' = \mathrm{d}l \sin(\alpha - \mathrm{d}\alpha) \approx \mathrm{d}l \sin\alpha,$$

jednak jako kruhový oblouk příslušný úhlu $\mathrm{d}\beta$, tj. $\mathrm{d}l' \approx r'\mathrm{d}\beta$. Proto můžeme dostatečně přesně psát $\mathrm{d}l \sin\alpha = r'\mathrm{d}\beta$. Pak výraz (15) přejde do tvaru

$$\mathrm{d}H = \frac{I\mathrm{d}l}{4\pi r'^2}\sin\alpha = \frac{I}{4\pi r}\cos\beta\,\mathrm{d}\beta, \qquad (23)$$

kde $r = r'\cos\beta$ je daná vzdálenost bodu A od přímky.



Obr. 9

a) Intenzitu magnetického pole v bodě A pro vodič konečné délky EF dostaneme integrací výrazu (23) v mezích β_1, β_2, tj.

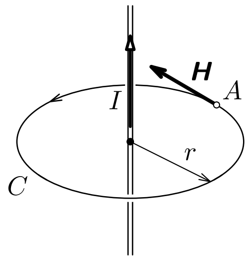
$$H = \frac{I}{4\pi r}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta\,\mathrm{d}\beta = \frac{I}{4\pi r}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1), \qquad (24)$$

kde úhel β_1 je v případě znázorněném na obr. 9 záporný.

b) Pro vodič neomezené délky je $\beta_1 = -\pi/2$, $\beta_2 = \pi/2$; pak

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}.} \qquad (25)$$

Tento výsledek má jednoduchý tvar a říká, že intenzita přímkového proudu v určitém bodě A má v jeho okolí velikost rovnou proudu dělenému délkou siločáry C procházející tímto bodem A (obr. 10).



Obr. 10

Výsledek (25) platí s jistou chybou i pro vodič konečné délky ve vzdálenostech $r \ll l$.

K určení směru siločar (a indukčních čar) magnetického pole v okolí proudovodiče se užívá **pravidlo pravé pěsti**: ukazuje-li palec pravé ruky směr proudu, zahnuté prsty ukáží směr siločar.

2.2 Zákon celkového proudu

Analogicky elektromotorickému napětí (12) se definuje **magnetomotorické napětí** výrazem

$$U_\mathrm{m} = \oint\limits_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \;\; [U_\mathrm{m}] = \mathrm{A}. \tag{26}$$

Tato veličina, na rozdíl od elektromotorického napětí, má v podstatě formální charakter, protože existence samostatných magnetických „nábojů“ (resp. množství) nebyla prokázána. Formálně zavedená veličina U_m však velmi usnadňuje výpočet intenzity $\boldsymbol{H}$.

Budeme-li počítat magnetomotorické napětí pro přímý nekonečně dlouhý proudovodič, je výhodné za křivku C zvolit siločáru ve tvaru kružnice o poloměru r (obr. 10). Pak vzhledem k (25) je

$$\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H\mathrm{d}l = \frac{I}{2\pi r}\mathrm{d}l\,, \qquad\qquad U_\mathrm{m} = \frac{I}{2\pi r}\int\limits_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = I.$$

Magnetomotorické napětí tedy nezávisí na poloměru kruhové siločáry a tím i na tvaru a velikosti uzavřené rovinné čáry a je rovno proudu, který čára uzavírá. Výsledek lze zobecnit pro libovolnou integrační křivku C a pro libovolné proudy, které křivka uzavírá:

$$\boxed{\oint\limits_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k.} \tag{27}$$

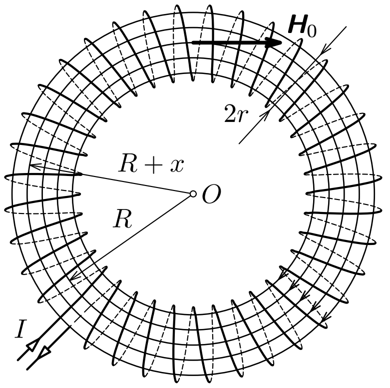
Toto je **zákon celkového proudu** (označovaný někdy také jako **Oerstedův zákon**), podle něhož je magnetomotorické napětí, působící v libovolné uzavřené křivce, rovno celkovému proudu procházejícímu vnitřkem křivky.

Při rozšíření o Maxwellův (posuvný) proud (viz úlohu č. 3) bychom dostali první z hlavních Maxwellových rovnic. Výraz (27) má velký význam i pro přímý výpočet intenzity magnetického pole zejména v případech, kdy je možné vhodnou volbou tvaru uzavřené křivky snadno určit magnetomotorické napětí. Ukážeme si to na následujících dvou příkladech a na některých úlohách.

Příklad 5 – magnetické pole toroidu

Vypočtěte intenzitu $\boldsymbol{H}$ magnetického pole toroidu o z závitech, kterým prochází proud I. Toroid je cívka ve tvaru anuloidu, tj. válce o poloměru r podstavy, jehož osa je stočena do kružnice o poloměru R. Závity jsou hustě vinuty drátem zanedbatelného průměru.

Vypočtěte relativní odchylku intenzity na okrajových siločárách o poloměrech $R+r$, $R-r$ vzhledem k intenzitě $\boldsymbol{H}_0$ na siločáře o středním poloměru R. Určete střední velikost $\overline{H}$ intenzity a její relativní velikost vzhledem k velikosti H_0. Odchylky vyhodnoťte numericky pro tyto případy: a) $R = 3r$, b) $R = 9r$.



Obr. 11

Řešení

Ze zákona celkového proudu (27) zřejmě plyne, že magnetické pole toroidu je omezeno na prostor anuloidu (obr. 11), na němž je toroid navinut.

Siločáry mají tvar kružnic o poloměru $R + x$, kde $x \in \langle -r, r\rangle$. Magnetomotorické napětí (26) snadno určíme, neboť libovolná siločára obepíná z krát proud I, intenzita $\boldsymbol{H}$ má podél siločáry konstantní velikost, tedy

$$H \cdot 2\pi(R + x) = zI,$$

neboli

$$H = \frac{zI}{2\pi(R + x)}. \tag{28}$$

Intenzita na vnitřním, středním a vnějším poloměru tedy je

$$H_1 = \frac{zI}{2\pi(R - r)}, \quad H_0 = \frac{zI}{2\pi R}, \quad H_2 = \frac{zI}{2\pi(R + r)}.$$

Relativní odchylky jsou

$$\delta_1(H_1) = \frac{H_1 - H_0}{H_0} = \frac{r}{R - r}, \qquad \delta_2(H_2) = \frac{H_2 - H_0}{H_0} = -\frac{r}{R + r}.$$

Numericky: a) $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = -\frac{1}{4}$, b) $\delta_1 = \frac{1}{8}$, $\delta_2 = -\frac{1}{10}$.

Střední hodnota intenzity se určí integrací (28) pomocí věty o střední hodnotě diferenciálního počtu:

$$\overline{H} = \frac{zI}{2\pi} \cdot \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{R+x} = \frac{zI}{4\pi r} \ln \frac{R+r}{R-r}.$$

Relativní velikost $\overline{H}$ ve vztahu k H_0 je

$$\frac{\overline{H}}{H_0} = \frac{R}{2r} \ln \frac{R+r}{R-r}.$$

Numericky: a) $\dfrac{\overline{H}}{H_0} = 1{,}0397$, b) $\dfrac{\overline{H}}{H_0} = 1{,}00415$.

Příklad 6 – magnetické pole solenoidu

Vypočtěte intenzitu magnetického pole solenoidu, tj. cívky s hustě vinutými závity na kruhovém válci. Předpokládejte, že na délku l připadá z závitů. Řešte ve dvou případech:

a) Solenoid má konečnou délku l. Intenzitu $\boldsymbol{H}$ vypočtěte v bodě A na ose solenoidu, který je vymezen úhly β_1, β_2 (obr. 12).

b) Solenoid má neomezenou délku. K řešení využijte rovněž zákon celkového proudu.

Řešení

a) Ze solenoidu vyjmeme element šířky dx (obr. 12), kterým prochází proud

$$\mathrm{d}I = I\frac{z}{l}\mathrm{d}x.$$

Tento element si můžeme představit jako proudovou smyčku s proudem dI a pro výpočet intenzity d$\boldsymbol{H}$ pole v bodě A použít vztah (21), ve kterém proud I nahradíme dI, tedy

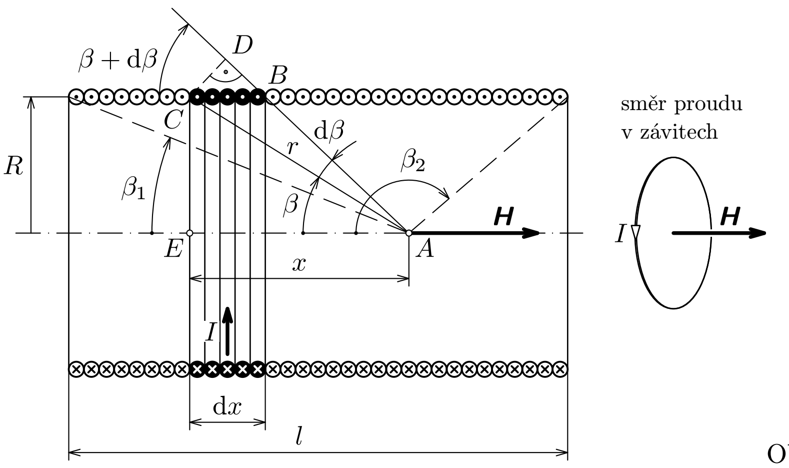
$$\mathrm{d}H = \frac{zIR^2}{2lr^3}\mathrm{d}x.$$

V tomto vztahu vystupují dvě proměnné veličiny: r, dx. Vyjádříme je jako funkci nové proměnné – úhlu β. Pro elementární úsečku CD můžeme psát:

$$\overline{CD} \approx \mathrm{d}x \sin\beta,\ \overline{CD} \approx r\mathrm{d}\beta$$

a dále z trojúhelníku ACE vyjádřit: $r = R/\sin\beta$. Pak

$$\mathrm{d}H = \frac{zI}{2l} \sin\beta\,\mathrm{d}\beta.$$



Obr. 12

Integrací v mezích od β_1 do β_2 dostáváme intenzitu magnetického pole celého solenoidu, tedy

$$H = \frac{zI}{2l} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta \, \mathrm{d}\beta = \frac{zI}{2l}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2). \tag{29}$$

Intenzita bude největší, bude-li bod A ležet ve středu solenoidu. Pak $\beta_1 = \pi - \beta_2 = \beta_0$,

$$H_0 = \frac{zI}{2l} 2\cos\beta_0 = \frac{zI}{\sqrt{l^2 + 4R^2}}. \tag{30}$$

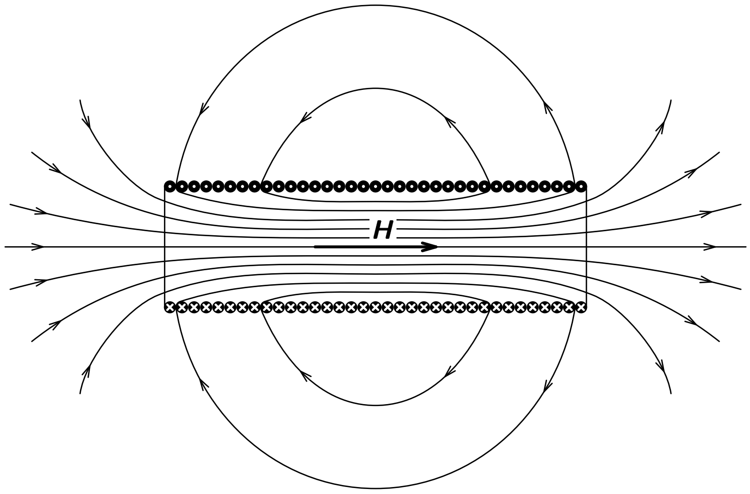
Bude-li bod A na pravém čele solenoidu, bude $\beta_1 = \arccos(l/\sqrt{l^2 + R^2})$ a $\beta_2 = \pi/2$, intenzita bude mít velikost $H_1 = \dfrac{zI}{2\sqrt{l^2 + R^2}}$. Stejný výsledek dostaneme pro bod A na levém čele solenoidu. Bude-li bod A na ose vně solenoidu budou úhly β_1, β_2 ležet v témže kvadrantu a intenzita se bude se vzdalujícím se bodem rychle zmenšovat a pro relativně vzdálený bod bude $H \to 0$.

Na obr. 13 je siločárami znázorněno celkové magnetické pole solenoidu. Je zřejmé, že u dostatečně štíhlého solenoidu bude jeho pole ve vnitřním prostoru přibližně homogenní.

b) Pro solenoid neomezeně dlouhý bude $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi$ a pro intenzitu z (29) dostaneme jednoduchý výsledek

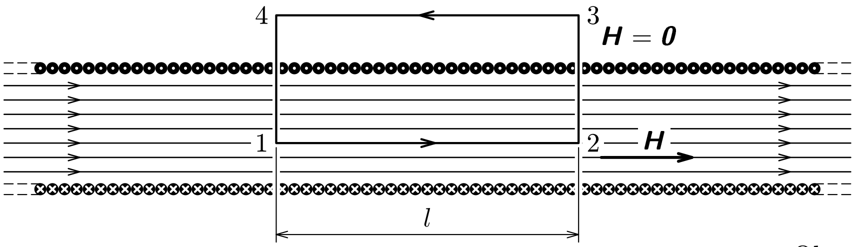
$$H = \frac{zI}{l} = nI, \tag{31}$$

kde $n = z/l$ je hustota závitů, tj. jejich počet na jednotkové délce solenoidu.



Obr. 13

Výsledek (31) můžeme dostat přímo jednoduchým výpočtem při použití zákona celkového proudu (27). Pole uvnitř solenoidu neomezené délky bude homogenní a jeho intenzita vně bude nulová (obr. 14). Uvažujme uzavřenou obdélníkovou dráhu 1, 2, 3, 4, 1, která obepíná $nl = z$ závitů. Integrál v (27) dává nenulovou hodnotu Hl jen na úseku 1, 2. Tedy $Hl = zI$. Odtud již plyne výsledek (31).



Obr. 14

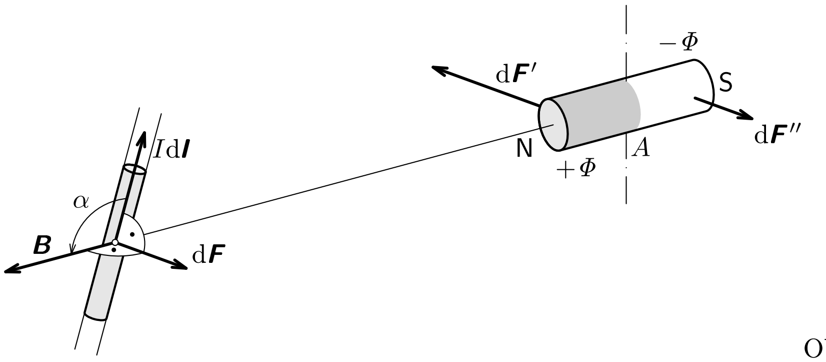
2.3 Ampérův zákon

Nyní se budeme zabývat silovým působením magnetického pole na elektrický proud. V tomto článku opět použijeme historický experimentální přístup.

Elektrický proud budí ve svém okolí magnetické pole, které působí silou na magnet a tím způsobuje jeho pohyb. Experiment bychom provedli s vodičem konečné délky, v limitě bychom úvahou přešli na jeho idealizovaný element.

Situace pro element vodiče je znázorněna na obr. 15, kdy v první fázi pokusu bude element vodiče pevný a magnet (formálně popsaný magnetickými množstvími $+\Phi$, $-\Phi$) bude otočný. Pole vybuzené elementem vodiče bude na něj působit dvojicí sil $\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}''$, která jej otočí ve směru podle Ampérova pravidla pravé ruky. Velikosti sil $\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}''$ nejsou stejné s ohledem na různou vzdálenost pólů od elementu ($\mathrm{d}F'' < \mathrm{d}F'$, $\mathrm{d}F' - \mathrm{d}F'' = \mathrm{d}F$).

Nyní situaci změníme. Magnet nechť je pevný – jeho pole má v místě proudového elementu magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ – a proudový element je pohyblivý. Na proudový element bude působit síla $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, která má podle principu akce a reakce opačný směr než výslednice sil $\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}''$. Proudový element se tedy vychýlí v opačném směru než severní pól magnetu. K určení směru působení síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ se užívá **Flemingovo pravidlo levé ruky**: levou ruku položíme na vodič tak, aby prsty ukazovaly směr proudu a indukční čáry vstupovaly do dlaně, pak palec ukáže směr pohybu vodiče, resp. směr síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$.



Obr. 15

Pro sílu, kterou působí pole o magnetické indukci $\boldsymbol{B}$ na proudový element bychom dostali zobecněním výsledků experimentů výraz

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B},} \tag{32}$$

kde křížkem je vyjádřen vektorový součin dvou vektorů. Velikost této síly je určena výrazem

$$\mathrm{d}F = BI\mathrm{d}l \sin\alpha \tag{33}$$

a její směr můžeme určit také přímo z pravidel pro vektorový součin (vektor na prvém místě sklopíme do směru vektoru na druhém místě po menším úhlu ve směru prstů **pravé** ruky; palec ukáže směr produktu, tj. síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$).

Obecný výsledek (32) se označuje jako **Ampérův zákon** na počest A. M. Ampèra, který se zabýval silovým působením v magnetickém poli. R. 1826 publikoval práci „Teorie elektromagnetických jevů, odvozená výlučně z pokusů“, v níž uvedl výraz pro sílu, kterou na sebe působí dva obecně orientované (mimoběžné) proudové elementy. Dostali bychom jej, kdybychom do výrazu (32) dosadili za $\boldsymbol{B}$ z výrazu (17) element magnetické indukce pole vybuzeného jiným proudovým elementem.

Ampérův zákon (32) byl až do vzniku teorie relativity zákonem ryze experimentálním. V čl. 3.3b jej dostaneme teoretickým postupem z relativistické transformace Coulombovy síly.

Ampérův zákon má velmi četné technické aplikace, tvoří zejména princip elektrických motorů (stejnosměrných, střídavých, třífázových) a ručkových měřicích přístrojů (galvanometrů, ampérmetrů, aj.), jak si ukážeme na některých úlohách.

2.4 Vzájemné silové působení dvou rovnoběžných přímkových proudů

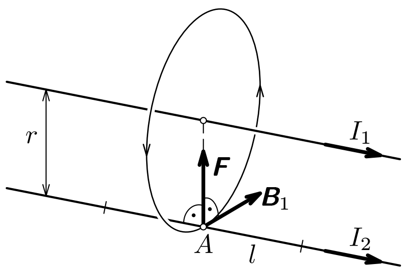
Vypočteme nyní sílu, kterou na sebe působí dva přímkové nekonečně dlouhé rovnoběžné tenké vodiče, které jsou ve vakuu od sebe ve vzdálenosti r, procházíli jedním proud I_1 a druhým proud I_2. Protože celková síla, kterou by tyto dva nekonečně dlouhé vodiče na sebe působily, by byla nekonečně velká, budeme počítat sílu, kterou jeden vodič působí na délku l druhého.

Budou-li proudy stejného směru, bude magnetická síla přitažlivá (obr. 16). Její velikost určíme ze vztahu (33), který v našem případě bude mít tvar

$$\mathrm{d}F = B_1 I_2 \mathrm{d}l, \tag{34}$$

neboť pro všechny elementy vodiče je $\sin\alpha = 1$. Pro magnetickou indukci podle (25) platí

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 I_1 / 2\pi r\,.$$



Obr. 16

Po dosazení do (34) zůstane jedinou proměnnou veličinou dl a tedy po jednoduché integraci od 0 do l bude mít síla působící na délku l velikost

$$\boxed{F = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l.} \tag{35}$$

Z tohoto výrazu se vychází při definici základní jednotky **ampér**: 1 ampér je proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímkovými nekonečně dlouhými (prakticky velmi dlouhými) vodiči zanedbatelného kruhového průměru, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 m od sebe, vyvolá mezi vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na 1 m jejich délky.

Z této definice a ze vztahu (35) poté můžeme vypočítat velikost konstanty μ_0 v soustavě SI, kterou jsme si uvedli ve vztahu (18) bez odvození:

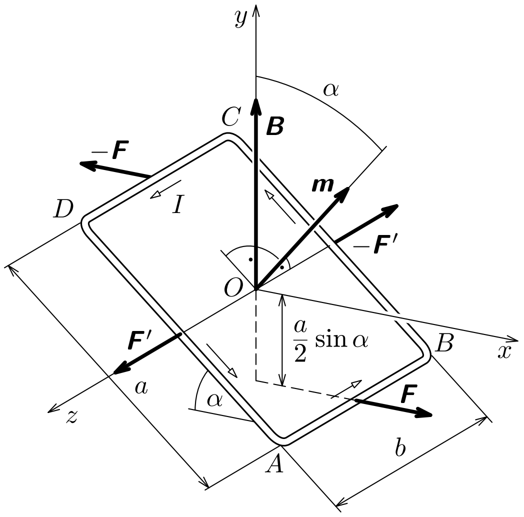
$$\mu_0 = \frac{2\pi r F}{I_1 I_2 l} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}},$$

protože pro $r = l = 1$ m, $I_1 = I_2 = 1$ A je $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N.

K absolutnímu měření proudu se konstruují **proudové váhy** (viz např. [4]), které v současné době dovolují změřit proud s relativní přesností až $5 \cdot 10^{-6}$, známe-li se stejnou (nebo lepší) přesností tíhové zrychlení v místě vah.

Budou-li dvěma rovnoběžnými vodiči procházet proudy ve vzájemně opačných směrech, budou se odpuzovat silou o velikosti (35). Budou-li mimoběžné vodiče k sobě kolmé, bude působící síla nulová.

2.5 Silové působení magnetického pole na proudovou smyčku, magnetický moment



Obr. 17

Uvažujme nejprve obdélníkovou smyčku $ABCD$ o stranách a, b (obr. 17) s proudem I, která je vložena do pole o magnetické indukci $\boldsymbol{B}$ tak, že strany AB, CD jsou rovnoběžné s osou z a vektor $\boldsymbol{B}$ má směr osy y. Normála roviny smyčky svírá s osou y úhel α. Na strany BC, DA působí síly $\boldsymbol{F}'$ téže velikosti a opačného směru a protože působí v téže přímce, jejich účinek se vyruší. Na strany AB, CD působí dvojice sil $\boldsymbol{F}$ stejné velikosti a opačného směru, která na rameni $a \cdot \sin\alpha$ působí momentem síly o velikosti

$$M = Fa\sin\alpha = BIba\sin\alpha = BIS\sin\alpha, \tag{36}$$

kde $S = ab$ je obsah plochy vymezené smyčkou. Tento moment bude smyčkou otáčet ve směru osy z.

Plochu S můžeme zavést jako vektor $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, kde směr orientovaných úseček je dán směrem procházejícího proudu. Tento vektor je kolmý k rovině, vymezené vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ v orientaci podle již zmíněného pravidla pravé ruky pro vektorový součin. Protože u obdélníku jsou vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ k sobě kolmé, je $|\boldsymbol{S}| = ab$. Po zavedení vektoru $\boldsymbol{S}$ lze výraz (36) vyjádřit vektorově

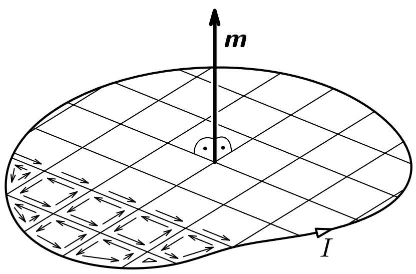
$$\boxed{\boldsymbol{M} = I(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B},} \tag{37}$$

kde veličina

$$\boxed{\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S},} \quad [\mathrm{m}] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2, \tag{38}$$

je **magnetický moment** proudové smyčky.

Výsledek (37), odvozený pro obdélníkovou smyčku, můžeme snadno zobecnit pro rovinnou smyčku libovolného tvaru. Plochu této smyčky (obr. 18) si můžeme představit složenou z elementárních obdélníkových smyček, přičemž každou z nich bude cirkulovat proud I. Jak je zřejmé, jdou po každé straně všech vnitřních elementárních smyček dva stejné proudy v protilehlých směrech, takže jejich magnetický účinek se ruší. Neruší se jen účinek proudů na vnějších stranách obvodových elementárních smyček, které tvoří původní smyčku. Proto je výsledný účinek všech elementárních smyček roven účinku celé proudové smyčky o ploše $\boldsymbol{S}$. Vyplývá to přímo i z principu superpozice. Na jednu elementární smyčku bude působit moment síly $\Delta\boldsymbol{M}_i = I(\Delta\boldsymbol{S}_i \times \boldsymbol{B})$, na soustavu n těchto smyček ležících v jedné rovině bude působit výsledný moment síly

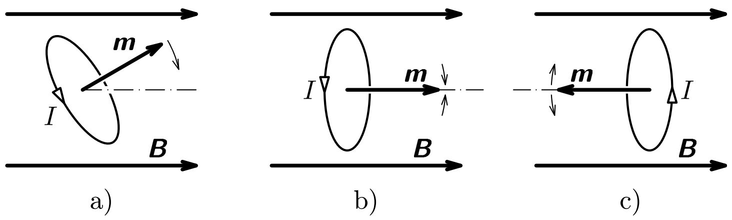


Obr. 18

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} I(\Delta\boldsymbol{S}_i \times \boldsymbol{B}) = I(\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{S}_i \times \boldsymbol{B}) = I(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B}).$$

Výsledky (37), (38) tedy platí pro libovolnou rovinnou smyčku.

Ze vztahu (37) vidíme, že silové účinky daného magnetického pole $\boldsymbol{B}$ na proudovou smyčku jsou určeny velikostí a směrem magnetického momentu $\boldsymbol{m}$. Moment síly $\boldsymbol{M}$ bude největší pro $\alpha = \pi/2$ a nejmenší (nulový) pro $\alpha = 0$. Magnetické pole tedy působí na proudovou smyčku tak, že její rovinu natáčí do směru kolmého ke směru magnetického pole (obr. 19a,b). Moment síly bude nulový i pro $\alpha = \pi$. V tomto případě však jde o labilní polohu smyčky (obr. 19c), která se i při nepatrném vychýlení přestaví do stabilní polohy (obr. 19b).



Obr. 19

Příklad 7 – potenciální energie proudové smyčky

Vypočtěte potenciální energii proudové smyčky v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$. Smyčka je rovinná o plošném obsahu S a prochází jí proud I. Za nulovou hladinu energie volte polohu smyčky, v níž má její magnetický moment stejný směr jako $\boldsymbol{B}$. Energii vypočtěte pro obecnou polohu smyčky popsanou úhlem α, který svírají vektory $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{B}$. Určete její maximální hodnotu.

Řešení

Bude-li plocha $\boldsymbol{S}$ smyčky odchýlena od směru $\boldsymbol{B}$ o úhel α, bude na ni působit moment síly (37). Zvětšíme-li tento úhel o $\mathrm{d}\alpha$, musíme vykonat práci $\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\alpha$, která se projeví přírůstkem potenciální energie $\mathrm{d}E_\mathrm{p}$. Změně úhlu od 0 do α tedy odpovídá vzrůst potenciální energie na hodnotu

$$E_\mathrm{p} = \int_0^\alpha M\mathrm{d}\alpha = ISB\int_0^\alpha \sin\alpha\mathrm{d}\alpha = ISB(1-\cos\alpha). \tag{39}$$

Energie bude maximální pro $\alpha = \pi$, pak $E_\mathrm{pmax} = 2ISB$.

2.6 Lorentzova síla

Původní Maxwellova teorie elektromagnetismu byla kontinuální (spojitá), v případě magnetismu šlo o účinek spojitých elektrických proudů. Když byl objeven v r. 1891 nositel elementárního náboje – **elektron**, vystoupila do popředí částicová struktura látky. I proud byl chápán jako tok (velkého množství) jednotlivých nabitých částic. Přepracování Maxwellovy makroskopické elektromagnetické teorie na mikroskopickou elektronovou teorii se r. 1892 ujal holandský fyzik H. A. Lorentz (1853–1928).

Sílu, kterou působí magnetické pole na částici, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$, dostaneme úpravou výrazu (32) do kterého dosadíme $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$. Pak

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}\mathrm{d}t \times \boldsymbol{B} = \mathrm{d}q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

Nahradíme-li element náboje $\mathrm{d}q$ nábojem q dostaneme magnetickou složku Lorentzovy síly, označovanou jako **magnetická síla**

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{m} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{40}$$

Bude-li se částice o náboji q pohybovat rychlostí $\boldsymbol{v}$ v elektromagnetickém poli o elektrické intenzitě $\boldsymbol{E}$ a magnetické indukci $\boldsymbol{B}$, bude na ni působit **Lorentzova síla**

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}).} \tag{41}$$

Lorentzova síla má četné aplikace, např. pro urychlovače nabitých částic, řízení jejich pohybu a filtrování rychlostí, řízení elektronového paprsku v obrazovkách, v Hallově jevu a jeho aplikacích pro měření magnetických polí a výzkumu polovodičů, jak ukážeme v dalším textu a na některých úlohách.

Příklad 8 – proton v magnetickém poli

Proton o náboji $+e$ a hmotnosti m_p vlétne do homogenního magnetického pole, jehož indukce $\boldsymbol{B}$ má směr osy x. Počáteční rychlost $\boldsymbol{v}$ protonu leží v rovině $(x,\ z)$ a svírá s osou z úhel β.

a) Uvažte po jaké trajektorii se proton bude pohybovat.

b) Určete parametry trajektorie protonu.

Řešení

a) Trajektorií bude šroubovice, přičemž její poloměr bude určen složkou rychlosti ($\boldsymbol{v}_\perp$) kolmou k $\boldsymbol{B}$ a její stoupání složkou rychlosti ($\boldsymbol{v}_\parallel$) rovnoběžnou s $\boldsymbol{B}$ (obr. 20).

b) Na proton působí magnetická síla (40) o velikosti

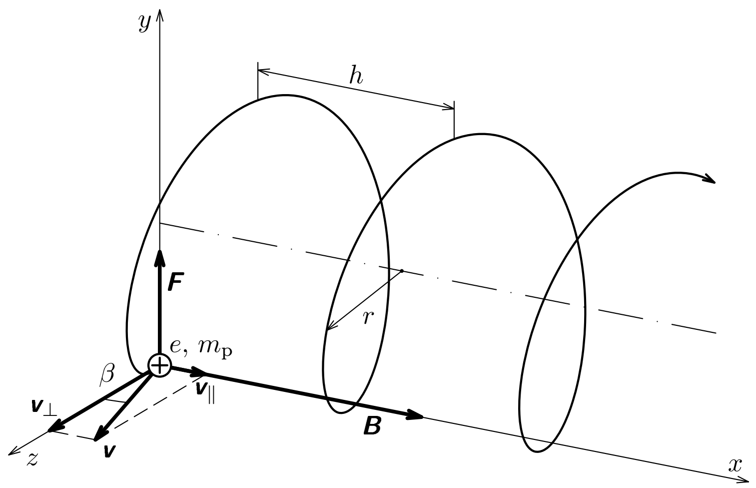
$$F = ev_\perp B = evB\cos\beta,$$

která je kolmá k okamžitému směru rychlosti $\boldsymbol{v}_\perp$ (v počáteční poloze, kdy rychlost $\boldsymbol{v}_\perp$ má směr osy z, má síla $\boldsymbol{F}$ směr osy y). Protože síla $\boldsymbol{F}$ má směr stále kolmý k $\boldsymbol{v}_\perp$ a konstantní velikost, bude udělovat protonu konstantní dostředivé zrychlení $a_\mathrm{n} = v_\perp^2/r$, pro něž platí $a_\mathrm{n} = F/m_\mathrm{p}$. Tedy

$$\frac{(v\cos\beta)^2}{r} = \frac{evB\cos\beta}{m_\mathrm{p}},$$

neboli poloměr šroubovice (tj. poloměr pomyslného válce, na němž je „navinutá“) je

$$r = \frac{m_\mathrm{p} v \cos\beta}{eB}.$$



Obr. 20

Doba, za kterou proton proběhne jeden závit šroubovice, je

$$T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi m_\mathrm{p}}{eB}.$$

Stoupání šroubovice tedy je $h = v_\parallel T = \dfrac{2\pi m_\mathrm{p} v}{eB} \sin\beta.$
Mezi vypočtenými parametry r, h šroubovice platí vztah

$$\frac{h}{r} = 2\pi \operatorname{tg}\beta.$$

Poměr tedy nezávisí ani na charakteristikách částice, ani pole a je dán pouze směrem vstupu částice do pole v souladu s geometrií šroubovice.

Příklad 9 – cyklotron

K urychlování nabitých částic, zejména protonů, deuteronů a helionů (částic α) mladý americký fyzik E. O. Lawrence (1901–1958) r. 1930 navrhl a r. 1932 realizoval první kruhový urychlovač – **cyklotron**. Jeho schéma je na obr. 21. Mezi póly silného elektromagnetu, který vytváří homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$, se ve vakuové komoře nacházejí dvě půlválcové urychlovací elektrody, tzv. duanty, připojené ke zdroji vysokofrekvenčního střídavého napětí o amplitudě U_m a frekvenci f. Částice vznikající úplnou ionizací molekul plynu (vodíku, deuteria nebo helia) přiváděného do zdroje iontů, který je umístěn uprostřed vakuové komory, mají klidovou hmotnost m_0 a náboj Ze. Uvnitř duantů se pohybují po kruhové trajektorii a při každém průchodu mezerou mezi duanty jsou urychleny elektrickým polem. Výsledný pohyb probíhá po spirále až do průchodu výstupním otvorem v jednom z duantů, za kterým částice dopadají na vhodný terčík. Cyklotrony se dodnes využívají pro náročné fyzikální experimenty a pro přípravu důležitých radionuklidů.

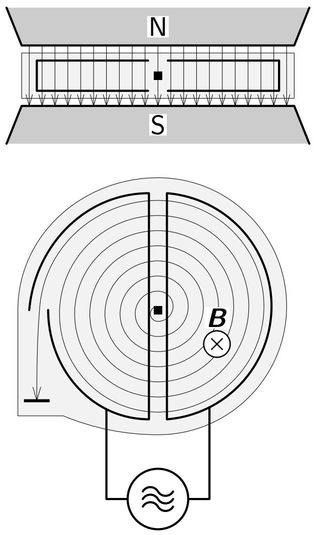
Vaším úkolem je dopočítat základní parametry cyklotronu, který má sloužit k urychlení deuteronů ($m_0 = 3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg, $Z = 1$) na kinetickou energii $E_\mathrm{k} = 15{,}0$ MeV. Magnetická indukce v komoře má velikost $B = 1{,}40\ T$. Vysokofrekvenční napětí duantů má amplitudu $U_\mathrm{m} = 160$ kV.

a) Porovnejte klidovou a kinetickou energii deuteronů a ověřte, že v prvním přiblížení můžeme jejich hmotnost považovat za konstantní (rovnou m_0). Za tohoto předpokladu řešte nerelativisticky úkoly b) až d).

b) Princip cyklotronu vychází z poznatku, že frekvence, se kterou částice stálé hmotnosti obíhá po kruhové trajektorii kolmo k indukčním čarám v homogenním magnetickém poli, nezávisí na poloměru trajektorie. Stejnou frekvenci musí mít napětí přivedené na duanty. Určete její hodnotu pro náš cyklotron.

c) Urychlení proběhne optimálním způsobem, když při každém průchodu částice mezerou mezi duanty je na nich právě napětí U_m. Kolik oběhů v takovém případě částice vykoná, než vyletí výstupním okénkem? Jaký tvar má trajektorie deuteronu? (popište strukturu spirály)

d) Jakou rychlost deuterony získají a jaký bude poloměr poslední kruhové trajektorie?



Obr. 21

e) Relativistické zvětšení hmotnosti částice během urychlení omezuje použití cyklotronu do energie řádově desítek MeV. Určete relativisticky, s přihlédnutím ke zvětšení hmotnosti částice, rychlost vyletujících deuteronů, poloměr poslední kružnice a příslušnou frekvenci obíhání. Výsledky porovnejte s hodnotami získanými v b) a d).

Řešení

a) Urychlením získal deuteron kinetickou energii $E_\mathrm{k} = 15\ \mathrm{MeV} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$. Klidová energie deuteronu je $E_0 = m_0c^2 = 3{,}0 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J} = 1880\ \mathrm{MeV} \doteq 125E_\mathrm{k}$. Hmotnost urychleného deuteronu je $m = m_0 + E_\mathrm{k}/c^2 \doteq 1{,}008m_0$. Během urychlení se zvětší o 0,8 %, což můžeme při přibližném výpočtu zanedbat.

b) Zakřivení trajektorie je způsobeno dostředivou magnetickou silou. Pro částici o náboji e a hmotnosti m_0 platí:

$$Bev = \frac{m_0v^2}{r}, \qquad \omega = \frac{v}{r} = 2\pi f_0 = \frac{Be}{m_0}, \qquad f_0 = \frac{Be}{2\pi m_0} = 1{,}07 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}.$$

c) Během jednoho oběhu je deuteron urychlen dvakrát. V optimálním případě je počet oběhů

$$N = \frac{E_\mathrm{k}}{2U_\mathrm{m}e} = \frac{15\ \mathrm{MeV}}{0{,}32\ \mathrm{MeV}} \doteq 47.$$

V prostoru duantu je trajektorií půlkružnice, po níž se deuteron pohybuje stálou rychlostí, na kterou mezi duanty navazuje krátká trajektorie blízká úsečce (na ní se zvětší rychlost deuteronu) a poté další půlkružnice o větším poloměru. Proces se cyklicky opakuje až k poslední půlkružnici o poloměru r_0, na níž má deuteron rychlost v_0. Částice (deuteron) se tedy pohybuje po spirále, která však není Archimedovou spirálou.

d) Podle představ klasické fyziky:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m_0}} = 3{,}79 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \qquad r_0 = \frac{v_0}{2\pi f_0} = \frac{m_0v_0}{Be} = \frac{\sqrt{2E_\mathrm{k}m_0}}{Be} = 0{,}565\ \mathrm{m}.$$

e) Relativistickým výpočtem dostaneme pro konečnou rychlost deuteronu, poloměr poslední kružnice a konečnou frekvenci obíhání:

$$v_0' = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \dfrac{E_\mathrm{k}}{m_0c^2}}\right)^2} = 3{,}77 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

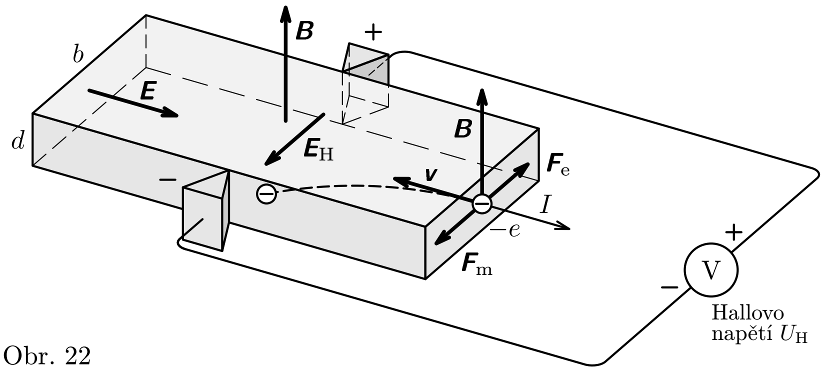
$$r_0' = \frac{mv_0'}{Be} = 0{,}566\ \mathrm{m}\,,$$

$$f = \frac{Be}{2\pi m} = \frac{Be}{2\pi m_0}\frac{m_0}{m} = f_0\frac{m_0}{m} = \frac{f_0}{1 + \dfrac{E_\mathrm{k}}{m_0c^2}} = 0{,}992f_0 = 1{,}06 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}.$$

Hodnoty získané relativistickým výpočtem se téměř neliší od výsledků získaných v b) a d). Nejzávažnější je postupný pokles frekvence obíhání až o 0,8 %. Optimální průběh urychlení předpokládaný v úloze c) se proto nedá realizovat a skutečný počet oběhů bude větší než vypočítaných 47.

2.7 Hallův jev

Jako jednu z četných aplikací na použití Lorentzovy síly provedeme výklad Hallova jevu, který experimentálně objevil r. 1879 mladý americký fyzik E. H. Hall (1855–1938). Vodivý pásek tloušťky d a šířky b opatřil na bočních okrajích kontakty, nechal jím procházet proud I a vložil jej do příčného magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$ (obr. 22).



Obr. 22

Pro napětí na kontaktech, označované jako **Hallovo napětí**, zjistil, že je přímo úměrné proudu I a velikosti magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ a nepřímo úměrné tloušťce d pásku:

$$\boxed{U_{\mathrm{H}} = R_{\mathrm{H}} \frac{IB}{d},} \tag{42}$$

kde Hallova konstanta R_{H} závisí na materiálu pásku.

Výraz (42) pro Hallovo napětí odvodíme z mikroskopického pohledu na elektrický proud. Vložené elektrické pole $\boldsymbol{E}$ (obr. 22) působí na volné nositele náboje (elektrony o náboji $-e$) a uvádí je do usměrněného pohybu driftovou rychlostí $\boldsymbol{v}$ podle vztahu (4). V magnetickém poli působí na elektrony magnetická síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} = (-e)\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ o velikosti $F_{\mathrm{m}} = e\overline{v}B$, která je odchyluje k jednomu okraji pásku. Tam hustota elektronů vzrůstá, kdežto na protilehlém okraji se zmenšuje. Tím vzniká příčné elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}$, které působí na elektrony silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} = -e\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}$ opačného směru než má magnetická síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$. Tím se účinek magnetického pole na elektrony postupně zeslabuje a zcela vymizí, když $\boldsymbol{F}_\mathrm{m} + \boldsymbol{F}_\mathrm{e} = \boldsymbol{0}$, tedy když platí rovnost $e\overline{v}B = eE_\mathrm{H}$, kde velikost intenzity E_H můžeme vyjádřit pomocí napětí: $E_\mathrm{H} = U_\mathrm{H}/b$. Tak pro Hallovo napětí dostaneme

$$U_\mathrm{H} = b\overline{v}B = b\frac{I}{-en_0S}B = -\frac{1}{en_0}\frac{IB}{d}, \tag{43}$$

když jsme za driftovou rychlost dosadili z výrazu (4) a uvážili, že $S = bd$.

Porovnáme-li výsledky (42), (43) vidíme shodu, přičemž pro Hallovu konstantu vychází

$$R_\mathrm{H} = -\frac{1}{en_0}. \tag{44}$$

Výsledek (43) byl odvozen pro elektrony jako volné nositele náboje a experimenty potvrzují, že platí pro kovy. Obecněji lze vztah pro Hallovu konstantu psát

$$R_\mathrm{H} = \frac{A}{qn_0}, \qquad [R_\mathrm{H}] = \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{C}^{-1} = \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}, \tag{45}$$

kde q je náboj jejich volných nositelů (je kladný nebo záporný, u elektronů je $q = -e$). Číselný koeficient A leží mezi 1 a 2. Pro kovy a iontové krystaly za nízkých teplot je $A = 1{,}00$, pro iontové krystaly při vysokých teplotách je $A = 1{,}10$. Pro vodivé valenční krystaly při malé koncentraci cizích iontů je $A = 1{,}18$, při vysoké koncentraci těchto iontů je $A = 1{,}93$.

Rozhodující vliv na velikost Hallovy konstanty má veličina n_0, tedy počet volných nositelů náboje v jednotkovém objemu. U vodičů je tento počet značný (viz příklad 1), u polovodičů je výrazně menší. Hallova konstanta pro jednomocnou měď (výpočtem užitím výsledků příkladu 1) je $R_\mathrm{H} = -7{,}4 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{C}^{-1}$. Kdežto např. pro vizmut je $R_\mathrm{H} = -1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{C}^{-1}$, tj. hodnota $1{,}4 \cdot 10^4$krát větší. Je to dáno tím, že u polovodičů (s malou hustotou nositelů volného náboje) se dosahuje těchže proudů jako u vodičů podstatně většími driftovými rychlostmi a vznikají tam tudíž větší magnetické síly.

Hallův jev má velký význam pro výzkum polovodičů; měřením Hallovy konstanty lze studovat mechanismus jejich vodivosti, Hallových sond se využívá rovněž pro měření magnetických polí. Hallovo napětí (42) je přímo úměrné velikosti magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Výsledek (42) byl odvozen za předpokladu, že $\boldsymbol{B}$ je kolmá k rovině pásku Hallovy sondy (obr. 22). Můžeme tedy také stanovit směr $\boldsymbol{B}$ tak, že v určitém místě pole natáčíme sondu tak, aby napětí na příčných kontaktech dosáhlo maxima, tj. hodnoty U_H. Pak $\boldsymbol{B}$ je právě kolmé k rovině pásku.

Hallovy sondy se rovněž užívá jako bezkontaktního ampérmetru, násobícího obvodu, měniče a zesilovače stejnosměrných proudů – podrobnosti lze nají např. v Horákově Fyzice [4].

3 Magnetické pole jako relativistický jev

3.1 Invariantnost náboje a Coulombův zákon

Na rozdíl od hmotnosti je velikost elektrického náboje nezávislá na rychlosti materiálního objektu v pozorovací soustavě. Říkáme, že **náboj je při Lorentzově transformaci invariantní** (viz Dodatek 1a).

Kdyby velikost náboje závisela na rychlosti např. stejně jako hmotnost, byl by měrný náboj e/m nezávislý na rychlosti, což odporuje experimentům. Dále by atomy a molekuly nebyly elektricky neutrální. Elektrony a protony mají až na znaménko stejné náboje. V modelové představě atomu se však elektrony, které tvoří jeho obal, pohybují značně rychleji než protony, které jsou základem jádra. To svědčí o nezávislosti náboje na rychlosti jeho nositele.

Tato skutečnost byla potvrzena s vysokou přesností různými experimenty. Tak např. J. G. King (1960) provedl experiment, který dokázal rovnost absolutní velikosti náboje protonu a elektronu v molekule vodíku s relativní přesností 10^{-20}.

Coulombův zákon byl formulován pro interakci částic v klidu. Protože však náboj nezávisí na rychlosti, je lhostejné, zda se bude testovací částice o náboji q pohybovat či ne. To vede k důležitému rozšíření platnosti **Coulombova zákona**:

Bodový elektrický náboj Q vzbuzuje ve vakuu ve své klidové inerciální soustavě elektrostatické pole, které působí na bodový náboj q silou

$$\boxed{\boldsymbol{F}_e = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^\circ} \tag{46}$$

nezávislou na rychlosti $u < c$ náboje q a na přítomnosti dalších nábojů. V tomto vztahu je r vzdálenost mezi náboji a $\boldsymbol{r}^\circ$ je jednotkový vektor vedený od náboje Q k náboji q.

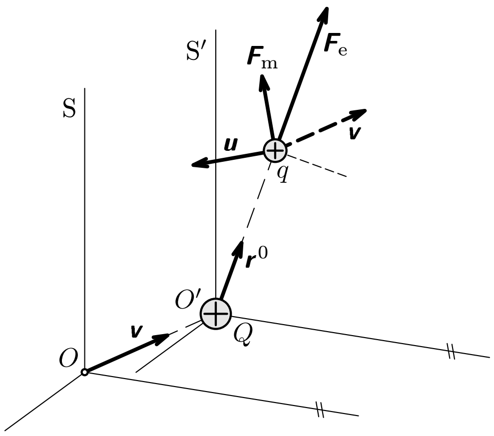
Takto rozšířená platnost Coulombova zákona byla nepřímo ověřena spolehlivou funkcí obřích urychlovačů nabitých částic, v nichž částice dosahují prakticky až mezní rychlosti c.

3.2 Relativistická transformace Coulombovy síly

Nyní provedeme jednoduchou relativistickou transformaci Coulombovy síly, která je obecně popsána v Dodatku 1 a je omezena předpokladem pro rychlost pohybu zdrojové částice: $v \ll c$. Tento předpoklad je velice dobře splněn pro případy, kdy zdrojem magnetického pole je elektrický proud ve vodičích i v polovodičích. Např. v příkladě 1 jsme vypočetli, že driftová rychlost elektronů při běžných poměrech v měděném vodiči je přibližně 10^{12}krát menší než rychlost světla ve vakuu. Můžeme tedy s velkou přesností použít v dodatku odvozený vztah (71).

Zdrojovou částici o náboji Q umístíme do počátku inerciální vztažné soustavy S′ (obr. 23). Ve své klidové soustavě S′ bude vytvářet elektrostatické pole, které bude působit na každou jinou částici q silou (46):

$$\boldsymbol{F}' = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\boldsymbol{r}'^0 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{F}_e. \tag{47}$$



Obr.23

Zde jsme položili $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$, tj. vzdálenost mezi částicemi neuvažujeme závislou na pohybu soustavy (zanedbáváme relativistické efekty s členy v/c ve druhé a vyšší mocnině, a tím i efekt kontrakce délek). Pro pozorovatele, který přejde z klidové soustavy náboje Q (tj. S′) do inerciální soustavy S, v níž se soustava S′ a s ní i náboj Q pohybuje stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, se změní působení mezi náboji. Je nutné provést transformaci síly podle (71). V soustavě S se bude náboj Q pohybovat rychlostí $\boldsymbol{v}$ a náboj q rychlostí $\boldsymbol{u}$. V soustavě S pak naměří pozorovatel mezi částicemi sílu

$$\boldsymbol{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\boldsymbol{r}^\circ + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^\circ)\right] = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m. \tag{48}$$

V soustavě S tedy přistupuje k elektrostatické síle $\boldsymbol{F}_e$ ještě síla $\boldsymbol{F}_m$, kterou můžeme napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{u} \times \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^\circ). \tag{49}$$

Tato síla závisí na rychlosti obou částic v pozorovací soustavě S (tj. projevuje se jen u nábojů v pohybu). Má obecně jiný směr než síla elektrostatická.

Nemá povahu obvyklých elektrických sil, které působí i na náboje v klidu. Je vlastní podstatou magnetických jevů (jak uvidíme dále). Proto se nazývá **silou magnetickou**.

Výraz (49) se může psát ve tvaru

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}, \tag{50}$$

kde jsme zavedli novou veličinu

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^\circ) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^\circ),} \tag{51}$$

přičemž formálně označená nová konstanta

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \tag{52}$$

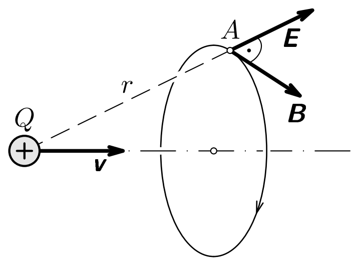
je **permeabilita vakua**. Vztah (52) je shodný se vztahem (18), ke kterému se ovšem dopracoval Weber až na základě náročných experimentů. Veličina $\boldsymbol{B}$ popisuje vektorové pole, které je zcela určeno pohybem zdrojové částice Q. Pole se nazývá **pole magnetické** (název má historický původ). Vektor $\boldsymbol{B}$ je veličina známá z elektromagnetismu: **magnetická indukce**.

Z výrazu (51) je rovněž zřejmý vztah mezi magnetickým a elektrickým polem:

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}).} \tag{53}$$

Odtud plyne, že magnetické pole pohybujícího se náboje vzniká a existuje současně s elektrickým polem. Vektor $\boldsymbol{B}$ je v každém bodě pole kolmý k vektorům $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ (obr. 24).

Protože součin v kulaté závorce výrazu (53) je vynásoben převrácenou hodnotou druhé mocniny rychlosti světla ve vakuu, přispívá magnetické pole k silovému působení na elektrický náboj mnohem méně než pole elektrické. Vzhledem k elektrickému poli **je magnetické pole relativistickým efektem druhého řádu**. Proto se magnetické pole může výrazně silově projevit jen v případech, kdy je elektrické pole soustavy částic významně zeslabeno nebo zcela vzájemně kompenzováno, jak je tomu u vodičů, kterými prochází elektrický proud.



Obr. 24

Zavedeme-li intenzitu $\boldsymbol{E}$ elektrického pole a magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ podle výrazu (51), můžeme výsledek (48) přepsat do tvaru

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \equiv \boldsymbol{F}_{\mathrm{L}},} \tag{54}$$

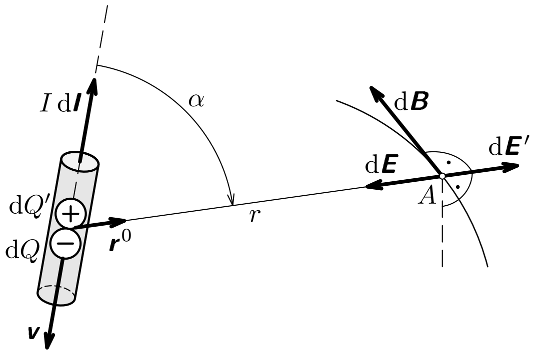
což je **Lorentzova síla**, známá z klasické elektrodynamiky – viz výraz (41), ve kterém je ovšem z čistě formálních důvodů označena rychlost částice $\boldsymbol{v}$.

3.3 Klasické zákony elektrodynamiky z hlediska teorie relativity

a) Zákon Biotův-Savartův-Laplaceův

Na základě výsledků minulého článku vyšetřme elektromagnetické pole makroskopického elektrického proudu ve vodiči, a to vně vodiče. Vodič představuje soustavu nabitých částic. Jsou to jednak volně pohyblivé částice (např. ionty, které jsou u kovů vázány v krystalické mříži). Celkový náboj této soustavy částic je nulový, takže vodič je v normálním stavu elekticky neutrální. Připojíme-li vodič k vnějšímu zdroji elektrického pole, začne statisticky neuspořádaný pohyb volných nositelů náboje překrývat jejich usměrněný driftový pohyb ve směru vnějšího pole – vzniká **makroskopický proud**.

Uvažujme element vodiče $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ (obr. 25), na němž je **volný náboj** $\mathrm{d}Q$. Označíme-li u kovového vodiče n_0 počet volných elektronů (každý o náboji $-e$) v jednotkovém objemu a S obsah příčného průřezu vodiče, bude $\mathrm{d}Q = -en_0S\mathrm{d}l$. Náboj stejné velikosti, avšak opačného znaménka, tedy $\mathrm{d}Q' = -\mathrm{d}Q$, mají ionty v krystalické mříži.



Obr. 25

Bude-li procházet vodičem proud I, projde průřezem jeho délkového elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ za dobu $\mathrm{d}t$ náboj

$$\mathrm{d}Q = I\mathrm{d}t \tag{55}$$

driftovou rychlostí

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}. \tag{56}$$

Vyšetřme nyní elektrickou a magnetickou složku elektromagnetického pole elementu vodiče v pozorovací soustavě pevně spojené s vodičem. Protože $\mathrm{d}Q' = -\mathrm{d}Q$, bude mít výsledné elektrické pole v bodě A výslednou intenzitu: $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_v = \mathrm{d}\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{0}$.

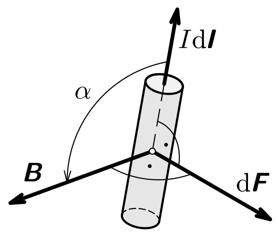
Magnetické pole může podle (51) způsobit pouze náboj, jehož usměrněná rychlost $\boldsymbol{v}$ je v pozorovací soustavě nenulová. Je zřejmé, že tuto vlastnost má pouze volný náboj $\mathrm{d}Q$, jehož driftová rychlost vzhledem k vodiči je právě $\boldsymbol{v}$. Magnetické pole v bodě A bude mít tedy indukci $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$, kterou vypočteme ze vztahu (51), nahradíme-li zde veličiny $\boldsymbol{B}$, Q jejich diferenciálními hodnotami $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$, $\mathrm{d}Q$ a uvážíme-li výrazy (55) a (56). Pak

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \mathrm{d}Q}{4\pi r^2}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^\circ) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^\circ).} \tag{57}$$

Toto je klasický **Biotův-Savartův-Laplaceův zákon**, který jsme uvedli v čl. 2.1 jako důsledek zobecnění výsledků experimentů. Zde jsme k tomuto výrazu dospěli z relativistické transformace Coulombovy síly. Můžeme proto o magnetismu hovořit jako o nejlépe a nejdéle známém relativistickém jevu (i když to bylo poznání z toho hlediska nevědomé).

b) Ampérův zákon

Ukážeme nyní, že i další základní zákon klasické elektrodynamiky – Ampérův zákon – plyne přímo z relativistické transformace Coulombovy síly. Vyšetříme tedy působení magnetického pole indukce $\boldsymbol{B}$ (o jeho zdroji nic nepředpokládáme) na proudový element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ (obr. 26). Podle výrazu (50) bude magnetické pole působit jen na náboj, jehož driftová rychlost v pozorovací soustavě je nenulová ($\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$). Tuto vlastnost má v případě naší soustavy nábojů jen volný náboj



Obr. 26

$$\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t, \tag{58}$$

který se v elementu vodiče pohybuje driftovou rychlostí

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}. \tag{59}$$

Po dosazení výrazů (58) a (59) do výrazu (50) přepsaného pro diferenciální hodnoty $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m$, $\mathrm{d}q$ dostáváme

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m = \mathrm{d}q\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}.} \tag{60}$$

To je diferenciální tvar **Ampérova zákona**, ke kterému dospěl A. M. Ampère r. 1826 „výlučně z pokusů" (viz čl. 2.3).

Užitím dvou základních zákonů elektrodynamiky (57) a (60) a Coulombova zákona lze vybudovat celou nauku o elektřině a magnetismu a po některých zobecněních dospět až k soustavě **Maxwellových rovnic elektromagnetického pole** (podrobný výklad je např. v [4] a [9]).

4 Úlohy

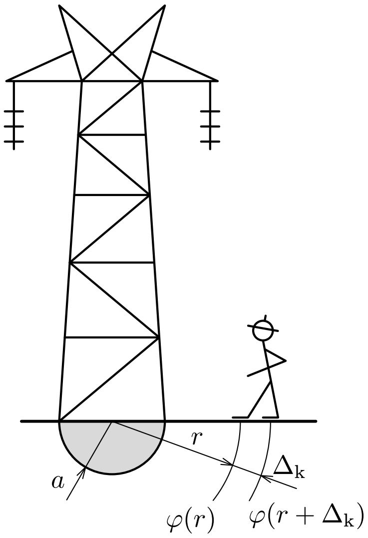
1. Odpor vzorku polovodiče

Uvažujme vzorek polovodiče o vodivosti γ, který má tvar dutéhoválečku délky l. Jednu elektrodu vzorku tvoří vnitřní povrch dutiny o poloměru r_1 a druhou elektrodu plášť válečku o poloměru r_2. Vypočtěte jeho odpor.

2. Zkrat na stožáru VN

Předpokládejte, že stožár vysokého napětí je uzemněn prostřednictvím základu, který pro jednoduchost budeme považovat za půlkulovou zemnicí elektrodu o poloměru $a = 800$ mm (obr. 27). Měrná vodivost zeminy je $\gamma = 0{,}012\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ a proud při zkratu $I = 100$ A.

a) Stanovte funkci $\varphi = \varphi(r)$, přičemž volte $\varphi(\infty) = 0$.
b) Vypočtěte zemnicí odpor R_z stožáru a ztrátový výkon P_z při zkratu.
c) Stanovte funkci $U_\mathrm{k} = U_\mathrm{k}(r)$ pro tzv. **krokové napětí**, tj. napětí, které přísluší délce kroku $\Delta_\mathrm{k} = 0{,}80$ m při chůzi ke stožáru ve zkratu. Vypočtěte jeho velikost pro $r = 10$ m a 1,0 m.



Obr. 27

3. Maxwellův proud, vybíjení kondenzátoru

J. C. Maxwell dostal plnohodnotnou soustavu diferenciálních rovnic elektromagnetického pole, až do první z nich zavedl hustotu posuvného proudu, který se dnes označuje jako proud Maxwellův. Tento proud Maxwell zavedl na základě hypotézy, že všechny elektrické proudy jsou uzavřené, tedy, že vodivý (kondukční) proud ve vodiči pokračuje i v dielektriku nebo ve vakuu jako proud posuvný (Maxwellův).

a) Vypočtěte Maxwellův proud a jeho hustotu na jednoduchém příkladě deskového kondenzátoru o kapacitě C, nabitého na napětí U_0, jehož desky poté propojíme drátem o ohmickém odporu R. Každá z desek kondenzátoru má plošný obsah S, jejich vzájemná vzdálenost je d_0 a permitivita prostředí ϵ.
b) Odvoďte vztah, podle kterého se bude měnit napětí na deskách kondenzátoru a vodivý proud při vybíjení kondenzátoru.

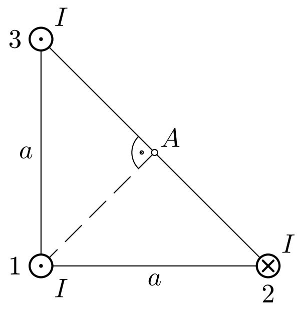
4. Magnetické pole dvou kruhových proudů

Jsou dány dva kruhové závity se společnou osou a ležící v rovnoběžných rovinách ve vzájemné vzdálenosti $2a$. Závity mají stejný poloměr R a prochází jimi proud I a) ve stejném směru, b) v opačném směru. Vypočtěte intenzitu magnetického pole $\boldsymbol{H}_0$ ve středu každého závitu a $\boldsymbol{H}_S$ ve středu spojnice středů závitů.

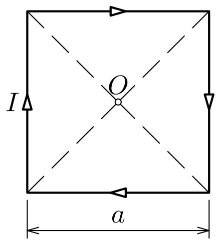
5. Magnetické pole soustavy tří přímkových proudů

Tři velmi dlouhé přímkové tenké paralelní vodiče procházejí vrcholy rovnoramenného trojúhelníku podle obr. 28. Vodiči procházejí stejné proudy v naznačených směrech. Vypočtěte:

a) Magnetickou indukci soustavy v bodě A.
b) Sílu (určenou velikostí i směrem), kterou soustava vodičů 2, 3 působí na délku l vodiče 1.



Obr. 28



Obr. 29

6. Magnetické pole rámové cívky

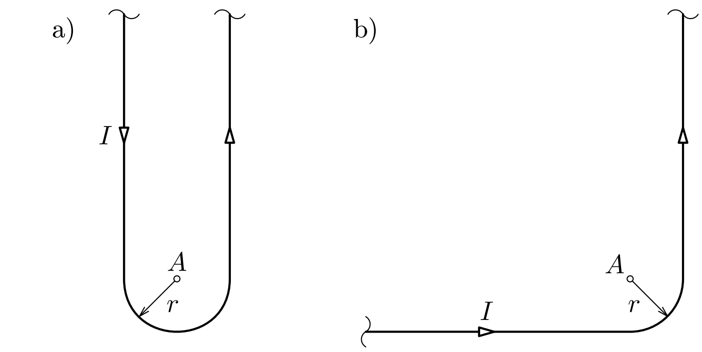
Vypočtěte intenzitu magnetického pole a jeho indukci, které vytvoří ve svém středu 0 plochá rámová cívka, jejichž $z = 30$ závitů z tenkého drátu má tvar čtverce o straně $a = 250$ mm, prochází-li jí proud $I = 3{,}00$ A (obr. 29).

7. Magnetické pole v ohybu drátu s proudem

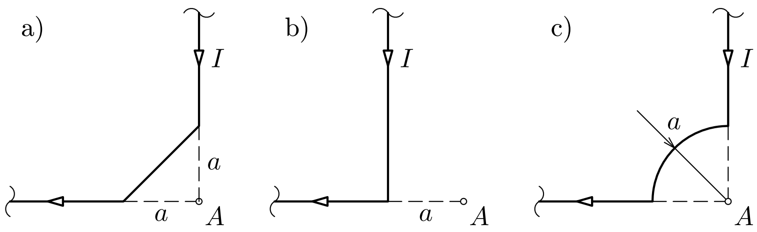
Tenký dlouhý přímý drát je ohnut podle obr. 30 a, b a prochází jím proud I. Určete intenzitu magnetického pole v bodě A.

8. Magnetické hříčky

Dlouhý tenký přímý vodič, kterým prochází proud I, je ohnut do pravého úhlu, přičemž roh v ohybu je upraven podle obr. 31 a, b, c. Vypočtěte intenzitu magnetického pole v bodě A, jehož poloha je určena vzdáleností a.



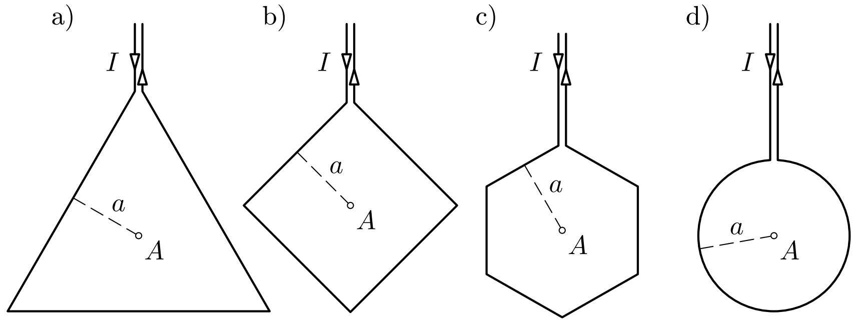
Obr. 30



Obr. 31

9. Proudová smyčka

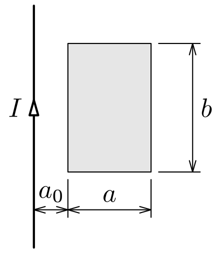
Dlouhý tenký přímý vodič, kterým prochází proud I, je ohnut do smyčky ve tvaru podle obr. 32: a) rovnostranného trojúhelníku, b) čtverce, c) pravidelného šestiúhelníku, d) kružnice. Je dán rozměr a. Vypočtěte intenzity magnetického pole ve středech A smyček a porovnejte je.



Obr. 32

10. Magnetický indukční tok

Vypočtěte magnetický indukční tok plochou obdélníka o stranách $a = 110$ mm, $b = 170$ mm, který je ve vzdálenosti $a_0 = 45{,}0$ mm od tenkého velmi dlouhého přímého vodiče podle obr. 33. Vodičem prochází proud $I = 5{,}00$ A.



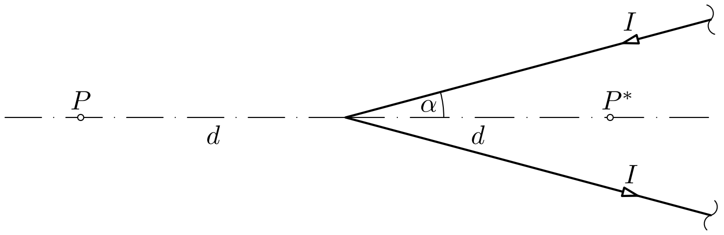
Obr. 33

11. Magnetické pole proudu v drátě ve tvaru V (Podstatná část úlohy na 30. MFO v Itálii v r. 1999)

Uvažujme velmi dlouhý tenký drát, kterým prochází stálý proud I. Vrcholový úhel nechť je 2α (obr. 34). Vypočtěte:

a) Magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ v bodě P, který je na ose úhlu ve vzdálenosti d vně od vrcholu.
b) Magnetickou indukci $\boldsymbol{B}^*$ v symetrickém bodě P* uvnitř soustavy.
c) Velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ v bodě P na základě experimentu s magnetkou, pro niž je znám moment setrvačnosti J a magnetický moment $\boldsymbol{m}$. Doba kmitu, získaná měřením, je T_0. Abychom vyloučili vliv zemského magnetického pole, předpokládejte, že magnetka je astatická (je to soustava dvou magneticky opačně orientovaných magnetek, přičemž zkoumané pole působí jen na jednu z nich – pak J platí pro celou soustavu a $\boldsymbol{m}$ pro jednu z magnetek.)

Předložená úloha je historicky významná, protože ji v počátečním období elektrodynamiky nezávisle řešili Ampère a Biot se Savartem, přičemž jejich výsledky souhlasily jen pro α malé. Ampèrovo řešení bylo přesnější.



Obr. 34

12. Elektromagnetické pole rotujícího nabitého prstence

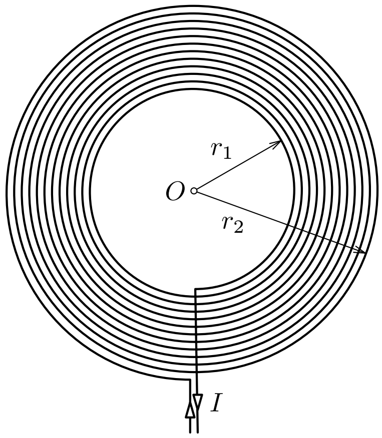
Tenký kruhový prstenec o poloměru R je rovnoměrně nabit nábojem Q a rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω. Vypočtěte intenzitu $\boldsymbol{E}$ elektrického pole a indukci $\boldsymbol{B}$ magnetického pole v bodech osy prstence ve vzdálenosti x od jeho roviny. Určete E/B a proveďte rozměrovou zkoušku.

13. Elektromagnetické pole rotujícího nabitého kruhu

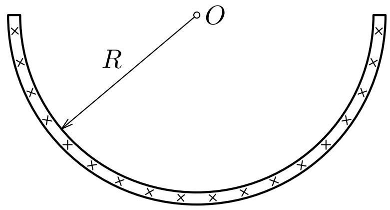
Mějme rovnoměrně nabitý kruh o poloměru R, na němž se nachází náboj Q, který rovnoměrně roztočíme úhlovou rychlostí ω kolem osy procházející středem kruhu a kolmo na něj. V okolí kruhu vznikne elektromagnetické pole. Vypočtěte intenzitu $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ jeho elektrické a magnetické složky v bodě na ose kruhu ve vzdálenosti $x > 0$ od jeho středu. Jaké budou intenzity pro $x \to 0$?

14. Magnetické pole ploché cívky

a) Vypočtěte magnetickou indukci ve středu ploché cívky (vytváří se např. pomocí destičky pro tištěné spoje), která má mezi poloměry r_1, r_2 z závitů Archimédovy spirály (obr. 35).
b) Vypočtěte magnetický moment cívky.



Obr. 35



Obr. 36

15. Magnetické pole proudu ve vodiči tvaru žlabu

Vypočtěte indukci $\boldsymbol{B}$ magnetického pole, které vytváří proud I ve vodiči ve tvaru dlouhého polokruhového tenkého žlabu o poloměru R (obr. 36). Řešte pro bod ležící na ose ve středu žlabu.

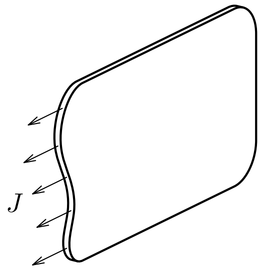
16. Proudová rovina

Vypočtěte intenzitu magnetického pole v okolí proudové roviny (obr. 37), kterou prochází plošný proud o délkové hustotě J; $[J] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

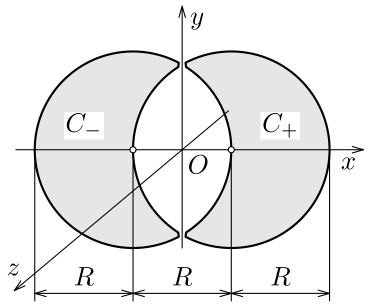
a) Řešte užitím zákona celkového proudu.
b) Proveďte kontrolu přímým odvozením užitím výsledku pro přímkový proud.

17. Magnetické pole tlustého přímého vodiče

Vypočtěte a znázorněte funkční závislost pro intenzitu magnetického pole $H = H(r)$ dlouhého přímého vodiče, jehož poloměr a není zanedbatelný. Proud I, tekoucí vodičem, je rovnoměrně rozložen po příčném průřezu vodiče.



Obr. 37



Obr. 38

18. Magnetické pole koaxiálu a dvojlinky

Využitím výsledků řešení úlohy 17 a principu superpozice nakreslete průběh intenzity magnetického pole soustav, jejichž přímými dlouhými vodiči rovnoměrně prochází proud stejné velikosti a vzájemně opačného směru:

a) koaxiálního kabelu, jako soustavy vnitřního válcového vodiče o poloměru a a soustředného plášťového válcového vodiče o poloměru b zanedbatelné tloušťky,

b) dvojlinky jako soustavy dvou rovnoběžných vodičů o poloměru a s roztečí b, a to pro body osy x, která kolmo protíná osy vodičů.

Rozměry a, b volte vhodné velikosti.

19. Magnetické pole v mezeře mezi vodiči (Jedna část integrované úlohy na 27. MFO v Norsku v r. 1996)

Dvěma přímými velmi dlouhými nemagnetickými vzájemně od sebe izolovanými vodiči C_- a C_+ teče proud I ve směru záporné a kladné osy z. Příčný průřez každého z vodičů je omezen kružnicemi o poloměru R podle obr. 38, přičemž tyto kružnice leží v rovině $(x,\ y)$ a jejich středy jsou od sebe vzdáleny o R. Obsah příčného průřezu každého z vodičů je

$$(2\pi + 3\sqrt{3})\frac{R^2}{6}$$

a proud I je na něm rozložen rovnoměrně. Určete magnetickou indukci $B(x,\ y)$ v prostoru mezi vodiči.

20. Kruhová proudová smyčka v magnetickém poli

Přímým výpočtem ověřte platnost výrazu (37) pro případ kruhové smyčky o poloměru r, kterou prochází proud I. Smyčka se nachází v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, jehož indukční čáry leží v rovině smyčky.

21. Kmity prstence s proudem v magnetickém poli

Je dán tenký kruhový kroužek (prstenec) o hmotnosti m, do něhož je naindukován proud I. Prstenec umístíme do magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$ a vychýlíme o malý úhel α ($\sin\alpha \approx \alpha$) z rovnovážné polohy. Vypočtěte úhlovou frekvenci kmitů prstence.

22. Napínání proudové smyčky v magnetickém poli

Kruhová smyčka o poloměru $r = 300$ mm z měděného drátu, který má příčný průřez o obsahu $S_0 = 1{,}00\ \text{mm}^2$ se nachází v magnetickém poli o indukci $B = 2{,}50$ T. Smyčkou prochází proud $I = 15{,}0$ A.

a) Vypočtěte moment síly, který bude smyčku natáčet v její výchozí poloze, kdy indukční čáry budou ležet v rovině smyčky.

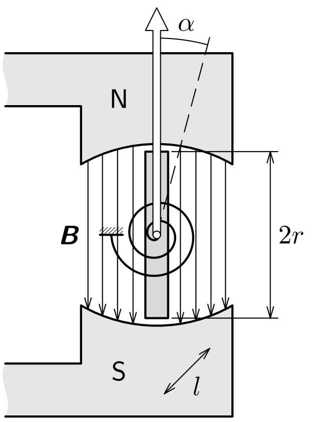
b) Působením momentu síly se smyčka natočí do směru, kdy siločáry budou kolmé k rovině smyčky (její magnetický moment $\boldsymbol{m}$ bude mít stejný směr jako $\boldsymbol{B}$). Vypočtěte: α) sílu $\boldsymbol{N}$, kterou je napínán drát. β) mechanické napětí σ v drátě, jeho protažení Δl a zvětšení Δr poloměru smyčky, je-li modul pružnosti mědi $E_\text{m} = 1{,}10 \cdot 10^{11}$ Pa.

23. Galvanometr

Ručkový měřicí přístroj na stejnosměrný proud (galvanometr) sestává z permanentního magnetu, který vytváří homogenní magnetické pole, které má v místě otočné cívky indukci $\boldsymbol{B}$ (obr. 39). Cívka o stranách $2r$ a l má z závitů, které jsou navinuty na úzkém rámečku. Proud I se přivádí k cívce pomocí zkrutných pružinek, jejichž celková torzní tuhost k_t je známa ($k_\text{t} = M/\alpha$).

a) Vypočtěte moment magnetické síly působící na cívku při průchodu proudu I, je-li její rovina pootočena o úhel α vzhledem k indukčním čarám.

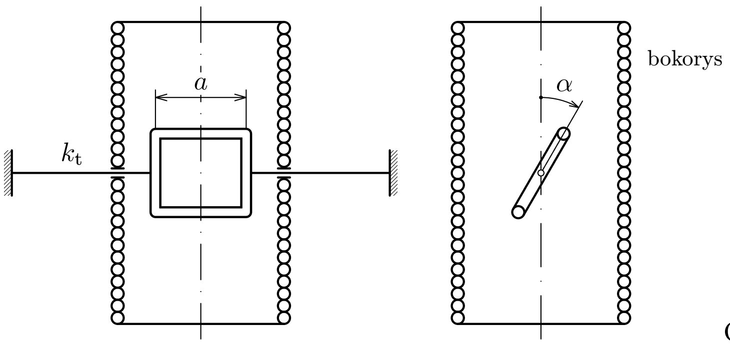
b) Proti momentu magnetické síly působí vratný moment zkrutných pružinek. Odvoďte funkci $I = I(\alpha)$.



Obr. 39

24. Experimentální ampérmetr

V solenoidu, který má na délce $l = 300$ mm $z_1 = 240$ závitů, je vytvořeno homogenní magnetické pole. V tomto poli je umístěna otočná úzká rámová cívka tvaru čtverce o straně $a = 40$ mm s počtem závitů $z_2 = 100$. Je uchycena na torzním vlákně o torzní tuhosti $k_\mathrm{t} = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ N $\cdot$ m/1°. Sestava bude sloužit jako experimentální ampérmetr (obr. 40).



Obr. 40

a) V prvním pokusu bude solenoidem procházet konstantní proud $I_1 = 1{,}0$ A.
α) Odvoďte závislost měřeného proudu I_a tekoucího otočnou cívkou na úhlu α jejího otočení.
β) Jaké proudy I_a musí procházet, aby byla výchylka $\alpha = 0°,\ 10°,\ 20°,\ 30°$?
γ) Vypočtěte citlivost přístroje, tj.: $K_a = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}I_a$. Jaká bude K_a pro úhly uvedené ad β)?

b) Ve druhém pokusu bude solenoid s otočnou cívkou zapojen do serie.
α) Odvoďte závislost měřeného proudu I_b jako funkci α.
β) Jaké proudy I_b musí procházet, aby byla výchylka $\alpha = 0°,\ 10°,\ 20°,\ 30°$?
γ) Vypočtěte citlivost zařízení obecně, tj.: $K_b = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}I_b$, a číselně pro úhly v adβ). Porovnejte $K_a,\ K_b$.

25. Měrný náboj elektronu

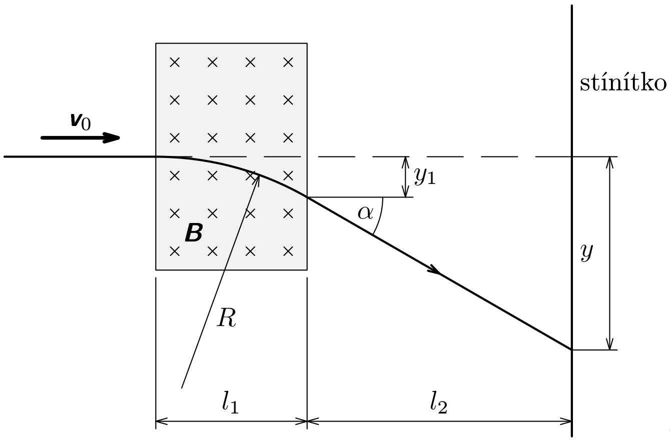
Při experimentu bylo zjištěno, že elektron, který byl urychlen v elektrickém poli v potenciálním rozdílu $U = 500$ V a vlétl do homogenního magnetického pole o indukci $B = 6{,}39 \cdot 10^{-4}$ T kolmo k indukčním čarám opisoval kruhovou trajektorii o poloměru $r = 118$ mm. Určete měrný náboj elektronu, přičemž předpokládejte, že hmotnost elektronu po urychlení se zvětší zanedbatelně.

26. Filtr rychlostí částic

V přímočarém svazku částic o měrném náboji q/m se vyskytují částice, které mají rozdílné ustálené rychlosti. Navrhněte filtr rychlostí částic na magnetickém principu, který ze svazku částic vyfiltruje částice požadované rychlosti v_0.

27. Obrazovka s magnetickým vychylováním

Odvoďte závislost příčné výchylky y elektronů na obrazovce na magnetické indukci $\boldsymbol{B}$ vychylovacího pole (obr. 41). Je dáno: urychlovací napětí U, m_e, e, l_1, l_2. Pro jednoduchost předpokládejte $y_1 \ll R$ a malý úhel α ($\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$).



Obr.41

28. Elektrony v elektromagnetickém poli

a) Určete rychlost elektronů v lineárním svazku, jestliže jejich trajektorie zůstane lineární i po průchodu elektromagnetickým polem o intenzitě $E = 5{,}60 \cdot 10^5\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$ a magnetické indukci $B = 1{,}24 \cdot 10^{-2}$ T, přičemž vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou k sobě vzájemně kolmé a jsou kolmé k rychlosti $\boldsymbol{v}$ elektronů.

b) Vysvětlete, co nastane, budou-li ve svazku elektrony i jiných rychlostí, než jsou rychlosti vypočtené v bodě a). Jak se dá jevu využít?

c) Vypočtěte poloměr trajektorie elektronů pro situaci, kdy $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$.

29. Hallova sonda pro měření magnetických polí

Máme navrhnout Hallovu sondu pro měření magnetických polí. K tomu máme k dispozici:

– polovodičovou destičku ve tvaru kvádru (obr. 42), kde $d = 0{,}50$ mm, $b = 10$ mm, o Hallově konstantě $R_{\mathrm{H}} = -5{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,

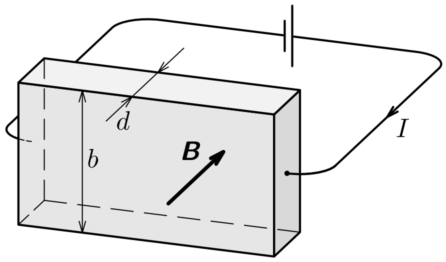
– zdroj, který v destičce vyvolá proud $I = 200$ mA,

– milivoltmetr s rozsahem od 20 μV do 10 mV.

a) Rozhodněte, kam musíte přiletovat kontakty a připojit milivoltmetr pro snímání Hallova napětí. Kde bude kladný pól?

b) Odvoďte vztah pro Hallovo napětí a napište vztah, ze kterého určíte B z naměřených veličin.

c) V jakém rozsahu lze uvedenými přístroji měřit magnetickou indukci?



Obr.42

30. Magnetohydrodynamický generátor

Zjednodušené schéma magnetohydrodynamického generátoru stejnosměrného proudu je na obr. 43. Jde v podstatě o deskový kondenzátor, mezi jehož desky ve vzájemné vzdálenosti $d = 12{,}0$ mm je veden svazek např. jednomocných kladných iontů lithia spolu s paprskem elektronů až na znaménko o stejném celkovém náboji. Vzájemné působení iontů s elektrony můžeme zanedbat, soustava je elektricky neutrální a můžeme ji považovat za plazma. Rychlosti iontů a elektronů jsou stejné: $v = 2{,}4 \cdot 10^4\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. V prostoru kondenzátoru působí na částice příčné magnetické pole o indukci $B = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ T, které způsobí rozdělení nábojů. Vypočtěte:

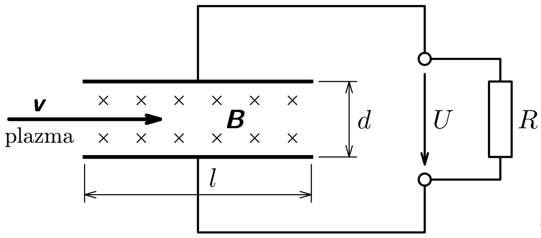
a) Sílu, kterou magnetické pole působí na ionty a na elektrony a zrychlení, které jim uděluje ($m_{\mathrm{i}} = 1{,}15 \cdot 10^{-26}$ kg).

b) Poloměry zakřivení trajektorií elektronů (r_{e}) a iontů (r_{i}).

c) Délku l desek, aby se na nich zachytily všechny částice.

d) Napětí U na deskách v rovnovážném stavu při nezatíženém generátoru.

e) Výkon generátoru při zatížení vnějším odporem R, zanedbáme-li vnitřní odpor generátoru a vstupuje-li do koncenzátoru každou sekundu $N_1 = 8{,}5 \cdot 10^{18}$ částic každého druhu. (*Poznámka:* protože plazma je elektricky neutrální soustava, rozhoduje o elektrickém proudu v obvodu tok jednoho druhu částic, např. elektronů.)



Obr.43

31. Cyklotron

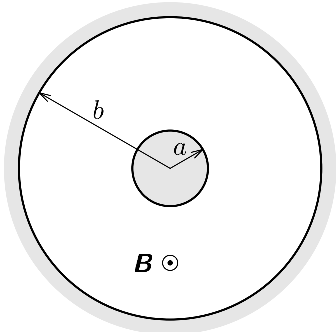
V klasickém kruhovém urychlovači – cyklotronu – jsou částice urychlovány při průchodech mezerou mezi urychlovacími elektrodami – duanty – připojenými ke zdroji střídavého napětí stálé frekvence (obr. 21). Dosahovaná rychlost a energie částic je omezena, protože v důsledku relativistického růstu hmotnosti částic dochází k zaostávání úhlové dráhy částic za fází urychlovacího napětí.

a) Jakou rychlost může získat částice v cyklotronu, nemá-li relativní zvětšení její hmotnosti $\delta m = \Delta m / m_0$ překročit 1,00 %?
b) Jaká bude při splnění podmínky a) maximální kinetická energie protonů (E_p), deuteronů (E_d) a částic α (E_α)?
c) Vypočtěte potřebnou frekvenci urychlovacího napětí pro protony (f_p), deuterony (f_d) a částice α (f_α), má-li cyklotron magnetické pole o indukci $B = 1{,}41$ T.

Řešte obecně a pak pro dané hodnoty δm a B.

32. Dynamika elektronů v elektromagnetickém poli (Podstatná část jedné úlohy na 27. MFO v Norsku v r. 1996)

Studujte dynamiku elektronů ve vakuovém prostoru mezi dvěma koaxiálními válci, přičemž vnitřní má poloměr a a vnější b (obr. 44). Vnější válec je anodou (je připojen ke kladnému pólu zdroje napětí), přičemž potenciální rozdíl mezi vnitřním a vnějším válcem je U. Homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$ je rovnoběžné s osou válců. Elektrony o klidové hmotnosti m_e a náboji $-e$ jsou uvolňovány z vnitřního válce (katody).



Obr. 44

a) Nejprve nechť je $U \neq 0$, avšak $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$. Vypočtěte jakou rychlostí elektron dopadne na anodu, je-li uvolněn z katody se zanedbatelnou rychlostí.

Řešte α) nerelativisticky, β) relativisticky. (V dalších částech úlohy řešte jen nerelativisticky.)

b) Nyní nechť je $U = 0$ a $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$. Elektron na vnitřním válci nechť má počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ o **radiálním** směru. Je-li $\boldsymbol{B} > \boldsymbol{B}_\mathrm{c}$, kde $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}$ je kritická magnetická indukce, elektron nedolétne k anodě. Určete $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}$.

V dalších částech úlohy bude $U \neq 0$, $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$.

c) Magnetické pole uděluje elektronu moment hybnosti $\boldsymbol{L}$, který má směr osy válců. Odvoďte vztah pro velikost momentu hybnosti elektronu na trajektorii mezi katodou a anodou.

d) Uvažujte elektron, který opouští povrch katody se zanedbatelnou rychlostí a nedolétne k anodě – jeho maximální vzdálenost od osy válců nechť je r_m. Vypočtěte velikost rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{m}$ elektronu v této poloze jako funkci r_m.

e) Vypočtěte kritickou velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}'$, kdy elektron, uvažovaný v předchozím odstavci, právě dosáhne anody.

(Úkol na MFO pokračoval dále případem, kdy elektron opouští katodu počáteční rychlostí, která má obecný směr, tj. má složku radiální, tangenciální a axiální a hledalo se příslušné $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}$)

Dodatky

D.1 Relativistická transformace síly

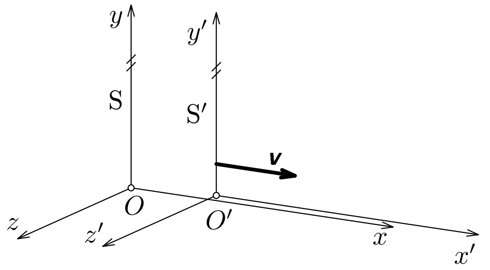
Odvodíme transformační vztah pro sílu, kterou na sebe působí dva materiální objekty (dvě částice) ve zvolené inerciální vztažné soustavě. První částice, budeme ji označovat jako **zdrojovou částici**, bude vytvářet zkoumané fyzikální pole. O její rychlosti $\boldsymbol{v}$ v pozorovací soustavě budeme předpokládat, že je ve srovnání s mezní rychlostí c (tj. rychlostí světla ve vakuu) velmi malá ($v \ll c$). Tato částice bude interagovat se druhou částicí, kterou budeme označovat jako **testovací částice**. Její rychlost $\boldsymbol{u}$ nebudeme omezovat žádnými předpoklady (jen relativistickou podmínkou $u < c$).

Uvedené omezení $v \ll c$ povede k významnému zjednodušení transformačních vztahů, avšak podstatně neomezuje aplikaci výsledného vztahu pro transformaci síly, zvláště v klasické („proudové“) elektrodynamice.

Protože síla je dána derivací hybnosti podle času, odvodíme nejprve vztah pro hybnost. K tomu potřebujeme znát transformační vztahy pro hmotnost a rychlost.

a) Zjednodušení Lorentzových transformačních vztahů

Ve speciální teorii relativity (viz např. [2], [4], [11]) se odvozují Lorentzovy transformační vztahy pro jednoduchý případ vzájemného pohybu inerciálních vztažných soustav S, S′, kdy soustava S′ se pohybuje vzhledem k soustavě S′ rychlostí $\boldsymbol{v}$ podél osy x (obr. 45). Relativní jsou nejen prostorové souřadnice, ale i časové souřadnice: t v S, t' v S′.



Obr. 45

Budou-li počátky O, O' v čase $t = t' = 0$ splývat, budou mezi prostoročasovými souřadnicemi x, y, z, t v S a x', y', z', t' v S′ platit **Lorentzovy transformační vztahy**:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = \gamma(x' + vt),\ y = y',\ z = z', \\ t = \gamma(t' + \dfrac{vx'}{c^2}), \quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}. \end{array}} \tag{61}$$

Tyto vztahy platí pro přechod od S′ k S. Inverzní transformační vztahy pro přechod od S k S′ dostaneme záměnou čárkovaných veličin za nečárkované a naopak a náhradou $v' = -v$.

Zvolený předpoklad $v \ll c$ umožní omezit se s dostatečnou přesností jen na členy, kde je v v první mocnině. Členy v/c s vyššími mocninami zanedbáme. Proto

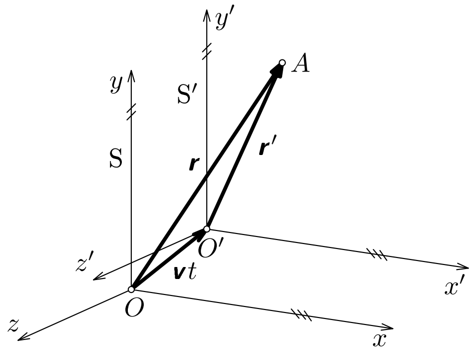
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \approx 1\,.$$

Pak Lorentzovy transformační vztahy (61) pro x a t budou mít jednoduchý tvar

$$x = x' + vt', \quad t = t' + \frac{vx'}{c^2}. \tag{62}$$

První vztah formálně představuje klasickou Galileiho transformaci; podle druhého však čas není absolutní.

Tuto transformaci zobecníme pro případ **šikmého pohybu** inerciálních soustav S, S′ (viz obr. 46), kdy osy zůstávají vzájemně rovnoběžné (jinak by S′ už nebyla inerciální) a počátek O' se pohybuje vzhledem k soustavě S stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$ libovolného (avšak stálého) směru. Polohové vektory libovolného bodu A v soustavách S, S′ označíme $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$.



Obr. 46

Pak první ze vztahů (62) nabude vektorového tvaru a ve druhém (skalárním) vztahu musíme zajistit, aby součin vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{r}$ dal skalár. Dá se dokázat, že jde o jejich prostý skalární součin $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r})$. Tak dostáváme hledané vztahy a vztahy inverzní:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}t', \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t,} \tag{63}$$

$$\boxed{t = t' + \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}'}{c^2}, \quad t' = t - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}}{c^2}\,.} \tag{64}$$

b) Transformace rychlosti

Testovací částice, jejíž pohyb je formálně popsán rovnicemi $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(t')$ bude mít v uvažovaných soustavách rychlosti

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \ \boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}\,,$$

které omezujeme jen podmínkou mezní rychlosti. Pro najití potřebného vztahu zderivujeme první ze vztahů (64):

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = 1 + \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}'}{c^2}. \tag{65}$$

Pak po přihlédnutí k prvnímu ze vztahů (63) dostaneme

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}'}{c^2}}, \tag{66}$$

což je hledaný transformační vztah pro rychlosti. V něm je $v \ll c$, $u < c$, $u' < c$.

c) Transformace hmotnosti a hybnosti

Z poznatků teorie relativity si můžeme všimnout, že hmotnost částice v určitém bodě vztažné soustavy $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ se transformuje stejným způsobem jako časový interval $T = T_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ děje, který v témže bodě probíhá.

Uvažujme nyní obecnější případ, kdy se částice bude pohybovat jak v soustavě S, tak v soustavě S′. Její hmotnost m a časový interval T v S a m', T' v S′ budou obdobně vázány vztahem

$$\frac{m}{T} = \frac{m'}{T'}. \tag{67}$$

Tento poznatek lze dokázat obecně užitím tzv. relativistického intervalu (viz např. [11], s. 99-100).

Na vztah (67) nejsou kladena žádná omezení pro rychlost $\boldsymbol{v}$ ($v < c$) vztažných soustav S, S′. My opět přejdeme k případu $v \ll c$. Vztah (67) přepíšeme pro elementární časové intervaly $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t'$ a dosadíme-li sem z výrazu (65) dostaneme hledaný vztah pro transformaci hmotnosti platný pro $v \ll c$:

$$m = m' \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = m' \left(1 + \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}'}{c^2}\right). \tag{68}$$

Známe-li nyní transformační vztahy pro hmotnost (68) a pro rychlost (66), můžeme najít vztah mezi hybností částice v S ($\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$) a v S′ ($\boldsymbol{p}' = m'\boldsymbol{u}'$):

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = m'(\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p}' + m'\boldsymbol{v}. \tag{69}$$

d) Transformace síly

V soustavách S a S′ působí na částici obecně rozdílné síly:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}, \qquad \boldsymbol{F}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{\mathrm{d}t'}.$$

Vztah mezi nimi najdeme derivací výrazu (69), a to nejprve podle t'; přitom uvážíme, že $\boldsymbol{v}$ = **konst.** Násobíme-li a dělíme-li druhý člen na pravé straně $c^2 = \text{konst.}$, dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{\mathrm{d}t'} + \frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}(m'c^2)}{\mathrm{d}t'} \boldsymbol{v}.$$

První člen vpravo je síla $\boldsymbol{F}'$, ve druhém členu je $m'c^2 = E'$ energie částice v S′. Změna energie E' je rovna práci síly $\boldsymbol{F}'$ v S′: $\mathrm{d}E' = \boldsymbol{F}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t'} = \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{u}'$$

je výkon síly $\boldsymbol{F}'$ v S′. Tak postupně dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t'} = \boldsymbol{F}' + \frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t'} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}' + [\boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{u}'] \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}.$$

Pro sílu $\boldsymbol{F}$ potom platí

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \left(\boldsymbol{F}' + [\boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{u}'] \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\right) \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}. \tag{70}$$

Pro úpravu tohoto výrazu provedeme následující dílčí výpočty s využitím vztahů (63) a (64):

$$\boldsymbol{u}'\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\,.$$

Pak lze přepsat výraz (70) do tvaru

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\right) + [\boldsymbol{F}'\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})]\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\,.$$

Odtud po zanedbání v^2/c^2 dostaneme výsledný vztah

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + \frac{1}{c^2}[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}')\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{F}']\,.$$

Výraz v hranaté závorce lze ještě vyjádřit ve formě dvojného vektorového součinu podle vzorce

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\,.$$

V kompaktním zápisu tedy platí

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{F}')\,,}\quad v \ll c,\ u < c. \tag{71}$$

Toto je důležitý transformační vztah mezi silou $\boldsymbol{F}$, která působí na částici, pohybující se v inerciální vztažné soustavě S rychlostí $\boldsymbol{u}$, a silou $\boldsymbol{F}'$, která působí na tutéž částici pohybující se v inerciální vztažné soustavě S′.

Podle klasické fyziky nemůže přechodem od jedné inerciální soustavy ke druhé vzniknout nová síla. Proto je existence přírůstku k síle $\boldsymbol{F}'$ z hlediska klasické mechaniky nepochopitelná. Relativistická fyzika může příčinu tohoto zvětšení síly hledat v relativnosti běhu času – v našem odvození je to přímý důsledek vztahů (64) pro čas. Na existenci tohoto přírůstku lze vysvětlit vznik a zákonitosti magnetického pole.

Pokud bychom se neomezovali na podmínku $v \ll c$, dostali bychom obecnější a složitější výraz než je (71); jeho odvození a důsledky z něj plynoucí lze najít v Horákově Fyzice [4].

D.2 Relativistická pohybová rovnice

Podle klasické fyziky je setrvačná hmotnost hmotného bodu (částice) konstantní, nezávislá na jeho pohybovém stavu ve vztažné soustavě. To výrazně zjednodušuje řešení pohybových rovnic. Relativistická fyzika poznatek o setrvačné hmotnosti koriguje a dospívá ke vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{72}$$

kde m_0 je klidová hmotnost hmotného bodu (částice) a $\boldsymbol{v}$ je jeho okamžitá rychlost ve vztažné inerciální soustavě.

Druhý pohybový zákon ve tvaru s hybností $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ hmotného bodu zůstává v platnosti i v relativistické fyzice, hmotnost m však v souladu s (72) není konstantní. Proto platí

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{a}, \tag{73}$$

kde $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ je okamžité zrychlení. Výraz pro derivaci hmotnosti podle času lze upravit užitím vztahu pro celkovou (relativistickou) energii: $E = mc^2$. Změna energie je rovna práci, kterou vykoná výslednice sil $\boldsymbol{F}$, tj.: $\mathrm{d}E = c^2\mathrm{d}m = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}{c^2}.$$

Relativistickou pohybovou rovnici (73) lze proto přepsat do tvaru

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}}{c^2}\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{a}\,,} \tag{74}$$

kde m je hmotnost příslušná rychlosti $\boldsymbol{v}$ hmotného bodu ve vztažné inerciální soustavě.

Na rozdíl od popisu v klasické fyzice nemají vektory $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{a}$ obecně stejný směr. Nyní popíšeme dva významné zvláštní případy, kdy směr těchto vektorů zůstává stejný:

1. Síla působí ve směru pohybu

Uvažujme nejprve případ, kdy síla $\boldsymbol{F}$ bude působit ve směru určité přímky, hmotný bod bude ležet na této přímce a jeho počáteční rychlost bude mít také směr této přímky (anebo bude nulová). Pak trajektorie hmotného bodu bude rovněž ležet na uvažované přímce, vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}$ budou souhlasně rovnoběžné, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} = vF$ a rovnici (74) můžeme psát skalárně:

$$F = \frac{v^2}{c^2} F + ma.$$

Po dosazení z (72) a po úpravě můžeme tento vztah opět přepsat do vektorového tvaru pro zrychlení

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_0} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}\,,} \quad (\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{v}), \tag{75}$$

kde $\boldsymbol{F}/m_0$ je zrychlení, které síla $\boldsymbol{F}$ uděluje hmotnému bodu ze stavu klidu.

Diskutovaný případ má význam např. pro urychlování nabitých částic v podélném elektrickém poli.

2. Síla působí kolmo ke směru pohybu

V tomto případě jsou vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{F}$ k sobě kolmé a tudíž $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} = 0$. Pak se vztah (74) zjednoduší do tvaru $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, neboli pro zrychlení platí

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,,} \quad (\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{v}). \tag{76}$$

Tento případ má význam např. pro pohyb nabitých částic v příčném magnetickém poli. Setkáme se s ním u cyklických urychlovačů, jako např. u synchrocyklotronů a fázotronů. U klasického cyklotronu se ovšem předpokládá $m \approx m_0$.

Zajímavé je porovnání vztahů pro zrychlení v obou diskutovaných případech. Zrychlení v (75) má směr tečny k trajektorii a je tedy **tečné**:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\tau},$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor ve směru tečny. Zrychlení v (76) má směr normály k trajektorii a je tedy **normálové**:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} \boldsymbol{n},$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor ve směru normály, $\boldsymbol{v}$ okamžitá rychlost a r poloměr křivosti trajektorie v uvažované poloze hmotného bodu.

D.3 Fyzikální konstanty pro řešení úloh

(*Konstanty jsou uvedeny s přesností na pět platných míst.*)

Rychlost světla ve vakuu	$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Planckova konstanta	$h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$
Elementární náboj	$e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Permitivita vakua	$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$
	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}9876 \cdot 10^{9}\ \mathrm{F^{-1} \cdot m}$
	$\doteq 9 \cdot 10^{9}\ \mathrm{F^{-1} \cdot m}$
Permeabilita vakua	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}} =$
	$= 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$
Avogadrova konstanta	$N_\mathrm{A} = 6{,}0221 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Faradayova konstanta	$F = 9{,}6485 \cdot 10^{4}\ \mathrm{C{\cdot}mol^{-1}}$
Elektronvolt	$1\ \mathrm{eV} = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$
Hmotnostní jednotka	$\mathrm{u} = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Klidová hmotnost elektronu	$m_\mathrm{e} = 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Měrný náboj elektronu	$e/m = 1{,}7588 \cdot 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}$
Klidová hmotnost protonu	$m_\mathrm{p} = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Klidová hmotnost neutronu	$m_\mathrm{n} = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Klidová hmotnost deuteronu	$m_\mathrm{d} = 3{,}3436 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Klidová hmotnost částice α	$m_\alpha = 6{,}6447 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}$
Normální tíhové zrychlení	$g = 9{,}80665\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ (přesně)
Rovníkový poloměr Země	$R_\mathrm{Z} = 6{,}3782 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$
Gravitační konstanta	$\varkappa = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$

Řešení úloh

1. Proudové plochy jsou válcové o $r \in \langle r_1, r_2 \rangle$. Odpor $R = \dfrac{1}{2\pi\gamma l} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$.

2. a) $\varphi = \dfrac{I}{2\pi\gamma r}$, $r \in \langle a, \infty)$.

b) $R_\mathrm{z} = \dfrac{1}{2\pi\gamma a} = 16{,}6\ \Omega$, $P_\mathrm{z} = R_\mathrm{z} I^2 = 166\ \mathrm{kW}$.

c) $U_\mathrm{k} = \varphi(r) - \varphi(r + \Delta_\mathrm{k}) = \dfrac{I}{2\pi\gamma r} \dfrac{\Delta_\mathrm{k}}{r + \Delta_\mathrm{k}}$,
$U_\mathrm{k}(10\ \mathrm{m}) = 9{,}82\ \mathrm{V}$, $U_\mathrm{k}(1\ \mathrm{m}) = 589\ \mathrm{V}$.

3. Situace v určitém okamžiku t od začátku vybíjení kondenzátoru je naznačena na obr. 47, kdy původní napětí kleslo z U_0 na U.

a) Maxwellův proud je roven proudu vodivému, který v případě vybíjení souvisí s úbytkem náboje:

$$I_\mathrm{M} = I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon S}{d_0}\frac{\mathrm{d}(Ed_0)}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon S\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t},$$

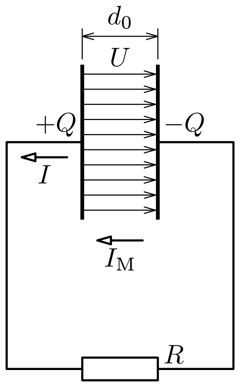
kde D je velikost indukce $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ elektrického pole. Hustota Maxwellova proudu při vybíjení je

$$\boldsymbol{j}'_\mathrm{M} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}.$$

Při nabíjení, kdy indukce $\boldsymbol{D}$ bude vyrůstat, bude

$$\boxed{\boldsymbol{j}_\mathrm{M} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},}$$

kde se derivace podle času vyjádřila jako parciální, protože obecně $\boldsymbol{D}$ je funkcí těchto nezávisle proměnných: x, y, z, t.



Obr. 47

b) Pro vodivý proud při vybíjení podobně dostaneme

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}.$$

Odtud můžeme napsat diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}U}{U} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t,$$

jejíž integrací v mezích U_0, U pro napětí a 0, t pro čas dostaneme

$$\ln \frac{U}{U_0} = -\frac{t}{RC}\,.$$

Neboli $U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ pro napětí a $I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ pro proud.

4. Intenzita má směr osy závitů a velikost:

a) $H_0 = \dfrac{I}{2R}\left[1 + \dfrac{R^3}{(4a^2+R^2)^{3/2}}\right], \quad H_\mathrm{S} = \dfrac{IR^2}{(a^2+R^2)^{3/2}}\,.$

b) $H_0 = \dfrac{I}{2R}\left[1 - \dfrac{R^3}{(4a^2+R^2)^{3/2}}\right], \quad H_\mathrm{S} = 0\,.$

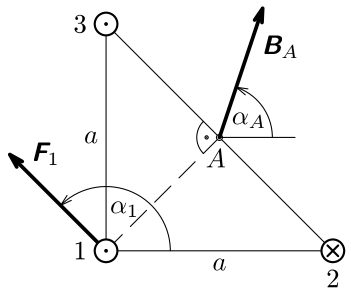
5. a) Příspěvky od jednotlivých vodičů mají stejnou velikost.

$$B_\mathrm{A} = \frac{\mu_0\sqrt{10}I}{2\pi a}\,,$$

$$\alpha_\mathrm{A} = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 71°34'\,.$$

b) $F_1 = \dfrac{\mu_0\sqrt{2}I^2 l}{2\pi a}$, $\alpha_1 = \dfrac{3\pi}{4} = 135°$.

Směr vektorů $\boldsymbol{B}_\mathrm{A}$, $\boldsymbol{F}_1$ je zřejmý z obr. 48.



Obr. 48

6. Použijeme princip superpozice a výsledek (24) příkladu 4.

$$H = \frac{2\sqrt{2}Iz}{\pi a} = 324\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}, \qquad B = \mu_0 H = 4{,}07\cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}\,.$$

7. a) $H = \dfrac{I}{4r}\left(\dfrac{2}{\pi}+1\right)$, b) $H = \dfrac{I}{4r}\left(\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right)$.

8. a) $H = \dfrac{I}{2\pi a}$, b) $H = \dfrac{I}{4\pi a}$, c) $H = \dfrac{I}{8a}$.

9. a) $H = \dfrac{3\sqrt{3}I}{4\pi a}$, b) $H = \dfrac{\sqrt{2}I}{\pi a}$, c) $H = \dfrac{3I}{2\pi a}$, d) $H = \dfrac{I}{2a}$.

Velikost intenzit je v poměru čísel

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} : \frac{2\sqrt{2}}{\pi} : \frac{3}{\pi} : 1\,.$$

neboli s přesností na 3 platné cifry 0,827 : 0,900 : 0,955 : 1.

10. $\Phi = \dfrac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \dfrac{a}{a_0}\right) = 2{,}10 \cdot 10^{-7}$ Wb

11. a) Vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý k nákresně a míří směrem do ní. K výpočtu velikosti $\boldsymbol{B}$ soustavu rozložíme na dvě polopřímky a jejich účinek pro bod P sečteme. Pro polopřímku lze užít dílčího výsledku příkladu 4 – výraz (24), v němž pro náš případ dosadíme $H = B/2\mu_0$ (číslo „2“, protože jedna polopřímka je polovina soustavy), $r = d \sin\alpha$, $\beta_1 = -\pi/2$, $\beta_2 = -(\pi/2 - \alpha)$. Pak

$$\frac{B}{2\mu_0} = \frac{I}{4\pi d \sin\alpha}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 1\right].$$

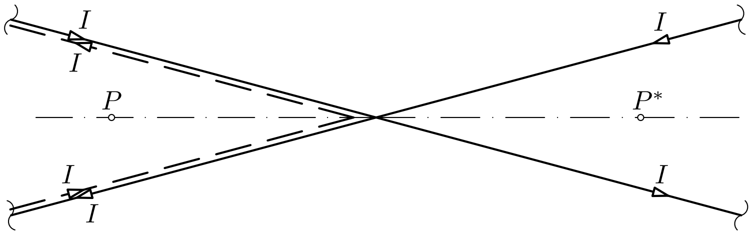
neboli

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\,\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

b) V bodě P^* bude vektor $\boldsymbol{B}^*$ opět kolmý k nákresně, avšak směřuje ven z ní. K výpočtu jeho velikosti můžeme použít stejný postup jako v bodě a), avšak úhel β_2 bude mít opačné znaménko, tj. $\beta_2 = (\pi/2 - \alpha)$. Pak

$$B^* = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\,\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Ke stejnému výsledku můžeme dospět využitím výsledku řešení bodu a) a užitím principu superpozice polí dvou zkřížených proudových přímek, od nichž odečteme pole soustavy V pro bod P, jak je zřejmé z obr. 49.



Obr. 49

c) Na magnetku působí moment síly $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ o velikosti

$$M = -mB\sin\varphi \approx -mB\beta$$

pro malé úhly β, kde β je odchylka z rovnovážné polohy (obr. 50), v níž moment síly je nulový.

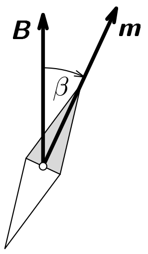
Moment $\boldsymbol{M}$ uděluje magnetce úhlové zrychlení

$$\ddot{\beta} = \frac{M}{J} = -\frac{mB}{J}\beta\,.$$

Magnetka koná kmitavý pohyb, neboť pro jeho úhlové zrychlení platí

$$\ddot{\beta} = -\omega^2\beta = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\beta\,.$$

Srovnáním pravých stran těchto vztahů dostaneme pro dobu kmitu výraz



Obr. 50

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}}\,.$$

Změříme-li T, můžeme vypočíst B:

$$B = \frac{4\pi^2}{T^2}\,\frac{J}{m}\,.$$

12. Intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole má velikost (viz příklad 1 v textu [12]):

$$E = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2+x^2)^3}}\,.$$

Pro stanovení mangetické indukce $\boldsymbol{B}$ užijme výsledku (21) příkladu 1, v němž proud nahradíme výrazem

$$I = \frac{\omega Q}{2\pi}\,, \quad \text{tj.} \quad B = \frac{\mu_0\omega Q R^2}{4\pi\sqrt{(R^2+x^2)^3}}\,.$$

Oba vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ mají stejný směr a leží v ose prstence. Pro podíl jejich velikostí vychází

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\,\frac{x}{\omega R^2} = c^2\frac{x}{\omega R^2}\,.$$

kde c je rychlost světla ve vakuu.

Rozměrová zkouška

levá strana: $\dfrac{\mathrm{V\cdot m^{-1}}}{\mathrm{T}} = \dfrac{\mathrm{V\cdot m^{-1}}}{\mathrm{V\cdot s\cdot m^{-2}}} = \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$

pravá strana: $\mathrm{m^2\cdot s^{-2}}\cdot\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^{-1}\cdot m^2}} = \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$

To, že E/B má rozměr jednotky rychlosti vyplývá přímo z relativistického vztahu (53).

13. Pro elektrickou složku intenzity (viz úlohu č. 8 v [12]) vychází

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right), \text{ pro } x > 0\,.$$

Pro výpočet intenzity magnetické složky pole vyjmeme elementární rotující mezikruží, které můžeme považovat za kruhový závit s proudem

$$\mathrm{d}I = \frac{Q\omega}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\,.$$

Interpretací výsledků příkladu 3 dostaneme

$$\mathrm{d}H = \frac{r^2\mathrm{d}I}{2(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{Q\omega}{2\pi R^2}\frac{r^3\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\,.$$

Integrací pro r v mezích od 0 do R dostaneme

$$H = \frac{Q\omega}{2\pi R^2}\left[\sqrt{x^2+r^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+r^2}}\right]_0^R = \frac{Q\omega}{2\pi R^2}\left(\frac{2x^2+R^2}{\sqrt{x^2+R^2}} - 2x\right)\,.$$

Oba vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ mají stejný směr – směr osy. Pro $x \to 0$, tedy v blízkosti středu kruhu, je

$$E_0 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2},\; H_0 = \frac{Q\omega}{2\pi R},\; \frac{H_0}{E_0} = \varepsilon_0\omega R\,.$$

14. a) Vyjdeme ze vztahu (22), po jeho přepsání pro závit o obecném poloměru r a šířce dr, kterým teče elementární proud

$$\mathrm{d}I = I\frac{z}{r_2 - r_1}\mathrm{d}r$$

a po integraci dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I z}{2(r_2 - r_1)}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.$$

b) Vyjádříme magnetický moment závitu o poloměru r a šířce dr (teče jím proud dI) a integrujeme, pak

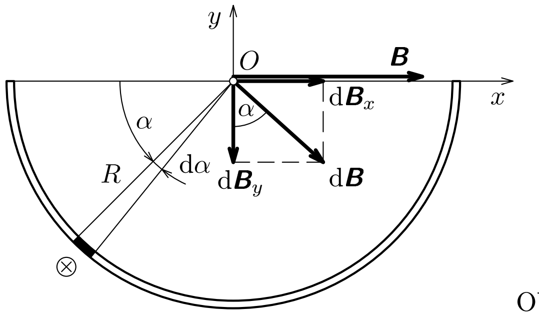
$$m = \frac{\pi I z}{3(r_2 - r_1)}(r_2^3 - r_1^3) = \frac{\pi I z}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\,.$$

15. Z vodiče vyjmeme obecně uložený element (obr. 52), kterým teče proud

$$\mathrm{d}I = \frac{I}{\pi}\mathrm{d}\alpha\,.$$

Pro velikost jeho indukce d$\boldsymbol{B}$ v souladu s (25) platí

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\,\mathrm{d}\alpha\,.$$



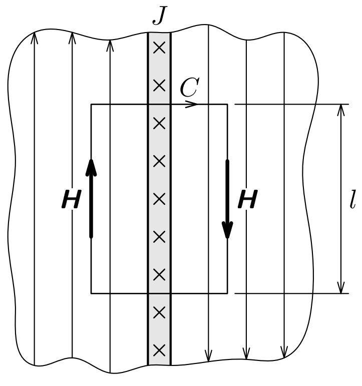
Obr. 51

Pro každý element v 1. kvadrantu lze najít ve 2. kvadrantu element, který vynuluje složku d$\boldsymbol{B}_y$. Složky d$\boldsymbol{B}_x$ se sečtou. Pak

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\int_0^{\pi} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\,,$$

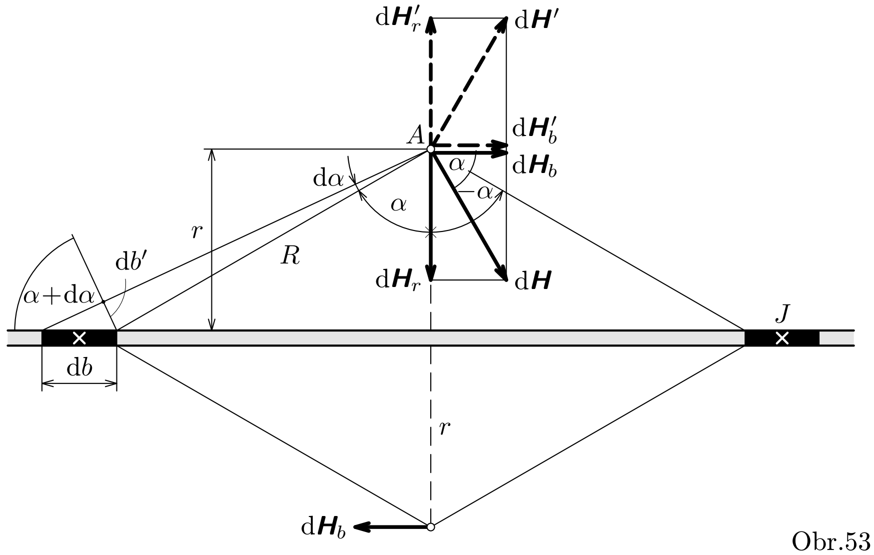
přičemž $\boldsymbol{B}$ má směr osy x (obr. 51).

16. a) Posoudíme tvar siločar zkoumaného pole (viz obr. 52) – jsou rovnoběžné s rovinou a kolmé ke směru proudu. Zvolíme tvar uzavřené čáry C – jako obdélník, jehož dvě strany o délce l jsou rovnoběžné se siločárami a druhé dvě strany jsou kolmé k siločarám. Zákon celkového proudu: $2Hl = Jl$ dává výsledek $H = J/2$.



Obr.52

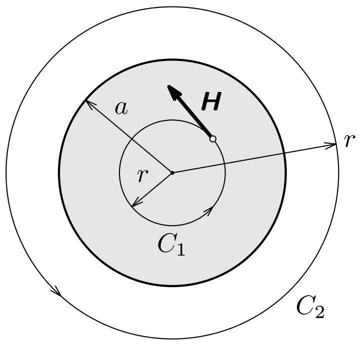
b) Z desky vyjmeme element šířky db, vyjádříme intenzitu jeho pole jako funkci jedinnné proměnné α a integrujeme přes celou proudovou rovinu (obr. 53).



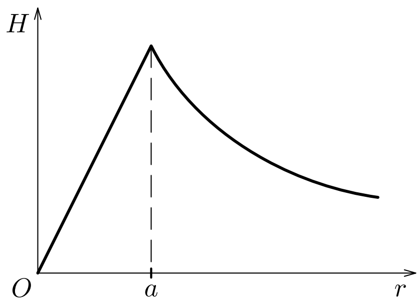
Obr.53

17. Proudová hustota ve vodiči má velikost $j = \dfrac{I}{\pi a^2}$.

Užijeme zákon celkového proudu pro uzavřenou křivku ve tvaru kružnice C_1 nebo C_2 o poloměru r (obr. 54).



Obr. 54



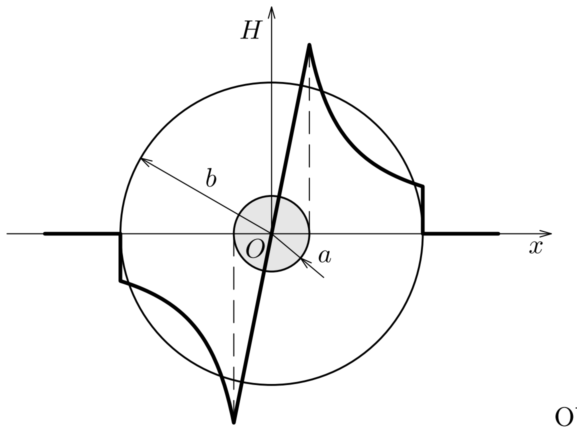
Obr. 55

a) Uvnitř průřezu C_1 ($r \leq a$): $H \cdot 2\pi r = j\pi r^2$, neboli $H = \dfrac{I}{2\pi a^2} r$.

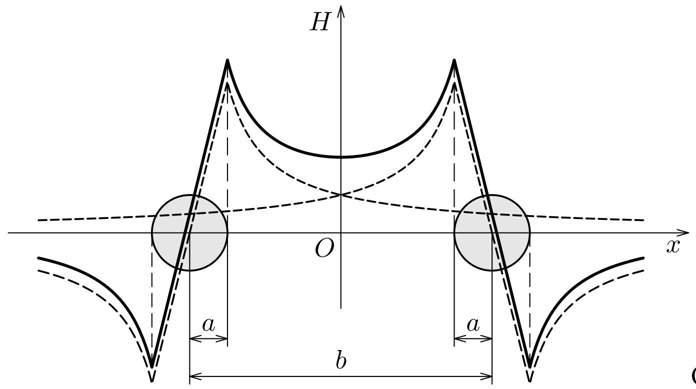
b) Vně vodiče C_2 $(r > a)$: $H \cdot 2\pi r = I$, neboli $H = \dfrac{I}{2\pi r}$.

Funkce $H = H(r)$ je znázorněna na obr. 55.

18. a) Viz obr. 56. b) Viz obr. 57.



Obr. 56



Obr. 57

19. Řešíme superpozicí polí dvou **válcových** vodičů, přičemž efekt proudů v prostoru mezi vodiči se vyruší. Každý z těchto válcových vodičů musí vést větší proud I', který určíme z poměru plošných obsahů

$$I' = \frac{S'}{S} I = \frac{6\pi}{2\pi + 3\sqrt{3}} I\,.$$

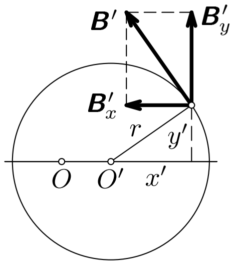
Proud je po průřezu rozložen s konstantní plošnou hustotou $j' = I'/S' = I'/\pi R^2$. Magnetickou indukci uvnitř jednoho vodiče určíme užitím zákona celkového proudu, přičemž za uzavřenou křivku volíme kružnici o poloměru $r \in \langle 0,\ R \rangle$. Pak velikost indukce $\boldsymbol{B}'$ je dána vztahem

$$2\pi r \frac{B'}{\mu_0} = j'\pi r^2 , \quad \text{neboli} \quad B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi R^2} r .$$

Vektor $\boldsymbol{B}'$ má směr tečny ke kružnici o poloměru r (obr. 58). Kartézské složky tedy mají velikost

$$B'_x = -B' \frac{y'}{r} = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi R^2} y' ,$$

$$B'_y = B' \frac{x'}{r} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi R^2} x' ,$$



Obr. 58

kde x', y' jsou souřadnice kartézské soustavy, jejíž počátek O' je posunut do polohy $x = R/2$ (pro I' kladné – případ na obr. 58) anebo do polohy $x = -R/2$ (pro I' záporné; pak má $\boldsymbol{B}'$ opačný směr, než je naznačen na obr. 58).

Nyní provedeme superpozici pro dva válcové vodiče, přičemž jeden má osu v poloze $x = -R/2$ a teče jím proud $-I'$ a druhý v poloze $x = R/2$ a proud I'. Pak x-ová složka výsledné magnetické indukce v mezeře je nulová: $\boldsymbol{B}_x = \boldsymbol{0}$ a pro velikost její y-ové složky platí

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi R^2} \left[I' \left(x + \frac{R}{2} \right) - I' \left(x - \frac{R}{2} \right) \right] = \frac{\mu_0 I'}{2\pi R} = \frac{3\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})R} = konst .$$

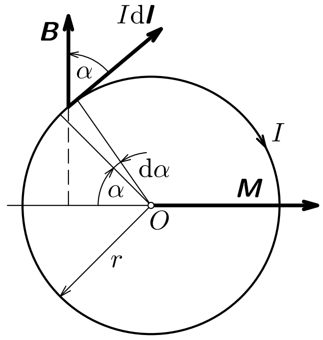
Magnetická indukce soustavy vodičů C_+ a C_- v prostoru mezery **má konstantní velikost a směr osy y.**

20. Na element $I\mathrm{d}l = Ir\mathrm{d}\alpha$ působí magnetická síla $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m$, která má směr kolmý k nákresně (obr. 59). Na rameni $r \sin\alpha$ působí momentem síly o velikosti

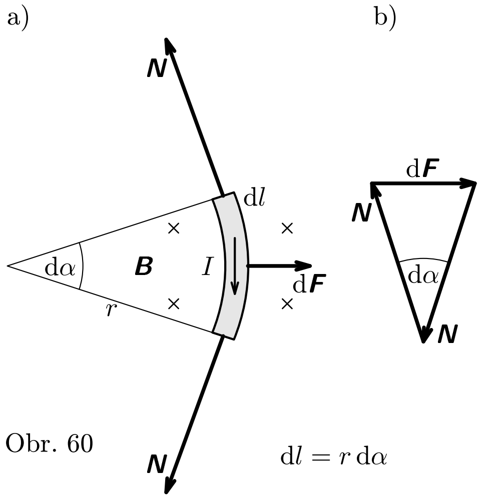
$$\mathrm{d}M = BIr^2 \sin^2 \alpha \mathrm{d}\alpha .$$

Integrací v mezích pro $\alpha \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$ dostaneme

$$M = BI\pi r^2 = BIS .$$



Obr. 59



Obr. 60

21. $\omega = \sqrt{\dfrac{2\pi BI}{m}}$.

22. a) Moment síly má velikost $M = \pi r^2 IB = 10{,}6\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ a směr kolmý k indukčním čarám.

b) Z drátu vyjmeme myšleným řezem element $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ (obr. 60a), který uvedeme do rovnováhy působením vnitřních sil $\boldsymbol{N}$.

α) Z rovnováhy sil (obr. 60b) plyne $\mathrm{d}F = N\mathrm{d}\alpha$, kde $\mathrm{d}F = BIr\mathrm{d}\alpha$. Pak $N = BIr = 11{,}3\ \mathrm{N}$.

β) $\sigma = \dfrac{N}{S_0} = 1{,}13\cdot 10^7$ Pa. Z Hookova zákona plyne

$$\Delta l = \frac{2\pi r N}{E_m S_0} = 1{,}93\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}\,, \qquad \Delta r = \frac{\Delta l}{2\pi} = 3{,}07\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}\,.$$

23. a) $M_m = 2BIlrz\cos\alpha$, b) $I = \dfrac{k_\mathrm{t}}{2Blrz}\dfrac{\alpha}{\cos\alpha}$.

24. a) α) $I_a = \dfrac{C}{I_1}\dfrac{\alpha}{\cos\alpha}$,

kde $C = \dfrac{lk_\mathrm{t}}{\mu_0 a^2 z_1 z_2} = 3{,}11\cdot 10^{-2}\ \mathrm{A}^2/1^\circ$ je konstanta zařízení.

γ) $K_a = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}I_a} = \dfrac{I_1}{C}\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha + \alpha\sin\alpha}$,

b) α) $I_b = \sqrt{C\dfrac{\alpha}{\cos\alpha}} = \sqrt{I_1 I_a}$,

γ) $K_b = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}I_b} = \dfrac{2I_b}{C} \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha + \alpha\sin\alpha} = \dfrac{2}{I_1}\sqrt{C\dfrac{\alpha}{\cos\alpha}} K_a \,,$

$$\frac{K_b}{K_a} = \frac{2}{I_1}\sqrt{C\frac{\alpha}{\cos\alpha}} = 2\frac{I_b}{I_1} \,.$$

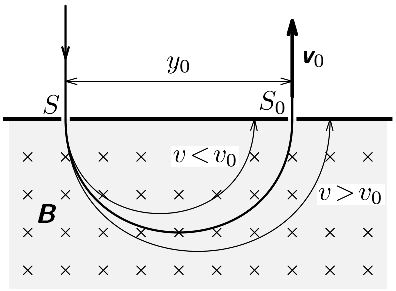
β) Numericky:

α	I_a/A	K_a/°/A	I_b/A	K_b/°/A
0°	0	32,2	0	0
10°	0,316	11,5	0,562	12,9
20°	0,662	3,65	0,814	5,94
30°	1,077	1,52	1,038	3,15

25. $\dfrac{e}{m_e} = \dfrac{2U}{r^2B^2} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}} \,.$

26. Svazek částic necháme projít štěrbinou S do příčného magnetického pole o indukci B, ve kterém se budou částice pohybovat po kruhové trajektorii (obr. 61) o poloměru, který splňuje rovnici $Bev = v^2m/R$. Chceme-li získat částice o rychlosti v_0, uděláme štěrbinu S_0 ve vzdálenosti $y_0 = 2R_0$ od svazku, tj.

$$y_0 = \frac{2m}{eB} v_0 \,.$$



Obr. 61

27. $y = \dfrac{eBl_1}{\sqrt{2m_eeU}}\left(\dfrac{l_1}{2} + l_2\right)$ – výchylka je přímo úměrná B.

28. a) Z rovnosti $\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{F}_e$ je $v = E/B = 4{,}52 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) Elektrony se odchýlí z přímočaré trajektorie. Jevu lze využít k filtrování rychlosti elektronů. Elektrony požadované rychlosti $v = E/B$ se pohybují přímočaře.

c) $r = \dfrac{m_eE}{eB^2} = 20{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$.

29. a) Kontakty se přiletují na horní a spodní plošku (v obr. 42) destičky; kladný pól bude nahoře.

b) $B = \dfrac{U_\mathrm{H}d}{R_\mathrm{H}I}$, c) $B \in \langle 0{,}10;\ 50\rangle$ T.

30. a) Působící magnetická síla je stejná: $F_m = evB = 7{,}69 \cdot 10^{-20}$ N.

Zrychlení iontů $a_i = F_m/m_i = 6{,}69 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, zrychlení elektronů $a_e = F_m/m_e = 8{,}44 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

b) $r_e = \dfrac{m_e v}{eB} = 6{,}82$ mm (dvojnásobek poloměru musí být větší než vzdálenost d desek, jinak by některé elektrony nedopadly na desku a vedly by k porušení elektrické neutrality soustavy; u naší soustavy je pomínka splněna, neboť $2r_e = 13{,}64\ \mathrm{mm} > d = 12\ \mathrm{mm}$),

$r_i = \dfrac{m_i v}{eB} = r_e \dfrac{m_i}{m_e} = 86{,}1\ \mathrm{m}$.

c) Délka l musí být minimálně taková, aby kruhová trajektorie iontů v blízkosti jedné desky minula právě okraj druhé:

$$l \approx \sqrt{2 r_i d} = 1{,}44\ \mathrm{m}\,.$$

d) V rovnovážném dynamickém stavu bude magnetická síla právě rovna elektrické síle ve vzniklém příčném elektrickém poli:

$$evB = e\frac{U}{d}, \quad \text{odtud} \quad U = vBd = 5{,}76\ \mathrm{mV}\,.$$

e) Vodiči bude procházet proud $I = eN_1 = 1{,}36$ A a odebíraný výkon bude $P = UI = 7{,}84$ mW.

31. a) Pro relativistické zvětšení hmotnosti platí:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{m_0 + \Delta m}{m_0} = 1 + \delta m = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}\,.$$

Úpravou dostaneme:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1+\delta m)^2}} = c\frac{\sqrt{(2+\delta m)\delta m}}{1+\delta m} = 0{,}140c = 4{,}21 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

b) Kinetická energie částic je úměrná zvětšení jejich hmotnosti:

$$E_\mathrm{k} = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \cdot \delta m\,.$$

$$E_\mathrm{p} = m_\mathrm{p} c^2 \cdot \delta m = 1{,}50 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} \doteq 9{,}4\ \mathrm{MeV}\,.$$

$$E_\mathrm{d} = m_\mathrm{d} c^2 \cdot \delta m = 3{,}01 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} \doteq 19\ \mathrm{MeV}\,.$$

$$E_\alpha = m_\alpha c^2 \cdot \delta m = 5{,}97 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} \doteq 37\ \mathrm{MeV}\,.$$

c) Dráha částice v cyklotronu je zakřivena působením magnetické síly:

$$ZeB\omega r = m\omega^2 r, \quad \omega = 2\pi f = \frac{ZeB}{m_0}, \qquad f = \frac{ZeB}{2\pi m_0}.$$

$$\text{protony } (Z = 1) \;\; f_\mathrm{p} = \frac{eB}{2\pi m_\mathrm{p}} = 21{,}5\ \mathrm{MHz}\,,$$

$$\text{deuterony } (Z = 1) \;\; f_\mathrm{d} = \frac{eB}{2\pi m_\mathrm{d}} = 10{,}8\ \mathrm{MHz}\,,$$

$$\text{částice } \alpha \; (Z = 2) \;\; f_0 = \frac{eB}{\pi m_\alpha} = 10{,}8\ \mathrm{MHz}\,.$$

32. a) α) $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}$,

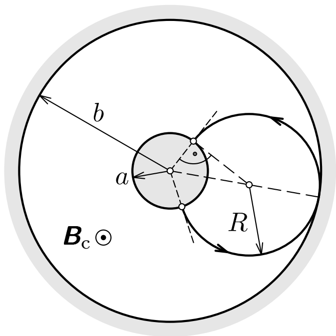
β) Kinetická energie $E_\mathrm{k} = eU$ se projeví přírůstkem hmotnosti:

$$m_e c^2 + eU = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}. \quad \text{Z toho} \quad v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{m_e c^2 + eU}\right)^2}.$$

.

b) Na elektron působí magnetická složka Lorentzovy síly, která jeho trajektorii zakřiví do tvaru kružnice o poloměru R, pro nějž platí vztah

$$eB_c v_0 = \frac{m_e v_0^2}{R}.$$



Obr. 62

Z geometrie trajektorie, jejíž tečny v počátečním a konečném bodě na katodě mají směr radiály (viz obr. 62), plyne

$$\sqrt{a^2 + R^2} = b - R\,, \text{ neboli } R = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Pak

$$B_c = \frac{m_e v_0}{eR} = \frac{2b m_e v_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

c) Změna momentu hybnosti je popsána II. impulsovou větou

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}\,,$$

kde moment síly $\boldsymbol{M}$ je dán magnetickou složkou Lorentzovy síly

$$\boldsymbol{F} = (-e)\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}\,,$$

která leží v rovině kolmé k ose válců a může tudíž vyvolat moment $\boldsymbol{M}$, jež má směr osy válců. Jeho velikost je $M = F_\mathrm{t} r$, kde F_t je tangenciální složka síly $\boldsymbol{F}$, která je dána radiální složkou rychlosti: $v_\mathrm{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$. Pro velikosti veličin tedy platí

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = eBr\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = eB \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r^2}{2}\right)\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \frac{eBr^2}{2}\right) = 0\,.$$

Tudíž

$$L - \frac{1}{2}eBr^2 = C, \tag{a}$$

kde C je konstanta v průběhu pohybu elektronu mezi katodou a anodou.

d) Použijeme rovnici (a) pro povrch katody ($r = a$), kde $L = 0$ a pro polohu $r = r_m$, kde $L = m_e v_m r_m$, neboť rychlost v_m má tangenciální směr (její radiální složka je právě nulová).
Pak

$$0 - \frac{1}{2}eBa^2 = m_e v_m r_m - \frac{1}{2}eBr_m^2\,,$$

odkud

$$v_m = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2m_e r_m}\,.$$

e) Při kritické velikosti magnetické indukce $\boldsymbol{B}_c'$ bude $r_m = b$ a $v_m = v$ určené podle odstavců aα), d). Pak

$$\sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = \frac{eB_c'(b^2 - a^2)}{2m_e b}\,,$$

odkud hledaná velikost kritické magnetické indukce je

$$B_c' = \frac{2b}{b^2 - a^2}\sqrt{\frac{2m_e U}{e}}\,.$$

Literatura

[1] *Fejnmanovskije lekcii po fizike: Zadači i upražněnija s otvětami i rešenijami.* Izd. Mir, Moskva 1969. (Překlad z originálu: *The Feynman Lectures on Physics. Excercises.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, London 1964-1965.)

[2] Fuka, J., Havelka, B.: *Elektřina a magnetismus.* 3.vydání. SPN, Praha 1979.

[3] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: *Technická fyzika.* SNTL, Praha 1961.

[4] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika.* SNTL/SVTL, Praha 1966, 1976, 1981.

[5] Hubeňák, J.: *Úlohy výkonového kursu fyziky v SRN. I. část – Elektrické a magnetické pole.* Edice „SCIO ME MULTA NESCIRE“ č. 19. MAFY, Hradec Králové 1999.

[6] Irodov, I. E.: *Osnovnyje zakony elektromagnetizma.* Izd. Vysšaja škola, Moskva 1983.

[7] Malíšek, V.: *Co víte o dějinách fyziky.* Horizont, Praha 1986.

[8] Purcell, E. M.: *Električestvo i magnetizm. Berkleevskij kurs fiziki, II. tom.* Izd. Nauka, Moskva 1971. (Překlad z originálu: Purcell, E. M.: *Elektricity and Magnetism. Berkley Physics Course, volume 2.* Mcgraw–hill book company.)

[9] Vybíral, B.: *Fyzikální pole z hlediska teorie relativity.* SPN, Praha 1976, SPN, Bratislava 1980.

[10] Vybíral, B.: *Teorie elektromagnetického pole.* Pedagogická fakulta v Hradci Králové, Hradec Králové 1984.

[11] Vybíral, B.: *Základy teorie relativity.* Gaudeamus, Hradec Králové 1995.

[12] Vybíral, B.: *Elektrostatika.* Knihovnička fyzikální olympiády č. 39. MAFY, Hradec Králové 1999.